TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.5, donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 26 mei, 2016

Herhaling:

als $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, met $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$, dan definiëren we

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

Voor ons: stuksgewijs gladde functies $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$.

Beginpunt $\alpha(a)$, eindpunt $\alpha(b)$.

Een recht lijnstuk is ook een kromme, het lijnstuk van $\boldsymbol{a}$ naar $\boldsymbol{b}$ wordt gegeven door $\alpha(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$ ($\alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$).

De eenheidscirkel: $\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\varepsilon(t) = \exp(2\pi\mathrm{i}t)$.

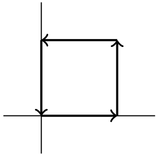
De k-voudige eenheidscirkel: $\varepsilon_k : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\varepsilon_k(t) = \exp(2k\pi\mathrm{i}t)$.

Dus: ε_k gaat $|k|$ keer de cirkel rond: linksom als $k > 0$ en rechtsom als $k < 0$.

TUDelft
Delft University of Technology

Definieer $\alpha : [0,4] \to \mathbb{C}$ door

$$\alpha(t) = \begin{cases} t & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 1 + \mathrm{i}(t-1) & 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ (3-t) + \mathrm{i} & 2 \leqslant t \leqslant 3 \\ (4-t)\mathrm{i} & 3 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases}$$



We definiëren $\int_\alpha f$.

We hebben een kromme $\alpha : [a, b] \to D$ met D open en $f : D \to \mathbb{C}$ continu.

We definiëren

$$\int_\alpha f = \int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t$$

als α glad is.

Als α stuksgewijs glad is integreren we over de gladde stukjes en tellen we de resultaten op.

De integraal

We hebben $f = u + \mathrm{i}v$ en we schrijven $\alpha(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$.

Als we $f(\alpha(t))\alpha'(t)$ uitschrijven komt er

$$\begin{aligned} f(\alpha(t))\alpha'(t) &= (u + \mathrm{i}v)(x' + \mathrm{i}y') \\ &= (u \cdot x' - v \cdot y') + \mathrm{i}(v \cdot x' + u \cdot y') \end{aligned}$$

Dus $\operatorname{Re} \int_\alpha f$ en $\operatorname{Im} \int_\alpha f$ zijn beide integralen van vectorvelden over de kromme α: van $\binom{u}{-v}$ en van $\binom{v}{u}$:

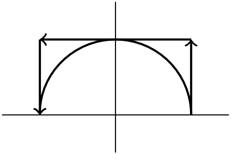
$$\int_\alpha f = \left(\int_\alpha u \, \mathrm{d}x - v \, \mathrm{d}y \right) + \mathrm{i} \left(\int_\alpha v \, \mathrm{d}x + u \, \mathrm{d}y \right)$$

Delft University of Technology

Voorbeeld

Twee krommen: $\alpha(t) = \exp(\mathrm{i}t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ en

$$\beta(t) = \begin{cases} 1 + t\mathrm{i} & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 2 - t + \mathrm{i} & 1 \leqslant t \leqslant 3 \\ -1 + (4 - t)\mathrm{i} & 3 \leqslant t \leqslant 4 \end{cases}$$



Wat zijn $\int_\alpha \overline{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$ en $\int_\beta \overline{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$?

Merk eerst op: $\overline{\exp(\mathrm{i}t)} = \exp(-\mathrm{i}t)$.
De integraal wordt dus

$$\int_0^\pi \exp(-\mathrm{i}t) \cdot \mathrm{i} \exp(\mathrm{i}t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \pi\mathrm{i}$$

Delft University of Technology

Drie losse stukjes:

$0 \leqslant t \leqslant 1$: $\int_0^1 (1 - t\mathrm{i})\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{i} + t\,\mathrm{d}t = \mathrm{i} + \frac{1}{2}$

$1 \leqslant t \leqslant 3$: $\int_1^3 (2 - t - \mathrm{i}) \cdot -1\,\mathrm{d}t = \int_1^3 t - 2 + \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = 4 - 4 + 2\mathrm{i} = 2\mathrm{i}$

$3 \leqslant t \leqslant 4$:
$\int_3^4 (-1 + (t - 4)\mathrm{i}) \cdot -\mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \int_3^4 (t - 4) + \mathrm{i}\,\mathrm{d}t = \frac{7}{2} - 4 + \mathrm{i} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}$

Totaal: $4\mathrm{i}$.

Booglengte

De *booglengte* van een gladde kromme $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ is, net als bij Analyse 2:

$$l(\alpha) = \int_a^b \left|\alpha'(t)\right| \mathrm{d}t$$

(en stuksgewijs glad: lengten van gladde stukjes optellen).

De lengte van het lijnstuk van $\boldsymbol{a}$ naar $\boldsymbol{b}$ is, natuurlijk, $|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}|$.

De lengte van ε_k is $2|k|\pi$.

Delft University of Technology

Een nuttige ongelijkheid ‘modulus maal lengte’

Stel $M \geqslant \bigl|f(z)\bigr|$ voor alle z in het beeld van α dan geldt

$$\left|\int_\alpha f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant M \cdot l(\alpha)$$

Delft University of Technology

Voorbeeld

Laat p en q polynomen zijn met graad $q \geqslant$ graad $p + 2$.
Dan geldt

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|\zeta|=R} \frac{p(\zeta)}{q(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Delft University of Technology

Voorbeeld

Schrijf $p(z) = a_n z^n + p_1(z)$ met graad $p_1 \leqslant n-1$, en $q(z) = b_m z^m + q_1(z)$ met graad $q_1 \leqslant m-1$ (en dus $m \geqslant n+2$).

Er geldt $|p(z)| \leqslant |a_n z^n| + |p_1(z)|$; als $|z| = R$ dan hebben we dus

$$|p(z)| \leqslant |a_n| R^n + |p_1(z)| = R^n \bigl(|a_n| + |p_1(z)| R^{-n}\bigr)$$

Evenzo: $|q(z)| \geqslant \bigl||b_m z^m| - |q_1(z)|\bigr|$; als $|z| = R$ hebben we dus

$$|q(z)| \geqslant \bigl||b_m| R^m - |q_1(z)|\bigr| = R^m \bigl||b_m| - |q_1(z)| R^{-m}\bigr|$$

Voorbeeld

Alles bij elkaar, als $|z| = R$ dan

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leqslant \frac{R^n(|a_n| + |p_1(z)|R^{-n})}{R^m\bigl||b_m| - |q_1(z)|R^{-m}\bigr|} \leqslant \frac{1}{R^2}\frac{|a_n| + |p_1(z)|R^{-n}}{\bigl||b_m| - |q_1(z)|R^{-m}\bigr|}$$

Er is een R_0 zó dat voor $R \geqslant R_0$ geldt $|p_1(z)|R^{-n} \leqslant |a_n|$ en $|q_1(z)|R^{-m} \leqslant \frac{1}{2}|b_m|$ en dus

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leqslant \frac{1}{R^2}\frac{4|a_n|}{|b_m|}$$

.

Delft University of Technology

Voorbeeld

Voor $R \geqslant R_0$ geldt dus ook

$$\left|\oint_{|\zeta|=R} \frac{p(\zeta)}{q(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \frac{1}{R} \cdot \frac{8\pi|a_n|}{|b_m|}$$

En dit is genoeg om te bewijzen dat

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{|\zeta|=R} \frac{p(\zeta)}{q(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

TUDelft
Delft University of Technology

Met primitieven

Als f een primitieve, F, heeft dan volgt

$$\int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = F\bigl(\alpha(b)\bigr) - F\bigl(\alpha(a)\bigr)$$

in het bijzonder, als α *gesloten* is, dus als $\alpha(a) = \alpha(b)$, dan

$$\int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Delft University of Technology

Theorem II.2.4

Stelling

Stel $D \subseteq \mathbb{C}$ is een gebied en $f : D \to \mathbb{C}$ is continu.
Dan zijn equivalent

1. *de integraal van f langs een kromme in D hangt alleen van het begin- en eindpunt af*
2. *voor elke gesloten kromme α in D geldt $\int_\alpha f = 0$*
3. *f heeft een primitieve*

De stelling van Cauchy-Goursat

Stelling (II.2.5)

Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ open en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch.
Laat $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ een driehoek zijn die met zijn inwendige in D ligt.
Dan geldt

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Primitieven maken

Stelling

Laat D een gebied zijn en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch.
Zij $z_0 \in D$ en $r > 0$ met $U_r(z_0) \subseteq D$.
Dan heeft f een primitieve op $U_r(z_0)$.

Stelling (II.2.7)

Als D een stervormig gebied is dan heeft elke analytische functie $f : D \to \mathbb{C}$ een primitieve.
En dus geldt

$$\int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

voor elke analytische $f : D \to \mathbb{C}$ en elke gesloten kromme α in D

Delft University of Technology

De integraalformule van Cauchy

Stelling (II.3.2)

Zij D open in $\mathbb{C}$ en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch. Zij $z_0 \in D$ en neem $r > 0$ zó dat de gesloten schijf $\bar{U}_r(z_0)$ binnen D ligt. Dan geldt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

voor elke $z \in U_r(z_0)$. Hier: $\alpha(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Voorbeeld

Bereken

$$\oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \mathrm{d}z$$

Eitje! Want

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-2k}$$

en

$$\oint_{|z|=1} z^{n-2k} \, \mathrm{d}z = 0$$

tenzij $n - 2k = -1$.

Als n even is is de integraal dus gelijk aan 0.

Voorbeeld

Als n oneven is, zeg $n = 2m + 1$, dan geldt $n - 2k = -1$ als $k = m + 1$ en dan

$$\oint_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n \mathrm{d}z = \binom{2m+1}{m+1} \oint_{|z|=1} z^{-1} \, \mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \binom{2m+1}{m+1}$$

Wat krijgen we als we de integraal uitschrijven?

Parametrizering van de eenheidscirkel: $\varepsilon(t) = \exp(\mathrm{i}t)$, met $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Dan geldt $z + z^{-1} = 2\cos t$ en $\mathrm{d}z = i \exp(\mathrm{i}t) \, \mathrm{d}t$ en dus ...

Delft University of Technology

. . . krijgen we

$$\int_0^{2\pi} (2\cos t)^n \mathrm{i}(\cos t + \mathrm{i}\sin t)\,\mathrm{d}t$$

ofwel

$$\mathrm{i}\int_0^{2\pi} 2^n \cos^{n+1} t\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} 2^n \cos^n t \sin t\,\mathrm{d}t$$

Voorbeeld

Dus, als n *oneven* is dan geldt

$$\int_0^{2\pi} \cos^{n+1} t \, \mathrm{d}t = 2\pi \cdot 2^{-n} \binom{n+1}{\frac{1}{2}(n+1)}$$

Of, iets mooier misschien, als n *even* is, zeg $n = 2m$, dan

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2m} t \, \mathrm{d}t = 2\pi \cdot 2^{-(2m-1)} \binom{2m}{m}$$

Delft University of Technology

Differentieer de formule van Cauchy:

$$
\begin{aligned}
f'(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\alpha \frac{\partial}{\partial z}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta
\end{aligned}
$$

We hebben nagerekend dat dit mag.

Delft University of Technology

De algemene formule luidt:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

Of, andersom gelezen:

$$\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta = \frac{2\pi \mathrm{i}}{n!} f^{(n)}(z)$$

Voorbeeld

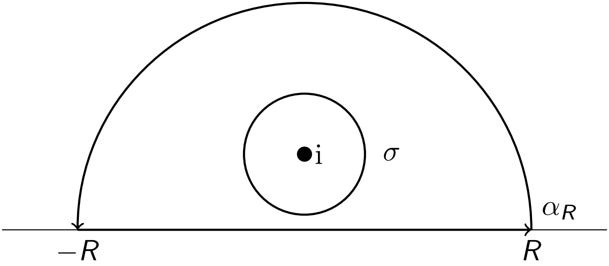
We berekenen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

We nemen $f(z) = (z^2+1)^{-2}$, die is analytisch op heel $\mathbb{C}$, behalve in i en $-\mathrm{i}$.

Delft University of Technology

We nemen, voor $R > 1$, de kromme α_R die bestaat uit het interval $[-R, R]$ en de boog van R naar $-R$ met straal R.



Er geldt: $\oint_{\alpha_R} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \oint_\sigma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$ (plaatje op het bord).

Schrijf nu

$$f(z) = \frac{1}{(z-\mathrm{i})^2} \cdot \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}$$

dan volgt

$$\oint_\sigma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}g'(\mathrm{i})$$

waarbij $g(z) = (z+\mathrm{i})^{-2}$. Maar $g'(z) = -2(z+\mathrm{i})^{-3}$ en dus

$$\oint_\sigma f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\frac{-2}{(2\mathrm{i})^3} = \frac{\pi}{2}$$

Voorbeeld

Dus

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\alpha_R} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \frac{\pi}{2}$$

Op de boog geldt $|z^2+1| \geqslant R^2-1$, en dus

$$\left|\oint_{\mathrm{boog}} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| \leqslant \frac{\pi R}{(R^2-1)^2}$$

Conclusie: ook geldt

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\alpha_R} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Delft University of Technology

Voorbeeld n

Op dezelfde manier kunnen we

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$$

doen.
Met $g(z) = (z+\mathrm{i})^{-n}$ krijgen we

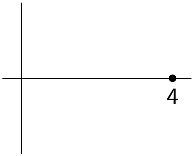
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{(n-1)!} g^{(n-1)}(\mathrm{i})$$

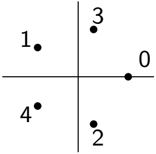
en $g^{(n-1)}(z) = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}(z+\mathrm{i})^{-(2n-1)}$.

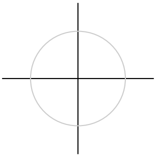
Werk zelf maar uit.

Delft University of Technology

In het algemeen: $a^b = \exp(b \ln|a| + \mathrm{i} b \operatorname{Arg} a + 2bk\pi\mathrm{i})$ met $k \in \mathbb{Z}$.
Netjes uitschrijven:
$2^2 = 4$ (één waarde);
$2^{\frac{2}{5}}$ heeft vijf waarden: $\exp(\frac{2}{5}\ln 2)\cdot\exp(\frac{4k}{5}\pi\mathrm{i})$ met $k = 0, 1, 2, 3, 4$;
$2^{\frac{1}{\pi}}$ heeft oneindig veel waarden: $\exp(\frac{1}{\pi}\ln 2)\cdot\exp(2k\mathrm{i})$ met $k \in \mathbb{Z}$.

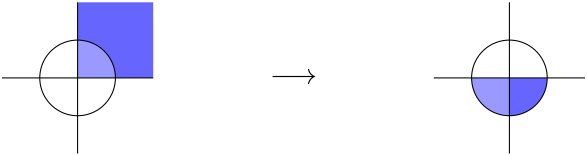






Huiswerk, opgave 2

Als x reëel is heeft $(x - \mathrm{i})/(x + \mathrm{i})$ modulus 1, dus Re-as naar eenheidscirkel.
Als $|z| = 1$ dan staan $z - \mathrm{i}$ en $z + \mathrm{i}$ loodrecht op elkaar, dus eenheidscirkel naar Im-as.
Als y reëel is dan is $(y\mathrm{i} - \mathrm{i})(y\mathrm{i} + \mathrm{i})$ reëel, dus Im-as naar Re-as.



$\cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \cosh y - \mathrm{i} \sin x \sinh y$, nu $|\cos(x + \mathrm{i}y)|$ netjes uitwerken.
Op α_k geldt: $|\zeta| \geqslant 2k\pi$, dus $|\zeta|^{-2} \leqslant (2k\pi)^{-2}$.
Als $x = \pm 2k\pi$ dan $\cos x = 1$, dus $|\cos(x + \mathrm{i}y)| \geqslant 1$.
Als $y = \pm 2k\pi$ dan $|\sinh y| \geqslant \sinh 2\pi$ en dat is groter dan 200, dus ook dan $|\cos(x + \mathrm{i}y)| \geqslant 1$.
De lengte van α_k is $16k\pi$.
Pas 'modulus maal lengte' toe.

$\oint_\alpha \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}$ (op college gedaan)
De functie $(z-2)^{-1}$ is op het stervormige gebied $\{z : \operatorname{Re} z < 2\}$ analytisch en α ligt binnen dat gebied, dus $\oint_\alpha \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z = 0$.
Na netjes uitwerken komt er

$$2\pi\mathrm{i} = \oint_\alpha \frac{1}{z} - \frac{1}{z-2}\,\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \frac{4-2\cos t}{5-4\cos t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \frac{2\sin t}{5-4\cos t}\,\mathrm{d}t$$