TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.9, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 13 juni, 2016

Outline

Elementair gebied

Herinnering: een gebied D is *elementair* als elke analytische $f : D \to \mathbb{C}$ een primitieve heeft, op heel D.

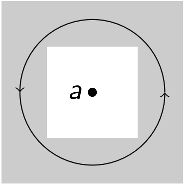
Equivalent: voor elke analytische functie f op D en elke gesloten kromme α in D geldt $\oint_\alpha f = 0$.

In het bijzonder: als $a \notin D$ en als α een gesloten kromme in D is dan

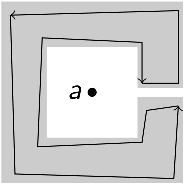
$$\oint_\alpha \frac{1}{\zeta - a} \, \mathrm{d}\zeta = 0$$

Delft University of Technology

Elementair gebied



Gebied D
Gesloten kromme α
Punt a buiten D
$\oint_\alpha \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}$



Gebied D
Gesloten kromme α
Punt a buiten D
$\oint_\alpha \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta = 0$

Definitie windgetal

Neem een gesloten kromme, α, in $\mathbb{C}$ en a niet op de kromme.

We noteren

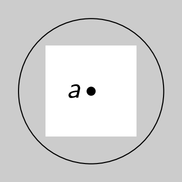
$$\chi(\alpha; a) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta$$

en we noemen $\chi(\alpha; a)$ het wind(ings)getal of de index van α ten opzichte van a.

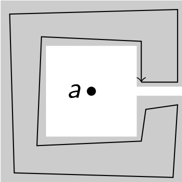
Delft University of Technology

Plaatje

Dus



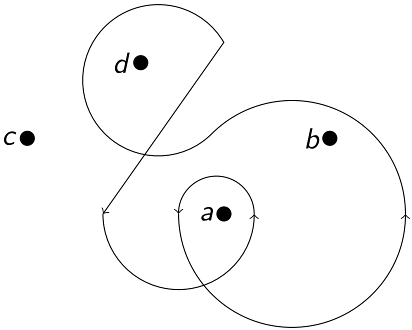
$$\chi(\alpha; a) = 1$$



$$\chi(\alpha; a) = 0$$

Intuïtie

Het windgetal, $\chi(\alpha; a)$, telt het aantal malen dat α om het punt a windt, in *positieve* richting.



$\chi(\alpha; a) = 2$; $\chi(\alpha; b) = 1$; $\chi(\alpha; c) = 0$; $\chi(\alpha; d) = -1$

De theorie

Het windgetal is altijd een geheel getal (Opgave III.6.2)

Stel α ligt binnen $\{z : |z| = R\}$; dan $\chi(\alpha; z) = 0$ als $|z| > R$.

Conclusie: $\operatorname{Int}\alpha = \{z : \chi(\alpha; z) \neq 0\}$ is begrensd.

De kromme α verdeelt $\operatorname{Int}\alpha$ in stukken waar de functie $z \mapsto \chi(\alpha; z)$ constant is.

Delft University of Technology

Definitie van Residu

Stel f is analytisch op (ten minste) $U_r'(a)$, zó dat a een singulariteit van f is.

Zij

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$$

de Laurentreeks van f.

We noemen de coëfficiënt a_{-1} het residu van f in a.

Notatie: $\operatorname{Res}(f; a)$.

Delft University of Technology

Waarom 'residu'?

Zij α een cirkel om a, met straal ρ (kleiner dan a). Dan

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\alpha a_n(\zeta - a)^n\,\mathrm{d}\zeta = a_{-1} = \mathrm{Res}(f; a)$$

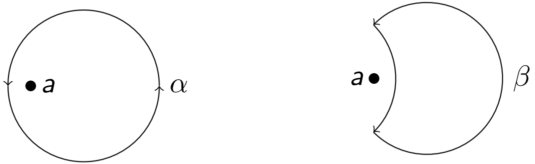
Dus

$$\mathrm{Res}(f; a) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

Delft University of Technology

Waarom 'residu'?

Bekijk twee krommen nabij a



Het verschil tussen $\oint_\alpha f$ en $\oint_\beta f$ (datgene wat overblijft) is dus

$$2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f;a)$$

De Residuenstelling

Stelling (III.6.3)

Zij D een elementair gebied, laat $z_1, \ldots, z_k$ eindig veel punten in D zijn (onderling verschillend).
Laat $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ analytisch zijn en α een stuksgewijs gladde gesloten kromme in $D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$.
Dan geldt

$$\oint_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}(f; z_i)\chi(\alpha; z_i)$$

Delft University of Technology

De Residuenstelling: bewijs

Eerst maar eens voor één punt z_1.

Neem de Laurentreeks van f rond z_1 en schrijf het hoofddeel op:

$$h(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_1)^n$$

de functie h is analytisch op heel $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$ (zie het bewijs).

De functie $g(z) = f(z) - h(z)$ is dan analytisch op $D \setminus \{z_1\}$; want z_1 is een *ophefbare* singulariteit van g.

De Residuenstelling: bewijs

Dus

$$\begin{aligned}\oint_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta &= \oint_\alpha g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta + \oint_\alpha h(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\ &= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \oint_\alpha a_{-n}(\zeta - z_1)^{-n}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \oint_\alpha \frac{a_{-1}}{\zeta - z_1}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f; z_1)\chi(\alpha; z_1)\end{aligned}$$

De Residuenstelling: bewijs

Algemeen: neem voor elke i het hoofddeel h_i van de Laurentreeks van f rond z_i.

Dan is $g = f - \sum_{i=1}^{k} h_i$ analytisch op heel D.

En dus

$$\begin{aligned}
\oint_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta &= \sum_{i=1}^{k} \oint_\alpha h_i(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{i=1}^{k} 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f; z_i)\chi(\alpha; z_i)
\end{aligned}$$

Delft University of Technology

Residuen berekenen

We hebben dus methoden nodig om residuen te berekenen.

Geval 0: f heeft in a een ophefbare singulariteit.

Dan hebben we niets aan a: $\mathrm{Res}(f; a) = 0$.

We bekijken dus ‘echte’ singulariteiten.

Delft University of Technology

Residuen berekenen

Als je de Laurentreeks eenvoudig op kunt schrijven, doen!

Als $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^5}$ dan $\operatorname{Res}(f, 0) = -\frac{1}{24}$ want de reeks is

$$\frac{1}{z^5}\left(\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4!}z^4 + \frac{1}{6!}z^6 + \cdots\right) = \frac{1}{2}z^{-3} - \frac{1}{24}z^{-1} + \frac{1}{720}z + \cdots$$

Delft University of Technology

Residuen berekenen

Geval 1: f heeft in a een pool van orde 1.

$$f(z) = a_{-1}(z-a)^{-1} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

dan geldt

$$Res(f;a) = a_{-1} = \lim_{z \to a}(z-a)f(z)$$

Bijvoorbeeld: $f(z) = (z^4+1)^{-1}$ en $a = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$.
Er geldt $z^4 + 1 = z^4 - a^4 = (z-a)(z^3 + az^2 + a^2z + a^3)$ en dus

$$\mathrm{Res}(f;a) = \lim_{z \to a}(z-a)f(z) = \lim_{z \to a} \frac{1}{z^3 + az^2 + a^2z + a^3} = \frac{1}{4a^3}$$

Residuen berekenen

Geval 1: f heeft in a een pool van orde 1.

Vaak is f een quotient g/h met $g(a) \neq 0$ en $h(a) = 0$ èn $h'(a) \neq 0$.

Bijvoorbeeld: $f(z) = \tan z = \sin z / \cos z$ en $a = \frac{\pi}{2}$.
Dan $\sin\ a = 1$ en $\cos a = 0$.
Dan geldt

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \sin a \lim_{z \to a} \frac{z-a}{\cos z - \cos a} = \sin a \cdot \frac{1}{-\sin a} = -1$$

Delft University of Technology

Residuen berekenen

Geval 1: f heeft in a een pool van orde 1.

Vaak is f een quotient g/h met $g(a) \neq 0$ en $h(a) = 0$ èn $h'(a) \neq 0$.

Algemene formule

$$\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = g(a)\lim_{z\to a}\frac{z-a}{h(z)-h(a)} = \frac{g(a)}{h'(a)}$$

De $(4a^3)^{-1}$ bij $(z^4+1)^{-1}$ was dus geen verrassing.

Residuen berekenen

Geval 2: f heeft in a een pool van orde 2.

Dus

$$f(z) = a_{-2}(z-a)^{-2} + a_{-1}(z-a)^{-1} + a_0 + \cdots$$

Dan $(z-a)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z-a) + a_0(z-a)^2 + \cdots$

Dus $\operatorname{Res}(f;a) = a_{-1} = g'(a)$, waarbij $g(z) = (z-a)^2 f(z)$.

Beter: $\lim_{z\to a} g'(z)$.

Residuen berekenen

Geval 2: f heeft in a een pool van orde 2.

Bijvoorbeeld: $f(z) = (z^4+1)^{-2}$ en $a = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{i}$.
Er geldt $z^4 + 1 = z^4 - a^4 = (z-a)(z^3 + az^2 + a^2z + a^3)$ en dus $(z-a)^2 f(z) = (z^3 + az^2 + a^2z + a^3)^{-2}$ met afgeleide $-2(z^3 + az^2 + a^2z + a^3)^{-3}(3z^2 + 2az + a^2)$ en dus

$$\operatorname{Res}(f; a) = -2\frac{6a^2}{(4a^3)^3} = -\frac{12}{64}a^{-7} = -\frac{3}{16}a$$

Delft University of Technology

Residuen berekenen

Voorbeeld: $f(z) = \tan^2 z$ en $a = \frac{\pi}{2}$.

Bekijk $g(z) = (z-a)^2 \tan^2 z$.

Dan $g'(z) = 2(z-a)\tan^2 z + (z-a)^2 \cdot 2\tan z(1 + \tan^2 z)$

En nu

$$\lim_{z \to a} 2(z-a)\tan^2 z + (z-a)^2 \cdot 2\tan z(1 + \tan^2 z)$$

berekenen.

Antwoord: $\operatorname{Res}(f; a) = 0$. (met de hand, Maple kan hem niet)

Residuen berekenen

Voorbeeld: $f(z) = \tan^2 z$ en $a = \frac{\pi}{2}$.

Iets eenvoudiger, bepaal eerst de Laurentreeks van $\tan z$:

$$\tan z = -(z-a)^{-1} + \frac{1}{3}(z-a) + \cdots$$

dan

$$f(z) = (z-a)^2 - \frac{2}{3} + \cdots$$

dus $\operatorname{Res}(f; a) = 0$.

Residuen berekenen

Geval k: f heeft in a een pool van orde k.

Neem dan $g(z) = (z-a)^k f(z)$; dan geldt

$$\operatorname{Res}(f;a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$$

of beter

$$\operatorname{Res}(f;a) = \lim_{z \to a} \frac{g^{(k-1)}(z)}{(k-1)!}$$

Residuen berekenen

Stel f heeft in a een singulariteit van orde k.

Dus: $f(z) = a_k(z-a)^k + a_{k+1}(z-a)^{k+1} + \cdots$ (met $a_k \neq 0$)

en $f'(z) = ka_k(z-a)^{k-1} + (k+1)a_{k+1}(z-a)^k + \cdots$

dan

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{ka_k + (k+1)a_{k+1}(z-a) + \cdots}{a_k + a_{k+1}(z-a) + \cdots}$$

conclusie

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}; a\right) = k = \operatorname{ord}(f; a)$$

Delft University of Technology

Definitie

Stel D is een elementair gebied en noteer $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Een functie $f : D \to \bar{\mathbb{C}}$ is *meromorf* als

- de verzameling $S(f) = \{z : f(z) = \infty\}$ is discreet in D
- de beperking, f_0, van f tot $D \setminus S(f)$ is analytisch
- de punten van $S(f)$ zijn de polen van f_0

De tangens is meromorf op $\mathbb{C}$;
Quotiënten van analytische functies zijn meromorf
(en *alle* meromorfe functies zijn zulke quotiënten)

Nulpunten en polen tellen

Stel $f : D \to \bar{\mathbb{C}}$ is meromorf, met eindig veel nulpunten $a_1, \ldots, a_n$, en polen $b_1, \ldots, b_k$.
Zij α een stuksgewijs gladde gesloten kromme waar de a_i en b_j niet op liggen.
Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, \mathrm{d}\zeta = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{ord}(f; a_i)\chi(\alpha, a_i) + \sum_{j=1}^{m} \operatorname{ord}(f; b_j)\chi(\alpha, b_j)$$

Als α een éénmaal doorlopen cirkel is dan staat daar het aantal nulpunten minus het aantal polen binnen de cirkel.

Stelling van Hurwitz

Stelling (II.7.2)

Stel de rij $\langle f_n \rangle_n$ analytische functies convergeert lokaal uniform naar een analytische functie f convergeert.
Als geen van de functies f_n een nulpunt in D heeft dan heeft f dat ook niet, tenzij f constant 0 is.

Het bewijs gebruikt dat f_n'/f_n lokaal uniform naar f'/f convergeert.
Als f een geïsoleerd nulpunt a heeft dan
$\oint_\alpha f'/f \neq 0$ op kleine cirkeltjes rond a,
maar $\oint_\alpha f_n'/f_n = 0$ voor alle n.

Stelling van Hurwitz

Gevolg: de limiet van een lokaal uniform convergente rij *injectieve* analytische functies is òf constant òf injectief.

Neem aan de limiet f is niet constant en zij $a \in D$.

Omdat $f_n(z) - f_n(a)$ lokaal uniform naar $f(z) - f(a)$ convergeert en voor geen n op $D \setminus \{a\}$ een nulpunt heeft,
heeft $f(z) - f(a)$ ook geen nulpunt op $D \setminus \{a\}$.

Delft University of Technology

Trigonometrische integralen

Bereken $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a-\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$, als $a > 1$.
We maken er een integraal over de eenheidscirkel van:
substitueer $\zeta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, dan $\mathrm{d}\zeta = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \mathrm{i}\zeta\,\mathrm{d}\theta$,
en $\cos\theta = \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})$
Onze integraal is gelijk aan:

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{1}{\bigl(a - \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})\bigr)^2} \frac{1}{\mathrm{i}\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{4}{\mathrm{i}} \oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta}{(\zeta^2 - 2a\zeta + 1)^2}\,\mathrm{d}\zeta$$

De singulariteiten van de integrand, $f(z)$, zijn de nulpunten van de noemer:
$\alpha = a - \sqrt{a^2-1}$ and $\beta = a + \sqrt{a^2-1}$.
Merk op: $0 < \alpha < 1 < \beta$, en dus ...

Trigonometrische integralen

...

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta}{(\zeta-\alpha)^2(\zeta-\beta)^2}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\alpha)$$

We hebben een pool van orde 2 in α, dus moeten we de afgeleide van

$$(\zeta-\alpha)^2 f(\zeta) = \frac{\zeta}{(\zeta-\beta)^2}$$

in α hebben:

$$\left(\frac{\zeta}{(\zeta-\beta)^2}\right)'\Bigg]_{\zeta=\alpha} = -\frac{\zeta+\beta}{(\zeta-\beta)^3}\Bigg]_{\zeta=\alpha} = -\frac{\alpha+\beta}{(\alpha-\beta)^3} = \frac{2a}{8(a^2-1)^{3/2}}$$

TU Delft
Delft University of Technology

Trigonometrische integralen

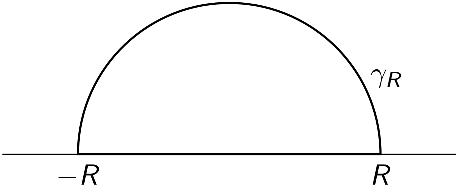
Alles bij elkaar harken: onze integraal is gelijk aan

$$\begin{aligned}\frac{4}{\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=1}\frac{\zeta}{(\zeta^2-2a\zeta+1)^2}\,\mathrm{d}\zeta &= \frac{4}{\mathrm{i}}\times 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f,\alpha)\\ &= 8\pi\frac{2a}{8(a^2-1)^{3/2}}\\ &= \frac{2a\pi}{(a^2-1)^{3/2}}\end{aligned}$$

Een rationale functie

Wat is de waarde van $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$?

Laat $R > 0$ en bekijk de volgende kromme Γ_R:



Hij bestaat uit $[-R, R]$ en de halve cirkel γ_R.

Een rationale functie

Laat $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$. We kunnen $\oint_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ op twee manieren bepalen:

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

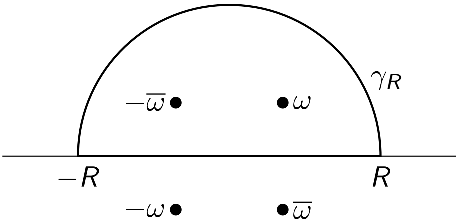
we kunnen ook de residuenstelling gebruiken.

De singulariteiten van f zijn de nulpunten van z^4+1, dat zijn ω, $-\omega$, $\overline{\omega}$ en $-\overline{\omega}$, met

$$\omega = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{2}.$$

Een rationale functie

Hier zijn ze:



Een rationale functie

We zien

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\bigl(\mathrm{Res}(f;\omega) + \mathrm{Res}(f;-\overline{\omega})\bigr)$$

We hebben polen van orde 1 dus we kunnen de afgeleide van de noemer gebruiken (het residu in ω hebben we net uitgerekend).

Een rationale functie

Dus

$$\operatorname{Res}(f;\omega) = \frac{1}{4\omega^3} = \frac{1}{4\mathrm{i}\omega} = \frac{1}{4\mathrm{i}}\overline{\omega}$$

en

$$\operatorname{Res}(f;-\overline{\omega}) = \frac{1}{4(-\overline{\omega})^3} = \frac{1}{4i\overline{\omega}} = \frac{1}{4\mathrm{i}}\omega$$

Een rationale functie

Dus, voor alle $R > 1$ hebben we

$$\oint_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}(\bar{\omega} + \omega) = \frac{\pi}{2}(\bar{\omega} + \omega) = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$$

Dus aan de ene kant

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\sqrt{2}$$

en aan de andere kant ...

Een rationale functie

… hebben we

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^4}\,\mathrm{d}z$$

want

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\pi R}{R^4-1}$$

zodat $\lim_{R\to\infty} \oint_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

Opgaven

Nuttige opgaven: III.6: 1, 6, 7, 9; III.7: 4, 9, 10, 11, 12, 14
Verdiepende opgaven: III.6: 2, 8, 10;

Delft University of Technology