TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.3, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 2 mei, 2016

Outline

1. Section I.5 The Cauchy-Riemann Differential Equations
   - Conforme afbeeldingen
   - De arctangens

2. II.1 Complex Line Integrals
   - $f : [a, b] \to \mathbb{C}$
   - $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Delft University of Technology

Oriëntatie- en hoekbewarend

Stel $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ is $\mathbb{R}$-lineair en bijectief.
We noemen T

oriëntatie-bewarend als $\det T > 0$

hoektrouw als $|Tx||Ty|\langle x, y\rangle = |x||y|\langle Tx, Ty\rangle$

Als $x, y \neq 0$ dan staat er bij 'hoektrouw'

$$\frac{\langle Tx, Ty\rangle}{|Tx||Ty|} = \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}$$

De cosinussen van de hoeken zijn gelijk.

Delft University of Technology

Hoektrouw

Een hoektrouwe afbeelding voert driehoeken over in gelijkvormige driehoeken. (Plaatje op het bord.)

Zo'n afbeelding vermenigvuldigt alle afstanden met dezelfde factor.

Algebra 1, Stelling 3.11, opgaven 3.29 en 3.30: zo'n afbeelding is te schrijven als

$$\varphi^{+}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} : z \mapsto \boldsymbol{\alpha} z + \boldsymbol{\beta}$$

of als

$$\varphi^{-}_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}} : z \mapsto \boldsymbol{\alpha} \bar{z} + \boldsymbol{\beta}$$

met $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$

Hoektrouw

In ons geval geldt $T0 = 0$, dus $\boldsymbol{\beta} = 0$.

Schrijf $\boldsymbol{\alpha} = a + b\mathrm{i}$, dan geldt
$\varphi^{+}_{\boldsymbol{\alpha},0}(1) = a + b\mathrm{i}$ en $\varphi^{+}_{\boldsymbol{\alpha},0}(\mathrm{i}) = -b + a\mathrm{i}$.
ook geldt $\varphi^{-}_{\boldsymbol{\alpha},0}(1) = a + b\mathrm{i}$ en $\varphi^{-}_{\boldsymbol{\alpha},0}(\mathrm{i}) = b - a\mathrm{i}$.

De matrix van T is dus

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Delft University of Technology

Oriëntatie- en hoekbewarend

Conclusie: T is oriëntatiebewarend èn hoektrouw
dan en slechts dan als
er een $\alpha \neq 0$ is zó dat $Tz = \alpha z$ voor alle z.

Conforme afbeeldingen

Stel $f : D \to D'$ is continu differentieerbaar, met D en D' open in $\mathbb{R}^2$.

We noemen f (lokaal) *conform* als voor elke $\alpha \in D$ de Jacobiaan $J(f, \alpha)$ oriëntatiebewarend en hoektrouw is.

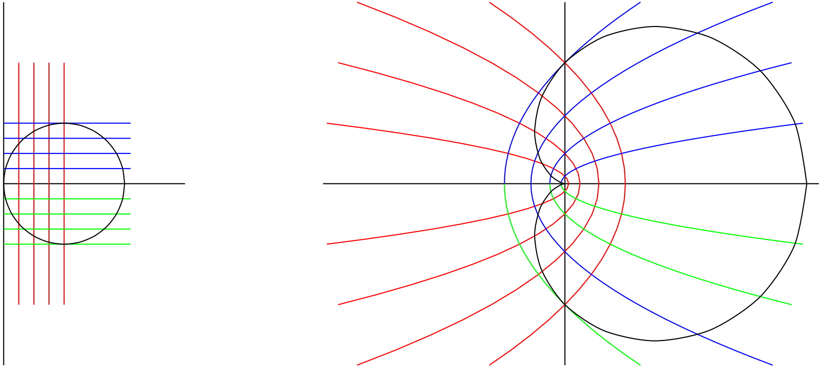
Als f ook nog bijectief is dan noemen we f globaal conform.

Conforme afbeeldingen

Conclusie (Stelling I.5.15):
Als D en D' open ziijn dan is $f : D \to D'$ lokaal conform
dan en slechts dan als
f analytisch is met een continue afgeleide die nergens nul is.

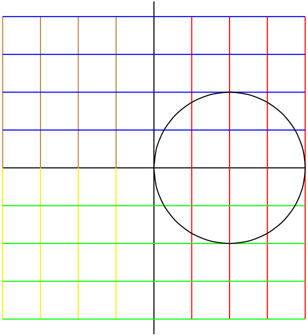
Kwadrateren

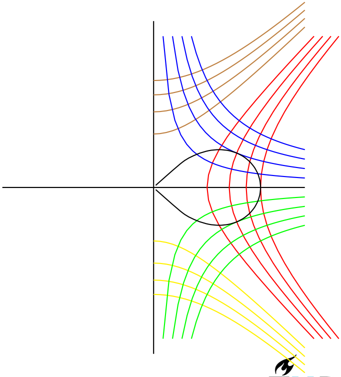
D: rechterhalfvlak; $D' = \mathbb{C}_-$; $f(z) = z^2$.



Worteltrekken

$D = \mathbb{C}_-$, D' het rechterhalfvlak, $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ (hoofdtak van de wortel)





Orthogonale niveaukrommen

Kijk nog eens naar de plaatjes:
als $f = u + iv$ analytisch is dan snijden de niveaukrommen van $u(x, y)$ en $v(x, y)$ elkaar altijd loodrecht.

Impliciet differentiëren

- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -u_x/u_y$ op de niveaukrommen van u
- $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -v_x/v_y$ on de niveaukrommen van v

Pas Cauchy-Riemann toe:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_u \cdot \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_v = \left(-\frac{u_x}{u_y}\right) \cdot \left(-\frac{v_x}{v_y}\right) = -\frac{u_x}{u_y} \cdot \frac{u_y}{u_x} = -1$$

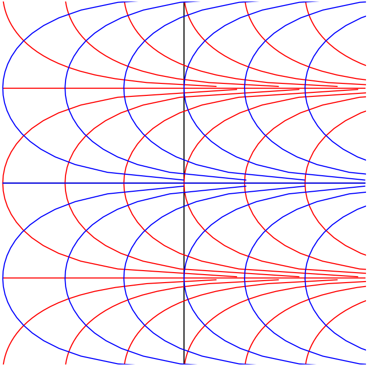
Klaar!

Dit volgt natuurlijk ook uit de hoektrouwheid van f.

Delft University of Technology

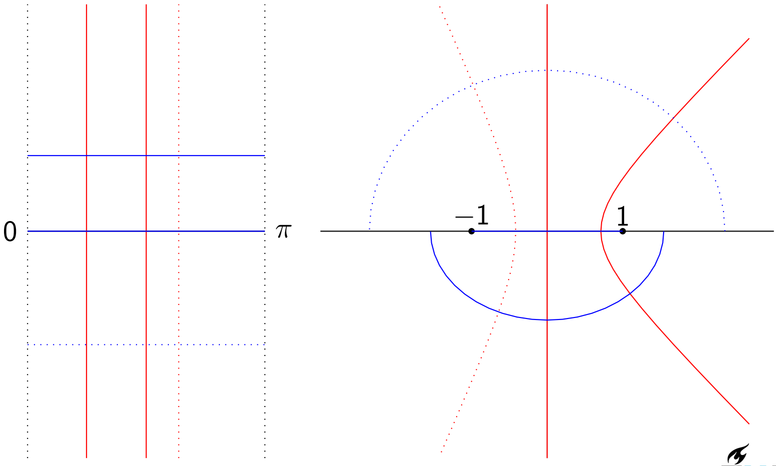
De exponentiële functie

De niveaukrommen van $e^x \cos y$ (rood) en $e^x \sin y$ (blauw)



En kijk: elke rode kromme snijdt elke blauwe kromme loodrecht.

De cosinus als afbeelding



De arctangens

Hoe ziet de complexe arctan er uit?
We hebben gewoon $\tan = \frac{\sin x}{\cos x}$ en deze is (nog steeds) periodiek, met periode π.
Dus als $z = \tan w$, dan $z = \tan(w + \pi)$, $z = \tan(w - \pi)$, ...
Dus $\arctan z$ heeft oneindig veel waarden: w, $w + \pi$, $w - \pi$, ...

Delft University of Technology

De arctangens

We gaan $z = \tan w$ oplossen naar w:
Begin met

$$z = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{e^{\mathrm{i}w} - e^{-\mathrm{i}w}}{e^{\mathrm{i}w} + e^{-\mathrm{i}w}}$$

vermenigvuldig teller en noemer met $e^{\mathrm{i}w}$:

$$z = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{e^{2\mathrm{i}w} - 1}{e^{2\mathrm{i}w} + 1} \text{ of } \mathrm{i}z = \frac{e^{2\mathrm{i}w} - 1}{e^{2\mathrm{i}w} + 1}$$

Eerst oplossen naar $e^{2\mathrm{i}w}$:

$$e^{2\mathrm{i}w} = \frac{1 + \mathrm{i}z}{1 - \mathrm{i}z}$$

En dus . . .

De arctangens

... nemen we de logaritme

$$2\mathrm{i}w = \log\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)$$

en dus

$$w = \frac{1}{2\mathrm{i}}\log\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\operatorname{Log}\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right) + k\pi$$

En ja, die schelen onderling een geheel veelvoud van π

Definitie

Als $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ dan schrijven we (nog steeds) $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ en definiëren

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

Bekende eigenschappen

Lineair,
reëel/imaginair deel van de integraal is integraal van reëel/imaginair deel, en

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \bigl|f(t)\bigr|\,\mathrm{d}t$$

Welbekend voor reëelwaardige functies en
er is een mooi argument voor complexwaardige functies

Bewijs van (3) op pagina 70

Neem $\theta = \operatorname{Arg} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, dus $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = e^{-i\theta} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Maar, dan is $\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{d}t$ is reëel, en dus gelijk aan de integraal van het reële deel, dus

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \int_a^b \operatorname{Re}\bigl(e^{-i\theta} f(t)\bigr)\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Een mooie ongelijkheid

Langs de eenheidscirkel geldt

$$|e^{2\alpha\pi i} - 1| \leqslant 2\pi|\alpha| \qquad \alpha \text{ reëel}$$

Volgt uit Opgave I.2.4.(a), maar ook als volgt:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{i\alpha}(e^{2\alpha\pi i} - 1) \tag{$\dagger$}$$

en

$$\int_0^{2\pi} |e^{i\alpha t}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi \tag{$\ddagger$}$$

Nu ($\dagger$) en ($\ddagger$) combineren (met modulussen).

Definitie

Gegeven

- een kromme C in een open verzameling O in het vlak
- een functie $f : O \to \mathbb{C}$

wat is $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$?

Krommen

Krommen verkrijgen we door middel van een continue functie $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Beginpunt $\alpha(a)$, eindpunt $\alpha(b)$.

Een recht lijnstuk is ook een kromme, het lijnstuk van $\boldsymbol{a}$ naar $\boldsymbol{b}$ wordt gegeven door $\alpha(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ ($\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$).

De eenheidscirkel

De eenheidscirkel: $\varepsilon : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\alpha(t) = \exp(2\pi\mathrm{i}t)$.

De k-voudige eenheidscirkel: $\varepsilon_k : [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\varepsilon_k(t) = \exp(2k\pi\mathrm{i}t)$.

Dus: ε_k gaat $|k|$ keer de cirkel rond: linksom als $k > 0$ en rechtsom als $k < 0$.

Gladheid

Een kromme, $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$, is

glad als α continu differentieerbaar is

stuksgewijs glad als er punten $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$ zijn zó dat de beperking van α tot elk interval $[a_\nu, a_{\nu+1}]$ glad is.

De integraal

We definiëren $\int_\alpha f$.
We hebben een kromme $\alpha : [a, b] \to D$ met D open en $f : D \to \mathbb{C}$ continu.

We definiëren

$$\int_\alpha f = \int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t$$

als α glad is.

Als α stuksgewijs glad is integreren we over de gladde stukjes en tellen we de resultaten op.

Delft University of Technology

De integraal

We hebben $f = u + \mathrm{i}v$ en we schrijven $\alpha(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$.

Als we $f(\alpha(t))\alpha'(t)$ uitschrijven komt er

$$\begin{aligned} f(\alpha(t))\alpha'(t) &= (u + \mathrm{i}v)(x' + \mathrm{i}y') \\ &= (u \cdot x' - v \cdot y') + \mathrm{i}(v \cdot x' + u \cdot y') \end{aligned}$$

Dus $\operatorname{Re} \int_\alpha f$ en $\operatorname{Im} \int_\alpha f$ zijn beide integralen van vectorvelden over de kromme α: van $\binom{u}{-v}$ en van $\binom{v}{u}$:

$$\int_\alpha f = \left(\int_\alpha u \, \mathrm{d}x - v \, \mathrm{d}y \right) + \mathrm{i} \left(\int_\alpha v \, \mathrm{d}x + u \, \mathrm{d}y \right)$$

Delft University of Technology

Booglengte

De *booglengte* van een gladde kromme $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ is, net als bij Analyse 2:

$$l(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)| \, \mathrm{d}t$$

(en stuksgewijs glad: lengten van gladde stukjes optellen).

De lengte van het lijnstuk van $\boldsymbol{a}$ naar $\boldsymbol{b}$ is, natuurlijk, $|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$.

De lengte van ε_k is $2|k|\pi$.

Delft University of Technology

Een nuttige ongelijkheid

Stel $M \geqslant \bigl|f(z)\bigr|$ voor alle z in het beeld van α dan geldt

$$\left|\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M \cdot l(\alpha)$$

Delft University of Technology

Een nuttige ongelijkheid

Bewijs:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f\bigl(\alpha(t)\bigr)\alpha'(t)\,\mathrm{d}t \right| &\leqslant \int_a^b \bigl| f\bigl(\alpha(t)\bigr)\alpha'(t) \bigr| \,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M \int_a^b \bigl|\alpha'(t)\bigr| \,\mathrm{d}t \\ &= M \cdot l(\alpha) \end{aligned}$$

Delft University of Technology

Een fundamentele formule

Laat $r > 0$ en neem $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\alpha(t) = r\exp(\mathrm{i}t)$, dan

$$\int_\alpha \zeta^n \,\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Delft University of Technology

Geval $n = -1$

Uitrekenen:

- Afgeleide: $\alpha'(t) = \mathrm{i}r\exp(\mathrm{i}t)$
- $\alpha(t)^{-1} = \exp(-\mathrm{i}t)/r$
- Dus,

$$\int_\alpha \zeta^{-1}\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\exp(-\mathrm{i}t)r\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}$$

Delft University of Technology

Het geval $n \neq -1$

Uitrekenen:

- afgeleide: $\alpha'(t) = \mathrm{i}r \exp(\mathrm{i}t)$
- $\alpha(t)^n = r^n \exp(\mathrm{i}nt)$
- Dus,

$$\begin{aligned}\int_\alpha \zeta^n \,\mathrm{d}\zeta &= \int_0^{2\pi} r^n \exp(\mathrm{i}nt)\mathrm{i}r \exp(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{i}r^{n+1} \exp((n+1)t\mathrm{i})\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i}r^{n+1}\left[\frac{1}{n+1}\exp((n+1)t\mathrm{i})\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

Delft University of Technology

Met primitieven

Als f een primitieve, F, heeft dan volgt

$$\int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F\bigl(\alpha(b)\bigr) - F\bigl(\alpha(a)\bigr)$$

in het bijzonder, als α *gesloten* is, dus als $\alpha(a) = \alpha(b)$, dan

$$\int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Delft University of Technology

Opgaven

Nuttige opgaven: I.5: 13, 14, 15, 16, 17; II.1: 1, 2, 4, 5, 6, 8.
Verdiepende opgaven: II.1: 3, 7, 9, 10, 11.

Delft University of Technology