# TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.8, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 6 juni, 2016

# Outline



# Maximum-modulusprincipe

**Stelling (III.3.5)**

*Als $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch is ($D$ een gebied) en als $|f|$ een lokaal maximum heeft in $z_0 \in D$ dan is $f$ constant.*

Eerste bewijs: stel $f$ is niet constant en zij $z \in D$ willekeurig en zij $r > 0$.
Er is een $s > 0$ zó dat $U_s(f(z)) \subseteq f[U_r(z)]$.
Maar dan is $\bigl|f(z)\bigr|$ niet maximaal (plaatje op het bord).

# Maximum-modulusprincipe

Tweede bewijs: herinner de gemiddelde-waardestelling:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t$$

Stel $\bigl|f(z)\bigr|$ is maximaal op $U_s(z)$.
Voor $r < s$ geldt

$$\bigl|f(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bigl|f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\bigr|\,\mathrm{d}t \leqslant \bigl|f(z)\bigr|$$

Maar dan $\bigl|f(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\bigr| = \bigl|f(z)\bigr|$ voor alle $t$ en alle $r$.

# Maximum-modulusprincipe

Dus $|f|$, en dus $f$ zelf, is constant op $U_s(z)$ en dus op heel $D$.

Geval 1: $f(z) = 0$, klaar.

Geval 2: $f(z) \neq 0$.
Dan is $\operatorname{Re} \log f$ constant op een $U_r(z)$.
Cauchy-Riemann: $\log f$ is constant op $U_r(z)$.

# Minimum-modulusprincipe

## Stelling (III.3.6)

*Laat $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch zijn ($D$ een gebied) en niet constant. Als $|f|$ een lokaal minximum heeft in $z_0 \in D$ dan geldt $f(z_0) = 0$.*

Bewijs: stel $\left|f(z_0)\right|$ is het minumum op $U_r(z_0)$ en neem $s > 0$ met $U_s(f(z_0)) \subseteq f[U_r(0)]$.
Neem aan $f(z_0) \neq 0$.
Kies $t \in (0,1)$ zó dat $tf(z_0) \in U_s(f(z_0))$ en $w \in U_r(z_0)$ met $f(w) = tf(z_0)$; dan geldt $\left|f(w)\right| < \left|f(z_0)\right|$.

# Minimum-modulusprincipe

Nog een keer: de hoofdstelling van de Algebra.

**Stelling**

*Zij $p$ een niet-constant complex polynoom.*
*Dan heeft $p(z) = 0$ een oplossing in $\mathbb{C}$.*

Het zwaartepunt van het bewijs van 19 mei was het laten zien dat $|p(z)|$ een globaal minimum heeft op $\mathbb{C}$.

Minimum-modulusprincipe: dat minimum levert ons een nulpunt.

# Lemma van Schwarz

We bekijken de eenheidsschijf: $\mathbb{E} = \{z : |z| < 1\}$.

## Stelling

*Stel $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ is analytisch en $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant 1$ voor alle $z$. Neem ook aan dat $f(0) = 0$.*
*Dan geldt $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant |z|$ voor alle $z$, en ook $\bigl|f'(0)\bigr| \leqslant 1$.*

Bewijs: definieer

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

Dan heeft $g$ een primitieve op $\mathbb{E}$ en is dus analytisch op $\mathbb{E}$.

# Lemma van Schwarz: bewijs

Nu: als $0 < r < 1$ dan geldt, op de cirkel $|z| = r$, de ongelijkheid $\bigl|g(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{r}$.

De gesloten schijf $\bar{U}_r(0)$ is compact, dus $|g|$ neemt daar een maximum aan; volgens het maximum-modulusprincipe moet dat op de rand gebeuren.

Dus op heel $\bar{U}_r(0)$ geldt $\bigl|g(z)\bigr| \leqslant \frac{1}{r}$.

Neem de limiet voor $r \to 1$: er geldt $\bigl|g(z)\bigr| \leqslant 1$ op $\mathbb{E}$.

Klaar!

# Lemma van Schwarz, extra

Stel nu dat er een punt $a \in \mathbb{E}$, ongelijk aan 0, is met $\bigl|f(a)\bigr| = |a|$.

Dan heeft $|g|$ in $a$ een lokaal maximum.

En dus is $g$ constant met waarde $\zeta$, met $|\zeta| = 1$.

Conclusie: òf $\bigl|f(z)\bigr| < |z|$ als $z \neq 0$,
òf er is een $\zeta$ met $|\zeta| = 1$ zó dat $f(z) = \zeta z$ (dus $f$ is een rotatie).

Idem voor $f'(0)$: als $\bigl|f'(0)\bigr| = 1$ dan is $f$ een rotatie.

# Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

Stel $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ is analytisch en bijectief met $\varphi(0) = 0$.

Dan geldt $\bigl|\varphi(z)\bigr| \leqslant |z|$ voor alle $z$.

Dan geldt ook: $|\varphi^{-1}(z)| \leqslant |z|$, ofwel $|z| \leqslant \bigl|\varphi(z)\bigr|$, voor alle $z$.

Conclusie: $\varphi$ is een rotatie.

Reëel: elke macht $x^a$ ($a > 0$) is een analytische bijectie van $(0, 1)$ naar $(0, 1)$.

# Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

Terug in de tijd (23 mei): Opgave I.1.11.

Neem $a \in \mathbb{E}$
Dan geldt

$$|z| = 1 \text{ dan en slechts dan als } \left|\frac{z-a}{z\bar{a}-1}\right| = 1$$

en

$$|z| < 1 \text{ dan en slechts dan als } \left|\frac{z-a}{z\bar{a}-1}\right| < 1$$

# Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

De afbeelding $\varphi_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, gedefinieerd door

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}$$

is analytisch, zijn eigen inverse ($\varphi_a^{-1} = \varphi_a$, reken maar na), en voldoet aan $\varphi_a(0) = a$ en $\varphi_a(a) = 0$.

# Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

## Stelling (III.3.10)

*Stel* $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *is bijectief en analytisch. Dan zijn er* $a \in \mathbb{E}$ *en* $t \in [0, 2\pi)$ *zó dat*

$$\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}$$

Bewijs: neem $a = \varphi^{-1}(0)$ en bekijk $\psi = \varphi \circ \varphi_a$.
$\psi$ is analytisch en bijectief, en $\psi(0) = 0$.

# Singulariteiten

Functies als $\sin z$, $\exp z$, polynomen, ... zijn gedefinieerd en analytisch op heel $\mathbb{C}$.

Functies als $\frac{1}{z}$, $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1-\cos z}{z^5}$, $\exp \frac{1}{z}$, $\frac{1}{1+z^2}$, $\operatorname{Log} z$, ... zijn niet op heel $\mathbb{C}$ gedefinieerd maar wel analytisch overal waar ze gedefinieerd zijn.

Verschil tussen $\frac{1}{1+z^2}$ en $\operatorname{Log} z$: de eerste is in een paar losse punten, $\mathrm{i}$ en $-\mathrm{i}$, niet gedefinieerd; $\operatorname{Log} z$ mist de hele negatieve reële as in zijn domein.

# Singulariteiten

Notatie uit het boek: $\overset{\bullet}{U}(a)$ staat voor $U_r(a)$ minus het punt $a$, dus

$$\overset{\bullet}{U}(a) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < r\}$$

Lelijk he?

Ik gebruik liever $U_r'(a)$.

# Singulariteiten

Neem aan $f : D \to \mathbb{C}$ is analytisch.
We noemen $a$ een (geïsoleerde) *singulariteit* van $f$ als

- $a \notin D$, en
- er is een $r > 0$ zó dat $U'_r(a) \subseteq D$.

(NB $a$ is dus zeker een verdichtingspunt van $D$).

Er zijn drie soorten singulariteiten:

1. ophefbaar,
2. pool, en
3. essentieel

# Ophefbare singulariteiten

Een singulariteit, $a$, van $f$ is *ophefbaar* als $f$ alsnog analytisch te maken is in $a$.

Denk aan $\frac{\sin z}{z}$: voor $z \neq 0$ geldt

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n} + \cdots$$

Het rechterlid is overal analytisch, dus met de extra functiewaarde 1 in $z = 0$ is de functie analytisch gemaakt.

# Ophefbare singulariteiten

Formeel: een singulariteit, $a$ van $f : D \to \mathbb{C}$ is ophefbaar als er een analytische functie $\tilde{f} : D \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ is zó dat $f(z) = \tilde{f}(z)$ voor $z \in D$.

(We schrijven meestal gewoon weer $f$ in plaats van $\tilde{f}$.)

Als $\lim_{z\to a} f(z)$ bestaat dan is de singulariteit ophefbaar,
want de nieuwe functie is dan analytisch op $U_r'(a)$ en continu in $a$ en heeft dus een primitieve op $U_r(0)$.

# Ophefbare singulariteiten

Het kan beter

**Stelling (Riemann)**

*Een singulariteit, $a$ van $f : D \to \mathbb{C}$ is ophefbaar dan en slechts dan als er een $r > 0$ is zó dat $f$ begrensd is op $U'_r(a)$ (en $U'_r(a) \subseteq D$ natuurlijk).*

Bewijs: definieer $h$ op $D \cup \{a\}$ door $h(z) = (z - a)f(z)$ en $h(a) = 0$.
Dan is $h$ analytisch op $D$ en continu in $a$, en dus analytisch op $D \cup \{r\}$.

# Ophefbare singulariteiten

Maak de machtreeks van $h$ rond $a$:

$$h(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + \cdots$$

maar $h(a) = 0$ dus $a_0 = 0$ en dus

$$f(z) = a_1 + a_2(z-a) + a_3(z-a)^2 + \cdots$$

als $z \neq a$, en dus $\lim_{z\to a} f(z) = a_1$.

# Polen

Als $a$ een niet-ophefbare singulariteit van $f$ is dan zijn er twee mogelijkheden

- er is een $k \in \mathbb{N}$ zó dat $a$ een ophefbare singulariteit van $(z-a)^k f(z)$ is, en
- er is niet zo'n $k$

In het eerste geval noemen we $a$ een *pool* van $f$; de kleinste $k$ heet *de orde van de pool*.

In het tweede geval noemen we $a$ een *essentiële singulariteit* van $f$

# Polen

Nu zien we: als $a$ een niet-essentiële singulariteit van $f$ is dan is er een $m \in \mathbb{Z}$ zó dat $a$ een ophefbare singulariteit van $(z-a)^m f(z)$ is.

Als $f$ niet constant 0 is dan is er precies één $k$ zó dat

$$\lim_{z \to a} (z-a)^k f(z)$$

bestaat en *ongelijk aan* 0 is.

Dat kun je afleiden uit de machtreeks van $(z-a)^m f(z)$.

We noteren $\operatorname{ord}(f;a) = -k$ (de orde van $f$ in $a$).

# Polen

Voorbeelden, telkens $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ en $a = 0$.

$f(z) = 1 - \cos z$, $\operatorname{ord}(f,0) = 2$.

$f(z) = \frac{1-\exp z}{z^2}$, $\operatorname{ord}(f,0) = -1$.

$f(z) = \frac{1-\cos z}{z}$, $\operatorname{ord}(f,0) = 1$.

$f(z) = \frac{1-\exp z}{z^3}$, $\operatorname{ord}(f,0) = -2$.

# Polen

Om het simpel te houden: als $a$ een pool van $f$ is dat is $-\operatorname{ord}(f;a)$ de *orde van de pool*.

$\frac{\tan z}{z^3}$ heeft in 0 een pool van orde 2.

$\frac{\tan z}{z^2}$ heeft in $\frac{\pi}{2}$ een pool van orde 1.

# Polen

**Opmerking (III.4.7)**

Als $f : D \to \mathbb{C}$ een pool heeft in $a$ dan geldt

$$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$$

dus: voor elke $C$ is er een $\delta > 0$ zó dat voor alle $z \in U'_\delta(a)$ geldt $\bigl|f(z)\bigr| \geqslant C$.

Eitje: als $k$ de orde is dan $(z-a)^k f(z) = a_0 + a_1(z-a) + \cdots$; dicht genoeg bij $a$ geldt $\bigl|(z-a)^k f(z)\bigr| \geqslant \frac{1}{2}|a_0|$.

# Essentiële singulariteiten

Voorbeeld 0 is een essentiële singulariteit van $\sin\frac{1}{z}$.

Neem $r > 0$. De functie $z \mapsto \frac{1}{z}$ beeldt $U_r'(0)$ af op $\{z : |z| > r^{-1}\}$.

Neem $k \in \mathbb{N}$ met $2k\pi > r^{-1}$.
$\sin z$ beeldt de strook $\{z : 2k\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant (2k+1)\pi\}$ af op $\mathbb{C}$.

Dus $\sin\frac{1}{z}$ beeldt $U_r'(0)$ af op (heel) $\mathbb{C}$.

# Essentiële singulariteiten

Bijna hetzelfde verschijnsel:

Voor elke $r > 0$ beeldt $\exp \frac{1}{z}$ de verzameling $U'_r(0)$ af op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

In beide gevallen is 0 dus geen ophefbare singulariteit, en ook geen pool.

# Essentiële singulariteiten

**Stelling (Casorati-Weierstraß)**

*Stel $a$ is een essentiële singulariteit van $f : D \to \mathbb{C}$.*
*Dan geldt: voor elke $r > 0$ ligt de beeldverzameling $f[U_r'(a)]$ dicht in $\mathbb{C}$.*
*Dus: voor elke $r > 0$, voor elke $b \in \mathbb{C}$, voor elke $\varepsilon > 0$ is er een $z \in U_r'(a)$ met $\bigl|f(z) - b\bigr| < \varepsilon$.*

# Essentiële singulariteiten

Bewijs: stel niet.

Neem dus $r > 0$, $b \in \mathbb{C}$, en $\varepsilon > 0$ met $\bigl|f(z) - b\bigr| \geqslant \varepsilon$ voor *alle* $z \in U'_r(0)$.

Dus de functie

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

is begrensd op $U'_r(a)$.
Dus $a$ is een ophefbare singulariteit van $g$, en dus een ophefbare singulariteit, of een pool, van $f$.

# Essentiële singulariteiten

Nog mooier

**Stelling (Grote stelling van Picard)**

*Stel $a$ is een essentiële singulariteit van $f : D \to \mathbb{C}$.*
*Dan geldt: voor elke $r > 0$ is de beeldverzameling $f[U'_r(a)]$ gelijk aan $\mathbb{C}$, op misschien één punt na.*

Bij $\exp \frac{1}{z}$ hadden we heel $\mathbb{C}$ op het punt 0 na.

# Essentiële singulariteiten

Is er ook een 'kleine' stelling? Ja:

**Stelling (Kleine stelling van Picard)**

*Als $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch is en als $f[\mathbb{C}]$ twee punten van $\mathbb{C}$ mist dan is $f$ constant.*

# Opgaven

Nuttige opgevan: III.4: 4, 5, 6, 7, 8, 9
Verdiepende opgaven: III.4: 1, 2, 10