TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.9, donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 16 juni, 2016

Outline

1 III.7 Applications of the Residue Theorem
- Nulpunten tellen
- Integralen uitrekenen

Nulpunten en polen

Stelling (III.7.4)

Stel α is een kromme die alle nulpunten en polen van de meromorfe functie f insluit, met index 1.
Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, \mathrm{d}\zeta = N(0) - N(\infty)$$

hierbij is $N(0)$ het aantal nulpunten van f en $\mathbb{N}(\infty)$ het aantal polen van f.

Delft University of Technology

Het argumentprincipe

Zij $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch en α een kromme in D waar geen nulpunt van f op ligt.
Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, \mathrm{d}\zeta = \chi(f \circ \alpha; 0)$$

In woorden: het aantal nulpunten van f binnen α is gelijk aan het aantal malen dat $f \circ \alpha$ om 0 draait.

Het argumentprincipe: bewijs

Er geldt

$$\begin{aligned}\chi(f\circ\alpha;0) &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{f\circ\alpha}\frac{1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_a^b\frac{1}{f(\alpha(t))}f'(\alpha(t))\alpha'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\alpha\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

Stelling van Rouché

Stelling

Zij D een elementair gebied en laat f en g analytisch zijn op D. Laat α een stuksgewijs gladde gesloten kromme in D zijn, zó dat

$$\bigl|g(\zeta)\bigr| < \bigl|f(\zeta)\bigr| \qquad (\zeta \text{ op } \alpha)$$

Dan geldt

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{(f+g)'(\zeta)}{(f+g)(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta$$

Delft University of Technology

Stelling van Rouché: bewijs

Merk op: op α liggen geen nulpunten van f en ook niet van $f+g$.

Definieer voor $s \in [0,1]$ de functie h_s door $h_s(\zeta) = f(\zeta) + s \cdot g(\zeta)$.

Geen enkele h_s heeft een nulpunt op α.

Dus, voor elke s is

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha \frac{h_s'(\zeta)}{h_s(\zeta)} \, \mathrm{d}\zeta$$

goed gedefinieerd.

Nog mooier ...

Delft University of Technology

Stelling van Rouché: bewijs

... de functie

$$I : s \mapsto \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{h_s'(\zeta)}{h_s(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta$$

is continu.

Als $s_n \to s$ dan $h_{s_n} \to h_s$ lokaal uniform, en dus ook $h'_{s_n} \to h'_s$ lokaal uniform.
En dan $h'_{s_n}/h_{s_n} \to h'_s/h_s$ uniform op α.

Maar I neem alleen gehele waarden aan, dus I is constant op $[0,1]$.

Stelling van Rouché: bewijs

Maar dan

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\alpha \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta = I(0) = I(1) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\alpha \frac{(f+g)'(\zeta)}{(f+g)(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta$$

Want $h_0 = f$ en $h_1 = f + g$.

Stelling van Rouché: andere formulering

Je ziet ook wel de eis

$$|f(\zeta)+g(\zeta)| < |f(\zeta)| + |g(\zeta)| \qquad (\zeta \text{ op } \alpha)$$

en de conclusie

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\alpha \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\alpha \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta$$

via $h_s = (1-s)\cdot f + s\cdot g$.

De gegeven eis impliceert dat $f(\zeta)/g(\zeta)$ nooit negatief is en dus dat h_s nooit nulpunten op α heeft.

Stelling van Rouché: gevolgen

In beide gevallen: als $\chi(\alpha; z)$ alleen de waarden 0 of 1 aanneemt dan hebben f en $f + g$ (eerste geval), of f en g (tweede geval) evenveel nulpunten binnen α.

Stelling van Rouché: voorbeelden

Bekijk $f(z) = z^8$ en $g(z) = 5z^7 - 20$.
Als $|z| = 6$ dan $|f(z)| = 6^8$ en $|g(z)| \leqslant 5 \cdot 6^7 + 20 < 6^8$.

Dus z^8 en $z^8 + 5z^7 - 20$ hebben evenveel nulpunten binnen de cirkel met straal 6 om 0 en dat aantal is acht.

Delft University of Technology

Een formule voor de inverse

Stel je weet dat f één enkelvoudig nulpunt binnen een cirkel α heeft.
Dat nulpunt is gelijk aan

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, \mathrm{d}\zeta$$

Noem dat nulpunt even a; vermenigvuldig de Laurentreeks van f rond a met ζ en integreer, alleen

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\alpha \frac{\zeta}{\zeta - a} \, \mathrm{d}\zeta$$

blijft over.

Delft University of Technology

Een formule voor de inverse

Algemeen: als f injectief is op $U_r(0)$ dan wordt de inverse gegeven door

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\alpha \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} \,\mathrm{d}\zeta$$

met α een geschikte cirkel om 0 is (straal dicht genoeg bij r).

De Errorintegraal: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Dit gaat een beetje met een omweg. Zij $a = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{\pi}e^{\frac{1}{4}\pi i}$.
Zij

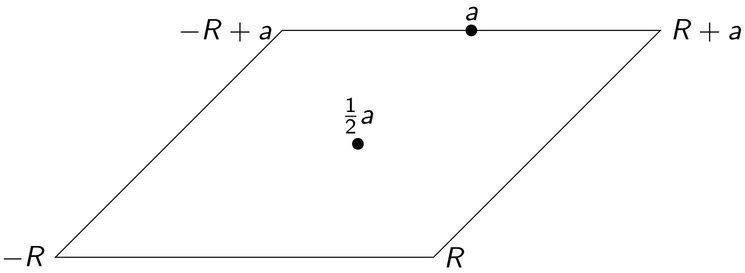
$$g(z) = \frac{e^{-z^2}}{1 + e^{-2az}}$$

Opmerkingen

- $a^2 = \pi i$
- dus $e^{-2a(z+a)} = e^{-2az}$, en
- $g(z) - g(z+a) = \frac{e^{-z^2} - e^{-(z+a)^2}}{1+e^{-2az}} = \frac{e^{-z^2}(1-e^{-2az}e^{-a^2})}{1+e^{-2az}} = e^{-z^2}$

Delft University of Technology

Een kromme en een pool



- Zij Γ_R het bovenstaande paralellogram.
- g heeft één singulariteit binnen Γ_R: in $\frac{1}{2}a$

Residu en integraal

We hebben een pool van orde 1 met als residu

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\frac12 a}(z-\frac12 a)g(z) &= e^{-\frac14 a^2}\lim_{z\to\frac12 a}\frac{z-\frac12 a}{1+e^{-2az}}\\ &= \frac{e^{-\frac14 a^2}}{-2ae^{-a^2}} = \frac{e^{-\frac14\pi i}}{-2\sqrt{\pi}e^{\frac14\pi i}e^{-\pi i}}\\ &= -\frac{i}{2\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

Dus

$$\oint_{\Gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i\cdot -i}{2\sqrt{\pi}} = \sqrt{\pi}$$

Delft University of Technology

Verdeel de integraal in stukken

- Onderkant: $\int_{-R}^{R} g(x)\,\mathrm{d}x$
- Bovenkant: $\int_{R}^{-R} g(x+a)\,\mathrm{d}x$
- Samen: $\int_{-R}^{R} g(x) - g(x+a)\,\mathrm{d}x = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Dus, als $R \to \infty$ dan geven deze twee ons $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

Delft University of Technology

De zijkanten

Aan de rechterkant $z = R + at$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, en dus

- $z^2 = R^2 + \sqrt{2\pi}Rt + (\pi t^2 + \sqrt{2\pi}Rt)i$, en

$$|e^{-z^2}| = e^{-R^2-\sqrt{2\pi}Rt} \leqslant e^{-R^2}$$

- $2az = 2aR + 2a^2t = \sqrt{2\pi}R + (\sqrt{2\pi}R + 2\pi t)i$, en

$$|e^{-2az}| = e^{-\sqrt{2\pi}R}$$

Samen geeft dat

$$\left|\frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}\right| \leqslant \frac{e^{-R^2}}{1-e^{-\sqrt{2\pi}R}}$$

TUDelft Delft University of Technology

De zijkanten

Aan de linkerkant $z = -R + at$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, dus

- $z^2 = R^2 - \sqrt{2\pi}Rt + (\pi t^2 - \sqrt{2\pi}Rt)i$, en

$$\left|e^{-z^2}\right| = e^{-R^2+\sqrt{2\pi}Rt} \leqslant e^{-R^2+\sqrt{2\pi}R}$$

- $2az = -2aR + 2a^2t = -\sqrt{2\pi}R + (-\sqrt{2\pi}R + 2\pi t)i$, hence

$$\left|e^{-2az}\right| = e^{\sqrt{2\pi}R}$$

Samen nemen

$$\left|\frac{e^{-z^2}}{1+e^{-2az}}\right| \leqslant \frac{e^{-R^2+\sqrt{2\pi}R}}{e^{\sqrt{2\pi}R}-1} = \frac{e^{-R^2}}{1-e^{-\sqrt{2\pi}R}}$$

Delft University of Technology

The sides

Dus aan elke kant, zeg γ_R, hebben we

$$\left|\int_{\gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{e^{-R^2}}{1-e^{-\sqrt{2\pi}R}} \cdot \sqrt{\pi}$$

En dus $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Klaar! Want we hadden

$$\oint_{\Gamma_R} g(z)\,\mathrm{d}z = \sqrt{\pi}$$

voor alle R

Integreren rond een vertakkingspunt

We berekenen $\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ $(0 < |a| < 1,\ a$ reëel).

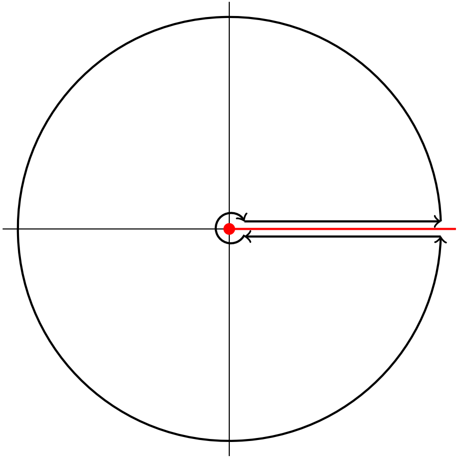
We moeten (waarschijnlijk) de (complexe) functie $f(z) = \frac{z^a}{1+z^2}$ hebben
maar welke tak?

We snijden de positieve reële as weg
en definiëren een tak van z^a door $\exp(a \log z)$,
waarbij $\log z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z$ met $0 < \arg z < 2\pi$.

Dus $z^a = |z|^a \cdot e^{\mathrm{i} a \arg z}$.

Welke kromme? Iets met de positieve reële as ...

De kromme



De kromme $\Gamma_{\varepsilon,R}$ bestaat uit

Interval $[\varepsilon, R]$

Cirkel met straal R (positief)

Interval $[\varepsilon, R]$ (andersom)

Cirkel met straal ε (negatief)

Dit is niet geheel correct, straks verbetering

Singulariteiten en residuen

De functie $f(z)$ heeft twee singulariteiten binnen $\Gamma_{\varepsilon,R}$:
i en $-\mathrm{i}$ (polen van orde 1), als $\varepsilon < 1 < R$.

Residuen:

$$\operatorname{Res}(f,\mathrm{i}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{i}^a = \frac{1}{2\mathrm{i}}e^{\frac{1}{2}a\pi\mathrm{i}}$$

en

$$\operatorname{Res}(f,-\mathrm{i}) = \frac{1}{-2\mathrm{i}}(-\mathrm{i})^a = -\frac{1}{2\mathrm{i}}e^{\frac{3}{2}a\pi\mathrm{i}}$$

Dus

$$\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = \pi\left(e^{\frac{1}{2}a\pi\mathrm{i}} - e^{\frac{3}{2}a\pi\mathrm{i}}\right)$$

De integraal in delen

We verdelen de integraal in

- $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\oint_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\displaystyle\int_{R}^{\varepsilon} \frac{x^a e^{2a\pi\mathrm{i}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -e^{2a\pi\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{x^a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\oint_{|z|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z$

Afschatten

De grote cirkel:

$$\left|\oint_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi R \frac{R^a}{R^2 - 1}$$

en $1 + a < 2$, dus het rechterlid convergeert naar 0 als $R \to \infty$

De kleine cirkel:

$$\left|\oint_{|z|=\varepsilon} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 2\pi\varepsilon \frac{\varepsilon^a}{1 - \varepsilon^2}$$

en $1 + a > 0$ dus het rechterlid convergeert naar 0 als $\varepsilon \to 0$

Alles samennemen

Na limiet nemen,voor $R \to \infty$ en $\varepsilon \to 0$, krijgen we

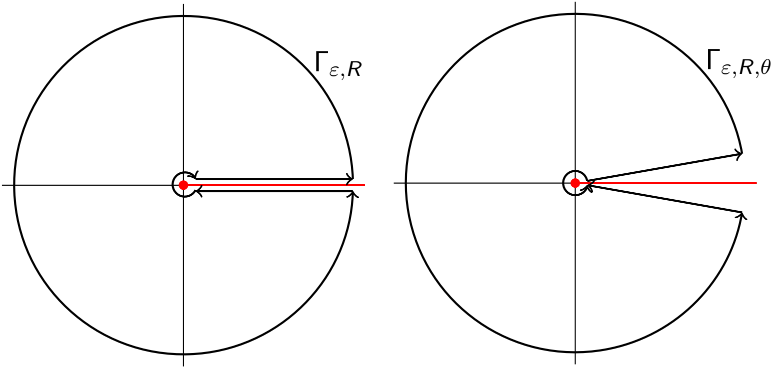
$$(1 - e^{2a\pi\mathrm{i}}) \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi(e^{\frac{1}{2}a\pi\mathrm{i}} - e^{\frac{3}{2}a\pi\mathrm{i}})$$

en dus

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\frac{e^{\frac{1}{2}a\pi\mathrm{i}}(1 - e^{a\pi\mathrm{i}})}{1 - e^{2a\pi\mathrm{i}}} = \frac{\pi}{2\cos\frac{1}{2}a\pi}$$

(ga maar na . . .)

De kromme nogmaals



$$\oint_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{\theta\to 0} \oint_{\Gamma_{\varepsilon,R,\theta}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

Delft University of Technology

Een vraag (http://www.wisfaq.nl/show3archive.asp?id=60954&j=2009)

WisFaq - digitale vraagbaak voor het wiskundeonderwijs - Mozilla Firefox

File Edit View History Bookmarks Tools Help

WisFaq - digitale vra...

www.wisfaq.nl/show3archivepad.asp?id=60954&j=2009

Search

Most Visited Getting Started math TUD words xword radio linux Google News

Afschatting - complex

printen

Ik heb volgende integraal:
$\int^{+\infty}{}_0$ dx / √x (x^2+1)

Sing punten in het bovenhalfvlak zijn: x=i (pool orde1) en x=0 (pool orde $^1/_2$).
Ik kan de integraal herschrijven:
$\int$ +f(z)dz = 2πi Res(f,i)=$\int^{-\epsilon}{}_{-R}$... + $\int_{\gamma_\epsilon}$... + $\int^{R}{}_{\epsilon}$...+ $\int_{\gamma_R}$

De tweede en vierde integraal (van rechterlid) gaan 0 (is te bewijzen via een afschatting, heb ik gedaan WAS oke.

Als ik nu mijn gevraagde integraal
wil gaan berekenen dan heb ik:

2πiRes(f,i) = π/√i = $\int^{0}{}_{-\infty}$ dx/√x (x^2+1) + $\int^{\infty}{}_0$ dx/√x (x^2+1)

Mijn probleem nu is: Hoe krijg ik nu de gevraagde integraal $\int^{+\infty}{}_0$ dx / √x (x^2+1)

dank alvast

AA
Student universiteit België - maandag 30 november 2009

jsMath

Laten we deze student helpen

Het gaat, kennelijk, om

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

(Die hebben we net gedaan $a=-\frac{1}{2}$.)

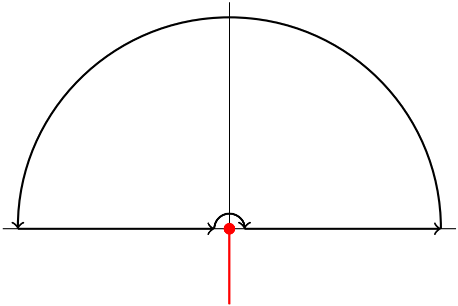
i is inderdaad een pool van orde 1, maar ...

... “0 is een pool van orde $\frac{1}{2}$”??

Delft University of Technology

Laten we deze student helpen

Hij gebruikt kennelijk een andere kromme $\Gamma_{\varepsilon,R}$:



De tak van de logaritme heeft $-\frac{1}{2}\pi < \arg z < \frac{3}{2}\pi$

Laten we deze student helpen

De integralen over de grote en kleine boog kon onze vriend naar nul praten.

Het residu in i:

$$\mathrm{Res}(f;\mathrm{i}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{i}}\cdot 2\mathrm{i}}$$

dus de integraal is gelijk aan

$$\frac{\pi}{\sqrt{\mathrm{i}}}$$

en dat is natuurlijk gelijk aan

$$\pi e^{-\frac{1}{4}\pi\mathrm{i}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{\pi}{2}\sqrt{2}$$

TU Delft
Delft University of Technology

Laten we deze student helpen

Nu nog

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Wat is $\sqrt{x}$ voor $x < 0$?

Voor $x < 0$ geldt $\sqrt{x} = \sqrt{|x|\mathrm{i}} = \mathrm{i}\sqrt{-x}$

Nu substitutie "$x \to -x$" krijgen we

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Laten we deze student helpen

Eindresultaat

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

Doe

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

ook eens met behulp van deze kromme.

Eén van de beste van Euler

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Delft University of Technology

Een nuttige functie en een nuttige kromme

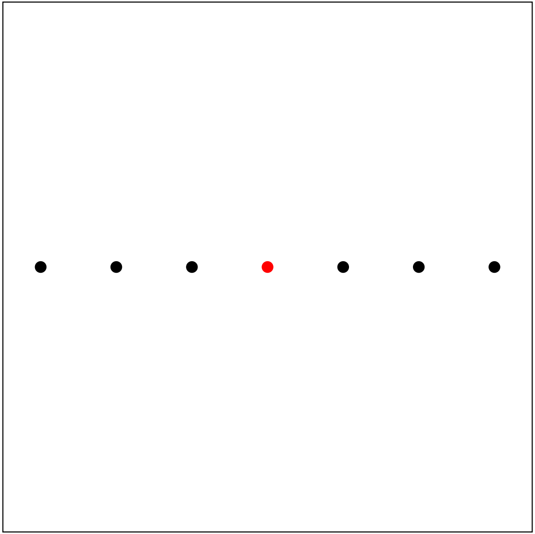
We gebruiken

$$f(z) = \frac{\pi}{z^2} \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$$

en grote vierkanten als krommen.

Γ_N is het vierkant met hoekpunten $(\pm 1 \pm i)(N + \frac{1}{2})$.

Hier is Γ_3



De kromme Γ_3

Pool van orde 3
in 0

Polen van orde 1
in alle andere
gehele getallen

Residuen

Makkelijke residuen in de n ongelijk aan 0:
Pool van orde 1, dus n invullen in

$$\frac{\pi}{z^2}\frac{\cos \pi z}{(\sin \pi z)'}$$

en dat geeft

$$\operatorname{Res}(f, n) = \frac{\pi}{n^2}\frac{\cos \pi n}{\pi \cos \pi n} = \frac{1}{n^2}$$

Residuen

We berekenen een paar termen van de Laurentreeks van $\frac{\cos z}{\sin z}$ via

$$(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots)(z - \frac{1}{6}z^3 + \cdots) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \cdots$$

of

$$a_{-1} + a_0 z + (a_1 - \frac{1}{6}a_{-1})z^2 + \cdots = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \cdots$$

dus: $a_{-1} = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_{-1} = -\frac{1}{3}$.

Delft University of Technology

Residuen

We vinden

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\pi}{z^2}\left(\frac{1}{\pi z} - \frac{1}{3}\pi z + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3}\frac{1}{z} + \cdots \end{aligned}$$

en dus

$$\operatorname{Res}(f,0) = -\frac{\pi^2}{3}$$

De integralen

Voor elke N geldt dus,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\Gamma_N} f(z)\,\mathrm{d}z = -\frac{1}{3}\pi^2 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$$

Nu laten we nog zien

$$\lim_{N\to\infty} \oint_{\Gamma_N} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Afschattingen

Lengte van Γ_N: $4 \times (2N+1) = 8N+4$.

Op Γ_N geldt $\frac{1}{|z|^2} \leqslant \frac{1}{N^2}$.

Herinner:

$|\cos z| = \sqrt{\sinh^2 y + \cos^2 x}$

en

$|\sin z| = \sqrt{\sinh^2 y + \sin^2 x}$

Delft University of Technology

Afschattingen

Als $x = \pm(N + \frac{1}{2})$ dan

$$|\operatorname{cotan} \pi z| = \frac{\sqrt{\sinh^2 \pi y}}{\sqrt{\sinh^2 \pi y + 1}} \leqslant 1$$

TU Delft
Delft University of Technology

Afschattingen

Als $y = \pm(N + \frac{1}{2})$ dan

$$\begin{aligned} |\operatorname{cotan} \pi z| &= \frac{\sqrt{\sinh^2 \pi(N + \frac{1}{2}) + \cos^2 \pi x}}{\sqrt{\sinh^2 \pi(N + \frac{1}{2}) + \sin^2 \pi x}} \\ &\leqslant \frac{\sqrt{\sinh^2 \pi(N + \frac{1}{2}) + 1}}{\sqrt{\sinh^2 \pi(N + \frac{1}{2})}} \\ &\leqslant 2 \end{aligned}$$

(als $N \geqslant 1$).

Afmaken

Alles bij elkaar:

$$\left|\oint_{\Gamma_N} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{(8N+4)\times\pi\times 2}{N^2}$$

en dat is genoeg om de limiet gelijk aan 0 te doen zijn.

Opgaven

Nuttige opgaven: III.7: 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16
Verdiepende opgaven: III.6: 2, 8, 10;

Delft University of Technology