TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.4, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 9 mei, 2016

TU Delft
Delft University of Technology

Outline

1. II.1 Complex Line Integrals
   - $f : [a, b] \to \mathbb{C}$
   - $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
   - Primitieven
2. II.2 The Cauchy Integral Theorem
   - Een paar afspraken
   - Primitieven en zo
   - Stelling van Cauchy-Goursat

Delft University of Technology

Definitie

Als $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ dan schrijven we (nog steeds) $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ en definiëren

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

Primitieve

Als $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ een primitieve van f is, dus $F = U + \mathrm{i}V$ met $U' = u$ en $V' = v$, dan geldt

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

want $\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t = U(b) - U(a)$ en $\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = V(b) - V(a)$.

Definitie

Gegeven

- een kromme $\alpha : [a, b] \to D$ in een open verzameling D in het vlak
- een functie $f : D \to \mathbb{C}$

wat is $\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z$?

De integraal

We definiëren $\int_\alpha f$.

We hebben een *stuksgewijs gladde* kromme $\alpha : [a,b] \to D$ met D open en $f : D \to \mathbb{C}$ continu.

We definiëren

$$\int_\alpha f = \int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t$$

Delft University of Technology

De integraal

We hebben $f = u + \mathrm{i}v$ en we schrijven $\alpha(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$.

Als we $f(\alpha(t))\alpha'(t)$ uitschrijven komt er

$$\begin{aligned} f(\alpha(t))\alpha'(t) &= (u + \mathrm{i}v)(x' + \mathrm{i}y') \\ &= (u \cdot x' - v \cdot y') + \mathrm{i}(v \cdot x' + u \cdot y') \end{aligned}$$

Dus $\mathrm{Re} \int_\alpha f$ en $\mathrm{Im} \int_\alpha f$ zijn beide integralen van vectorvelden over de kromme α: van $\binom{u}{-v}$ en van $\binom{v}{u}$:

$$\int_\alpha f = \left(\int_\alpha u \,\mathrm{d}x - v \,\mathrm{d}y\right) + \mathrm{i}\left(\int_\alpha v \,\mathrm{d}x + u \,\mathrm{d}y\right)$$

Delft University of Technology

Een fundamentele formule

Laat $r > 0$ en $z_0 \in \mathbb{C}$, en neem $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door $\alpha(t) = z_0 + r\exp(\mathrm{i}t)$, dan

$$\int_\alpha (\zeta - z_0)^n \,\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i} & n = -1 \\ 0 & n \neq -1 \end{cases}$$

Geval $n = -1$

Uitrekenen:

- Afgeleide: $\alpha'(t) = \mathrm{i}r\exp(\mathrm{i}t)$
- $(\alpha(t) - z_0)^{-1} = \exp(-\mathrm{i}t)/r$
- Dus,

$$\begin{aligned}\int_\alpha (\zeta - z_0)^{-1}\,\mathrm{d}\zeta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\exp(-\mathrm{i}t)r\mathrm{i}\exp(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi\mathrm{i}\end{aligned}$$

Het geval $n \neq -1$

Uitrekenen:

- afgeleide: $\alpha'(t) = \mathrm{i}r \exp(\mathrm{i}t)$
- $(\alpha(t) - z_0)^n = r^n \exp(\mathrm{i}nt)$
- Dus,

$$\begin{aligned}
\int_\alpha (\zeta - z_0)^n \,\mathrm{d}\zeta &= \int_0^{2\pi} r^n \exp(\mathrm{i}nt)\mathrm{i}r \exp(\mathrm{i}t) \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{i}r^{n+1} \exp((n+1)t\mathrm{i}) \,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{i}r^{n+1} \left[\frac{1}{(n+1)\mathrm{i}} \exp((n+1)t\mathrm{i}) \right]_0^{2\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Delft University of Technology

Met primitieven

Als f een primitieve, F, heeft dan volgt

$$\int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F\bigl(\alpha(b)\bigr) - F\bigl(\alpha(a)\bigr)$$

in het bijzonder, als α *gesloten* is, dus als $\alpha(a) = \alpha(b)$, dan

$$\int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Voorbeeld

We doen $\int_\alpha z \, \mathrm{d}z$.
Uitschrijven:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x + \mathrm{i}y)(x' + \mathrm{i}y') \, \mathrm{d}t &= \int_a^b (xx' - yy') + \mathrm{i}(yx' + xy') \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \mathrm{i}xy\right]_a^b \\
&= \frac{1}{2}\bigl(x(b)^2 - y(b)^2 + \mathrm{i}2x(b)y(b)\bigr) \\
&\quad - \frac{1}{2}\bigl(x(a)^2 - y(a)^2 + \mathrm{i}2x(a)y(a)\bigr) \\
&= \frac{1}{2}\bigl(\alpha(b)^2 - \alpha(a)^2\bigr)
\end{aligned}$$

Algemeen geval

Stel $F' = f$ (complex).
Schrijf $F = U + \mathrm{i}V$ (NB er geldt niet $U' = u$ of $V' = v$)
Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(\alpha(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(U(\alpha(t)) + \mathrm{i}V(\alpha(t))\bigr) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigl(U(x(t), y(t)) + \mathrm{i}V(x(t), y(t))\bigr) \\
&= (U_x \cdot x' + U_y \cdot y') + \mathrm{i}(V_x \cdot x' + V_y \cdot y') \\
&= (u \cdot x' - v \cdot y') + \mathrm{i}(v \cdot x' + u \cdot y')
\end{aligned}$$

Want er geldt wel: $u = U_x = V_y$ en $v = V_x = -U_y$

Algemeen geval

Conclusie: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F\big(\alpha(t)\big) = f\big(\alpha(t)\big)\alpha'(t)$.

En dus, inderdaad,

$$\int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F\big(\alpha(b)\big) - F\big(\alpha(a)\big)$$

Analyse 2

Uit het dictaat *Analyse 2*

Stelling (4.18)

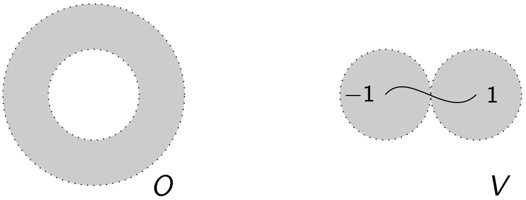
Als $D \subseteq \mathbb{R}^2$ samenhangend is en $\boldsymbol{F} : D \to \mathbb{R}^2$ continu dan zijn equivalent

1. $\boldsymbol{F}$ *is conservatief*
2. $\int_\alpha \boldsymbol{F} = 0$ *voor elke gesloten kromme α in D*
3. $\boldsymbol{F}$ *heeft een potentiaal op D*

Iets dergelijks gaan we voor *complexe* functies formuleren en bewijzen.

Samenhang

- Een open verzameling D is samenhangend als elk tweetal punten verbonden kunnen worden met een kromme in D
- De open verzameling $O = \{z : 1 < |z| < 2\}$ is samenhangend.
- De open verzameling $V = \{z : |z-1| < 1 \text{ or } |z+1| < 1\}$ is dat niet: geen kromme van -1 naar 1 blijft geheel binnen V.



Domein

Een domein (in het boek) is een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$.

Krommen plakken

Stel $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ en $\beta : [b, c] \to \mathbb{C}$ zijn krommen met $\alpha(b) = \beta(b)$ dan is $\alpha \oplus \beta : [a, c] \to \mathbb{C}$ de kromme die we krijgen door β achter α te plakken:

$$(\alpha \oplus \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(t) & t \in [a, b] \\ \beta(t) & t \in [b, c] \end{cases}$$

Als α en β stuksgewijs glad zijn dan is $\alpha \oplus \beta$ dat ook.

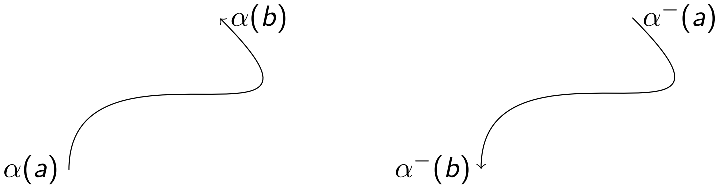
Er geldt natuurlijk: $\int_{\alpha\oplus\beta} f = \int_\alpha f + \int_\beta f$.

Delft University of Technology

Krommen omkeren

Als $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ een kromme is dan is zijn *omkering* $\alpha^{-}[a, b] \to \mathbb{C}$ gedefinieerd door

$$\alpha^{-}(t) = \alpha(b + a - t)$$



Krommen omkeren

Er geldt, natuurlijk

$$\int_{\alpha^-} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int_{\alpha} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Theorem II.2.4

Stelling

Stel $D \subseteq \mathbb{C}$ is een domein en $f : D \to \mathbb{C}$ is continu.
Dan zijn equivalent

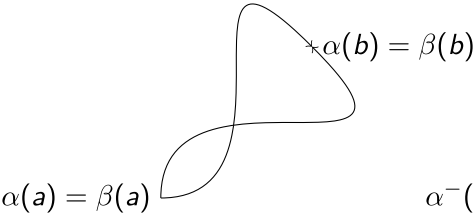
1. *de integraal van f langs een kromme in D hangt alleen van het begin- en eindpunt af*
2. *voor elke gesloten kromme α in D geldt $\int_\alpha f = 0$*
3. *f heeft een primitieve*

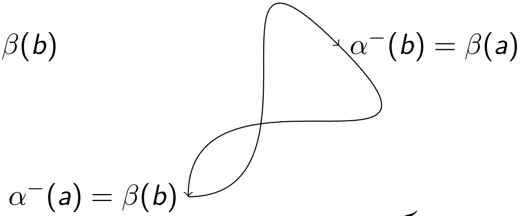
De implicatie (3)⇒(1) hebben we al gezien. De implicatie (1)⇒(2) is duidelijk: (2) is een speciaal geval van (1).

Theorem II.2.4

De implicatie (2)⇒(1) volgt via omkering: Als $\alpha(a) = \beta(a)$ en $\alpha(b) = \beta(b)$ dan is $\beta \oplus \alpha^-$ gesloten. En dus

$$\int_\beta f - \int_\alpha f = \int_\beta f + \int_{\alpha^-} f = \int_{\beta\oplus\alpha^-} f = 0$$





Delft University of Technology

Theorem II.2.4

Nu nog de implicatie (1)⇒(3).
Neem $z_\bullet \in D$ vast en neem voor elke $z \in D$ een kromme, α_z, in D die $z_\bullet$ en z verbindt en definieer

$$F(z) = \int_{\alpha_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

omdat de kromme er niet toe doet schrijven we

$$F(z) = \int_{z_\bullet}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Theorem II.2.4

Zij $z_0 \in D$ we bewijzen dat $F'(z_0) = f(z_0)$. Neem $r > 0$ met $U_r(z_0) \subseteq D$ en $z \in U_r(z_0)$.

Er geldt

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{z_\bullet}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_{z_\bullet}^{z_0} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

De integraal $\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ doen we langs het rechte lijnstuk van z_0 naar z.

Plaatje op het bord.

Theorem II.2.4

We herschrijven die laatste integraal:

$$\begin{aligned}\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta &= \int_{z_0}^{z} f(\zeta) - f(z_0) + f(z_0)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \int_{z_0}^{z} f(\zeta) - f(z_0)\,\mathrm{d}\zeta + f(z_0)(z - z_0)\end{aligned}$$

We schrijven nu

$$r(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) - f(z_0)\,\mathrm{d}\zeta$$

en we bewijzen

$$\lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0$$

Theorem II.2.4

Zij $\varepsilon > 0$ en neem $\delta > 0$ zó dat voor alle z met $|z - z_0| < \delta$ geldt $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Dan volgt meteen, als $0 < |z - z_o| < \min\{r, \delta\}$,

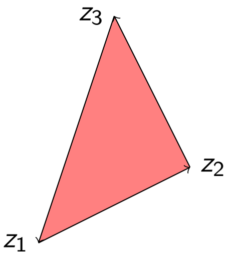
$$|r(z)| \leqslant |z - z_0| \cdot \varepsilon \text{ of } \left|\frac{r(z)}{z - z_0}\right| \leqslant \varepsilon$$

Klaar!

We gaan bewijzen dat analytische functies lokaal altijd te primitiveren zijn.

Dat doen we door te bewijzen dat hun integralen over driehoeken nul zijn, mits de functie in het hele inwendige van de driehoek analytisch is.

Notatie



De rand van de driehoek is $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3$ waarbij

1. $\alpha_1(t) = z_1 + (t-0)(z_2 - z_1)$, met $t \in [0,1]$
2. $\alpha_2(t) = z_2 + (t-1)(z_3 - z_2)$, met $t \in [1,2]$
3. $\alpha_3(t) = z_3 + (t-2)(z_1 - z_3)$, met $t \in [2,3]$

Alternatieve notatie: $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$.

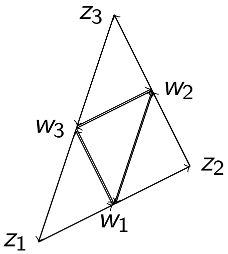
De stelling

Stelling (II.2.5)

Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ open en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch.
Laat $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ een driehoek zijn die met zijn inwendige in D ligt.
Dan geldt

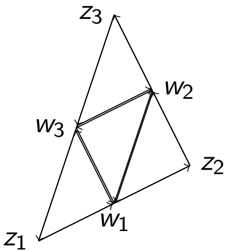
$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Het bewijs



Verdeel de driehoek in vier gelijkvormige driehoeken.
Door de middens van de zijden te verbinden.

Het bewijs



Er geldt

$$\int_{\langle z_1,z_2,z_3\rangle} f = \int_{\langle z_1,w_1,w_3\rangle} f + \int_{\langle w_1,z_2,w_2\rangle} f + \int_{\langle w_2,z_3,w_3\rangle} f + \int_{\langle w_1,w_2,w_3\rangle} f$$

Het bewijs

En dus

$$\left|\int_{\langle z_1,z_2,z_3\rangle} f\right| = \left|\int_{\langle z_1,w_1,w_3\rangle} f\right| + \left|\int_{\langle w_1,z_2,w_2\rangle} f\right| + \left|\int_{\langle w_2,z_3,w_3\rangle} f\right| + \left|\int_{\langle w_1,w_2,w_3\rangle} f\right|$$

Voor (ten minste) één van de driehoekjes, zeg Δ, geldt dus

$$\frac{1}{4}\left|\int_{\langle z_1,z_2,z_3\rangle} f\right| \leqslant \left|\int_{\Delta} f\right|$$

Het bewijs

Noem de oorspronkelijke driehoek, $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ dus, Δ_0.
De kleinere driehoek noemen we Δ_1.

We hebben nu twee dingen:

$$\frac{1}{4}\left|\int_{\Delta_0} f\right| \leqslant \left|\int_{\Delta_1} f\right|$$

en de lengte van Δ_1 is de helft van die van Δ_0.

Delft University of Technology

Het bewijs

Ga zo verder: als we een driehoek Δ_n hebben vinden we op dezelfde manier een driehoek Δ_{n+1} met

$$\frac{1}{4}\left|\int_{\Delta_n} f\right| \leqslant \left|\int_{\Delta_{n+1}} f\right|$$

en de lengte van Δ_{n+1} is de helft van die van Δ_n.

Het bewijs

Zo krijgen we, voor alle n:

$$\left|\int_{\Delta_0} f\right| \leqslant 4^n \left|\int_{\Delta_n} f\right|$$

en

$$l(\Delta_n) = 2^{-n} l(\Delta_0)$$

De compactheid van de gesloten driehoek garandeert nu dat de doorsnede van de volle driehoeken niet leeg is.
En omdat de $l(\Delta_n) \to 0$ voor $n \to \infty$ zit er precies één punt, z_0 in die doorsnede.

Het bewijs

Als we bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} 4^n \left|\int_{\Delta_n} f\right| = 0$ dan zijn we klaar.

We weten: $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + r(z)$, met $\lim_{z\to z_0} \frac{r(z)}{z-z_0} = 0$.

We weten ook: $\int_{\Delta_n} f(z_0)\,\mathrm{d}\zeta = 0$ en $\int_{\Delta_n} f'(z_0)(\zeta - z_0)\,\mathrm{d}\zeta = 0$ (want die twee functies hebben een primitieve).

En dus

$$\int_{\Delta_n} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{\Delta_n} r(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Het bewijs

Zij nu $\varepsilon > 0$, neem $\delta > 0$ zó dat $|r(z)| < \varepsilon|z - z_0|$ als $|z - z_0| < \delta$.

Er is een N zó dat $\Delta_n \subseteq U_\delta(z_0)$ voor $n \geqslant N$.

Omdat z_0 op of binnen Δ_n ligt geldt $|z - z_0| < l(\Delta_n)$ als z op Δ_n ligt.

En dus, als $n \geqslant N$, dan $|r(z)| < \varepsilon \cdot l(\Delta_n)$.

Nu 'bovengrens maal lengte' gebruiken:

$$\left|\int_{\Delta_n} r(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \varepsilon \cdot l(\Delta_n) \cdot l(\Delta_n) = \frac{\varepsilon \cdot l(\Delta_0)^2}{4^n}$$

Het bewijs

En dus, voor $n \geqslant N$ geldt

$$4^n \left| \int_{\Delta_n} r(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \varepsilon \cdot l(\Delta_0)^2$$

We zien dat $\int_{\Delta_0} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$.

Delft University of Technology

Kort bewijs

Herinner

$$\int_{\Delta_0} f = \left(\int_{\Delta_0} u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y\right) + \mathrm{i}\left(\int_{\Delta_0} v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y\right)$$

dus, als f' continu is kunnen we de stelling van Green gebruiken:

$$\int_{\Delta_0} f = \iint_{D_0} -v_x - u_y\,\mathrm{d}(x,y) + \mathrm{i}\iint_{D_0} u_x - v_y\,\mathrm{d}(x,y)$$

Met behulp van de Cauchy-Riemannvergelijkingen zien we dat er 0 uit komt.

Opgaven

Nuttige opgaven: II.2: 1, 3, 5, 6
Verdiepende opgaven: II.2: 2, 4