TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.10, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 20 juni, 2016

Delft University of Technology

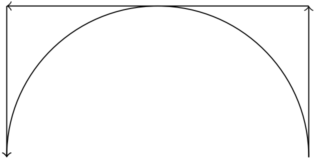
Outline

Som 1

Bereken

$$\int_\alpha \operatorname{Re}\zeta \, \mathrm{d}\zeta \qquad \text{en} \qquad \int_\beta \operatorname{Re}\zeta \, \mathrm{d}\zeta$$

waarbij α de halve cirkel is gegeven door $\alpha(t) = \exp(\mathrm{i}t)$ met $0 \leqslant t \leqslant \pi$, en β de vereniging van de drie lijnstukken $[1, 1+\mathrm{i}]$, $[1+\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}]$ en $[-1+\mathrm{i}, -1]$.



Som 1: uitwerking

Uitschrijven:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \,\mathrm{d}t &= \mathrm{i} \int_0^\pi \cos t(\cos t + \mathrm{i} \sin t) \,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{i} \int_0^\pi \cos^2 t + \mathrm{i} \sin t \cos t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\mathrm{i}\end{aligned}$$

De integraal over β gaat in drie stukken

1. $\int_{[1,1+\mathrm{i}]} \operatorname{Re} \zeta \,\mathrm{d}\zeta = \int_0^1 \operatorname{Re}(1 + \mathrm{i}t) \cdot \mathrm{i} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{i} \,\mathrm{d}t = \mathrm{i}$
2. $\int_{[1+\mathrm{i},-1+\mathrm{i}]} \operatorname{Re} \zeta \,\mathrm{d}\zeta = \int_0^2 \operatorname{Re}(1 - t + \mathrm{i}) \cdot -1 \,\mathrm{d}t = \int_0^2 t - 1 \,\mathrm{d}t = 0$
3. $\int_{[-1+\mathrm{i},-1]} \operatorname{Re} \zeta \,\mathrm{d}\zeta = \int_0^1 \operatorname{Re}(-1 + \mathrm{i} - \mathrm{i}t)) \cdot -\mathrm{i} \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{i} \,\mathrm{d}t = \mathrm{i}$

In totaal: $\int_\beta \operatorname{Re} \zeta \,\mathrm{d}\zeta = 2\mathrm{i}$.

TU Delft
Delft University of Technology

Som 2

Laat $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ een analytische functie zijn en neem aan dat er positieve constanten a en b zijn zó dat

$$\bigl|f(z)\bigr| \leqslant a + b\sqrt[3]{|z|}$$

voor alle $z \in \mathbb{C}$. Toon aan dat f constant is.

Delft University of Technology

Som 2: uitwerking

Neem $z \in \mathbb{C}$ willekeurig maar vast. Voor ζ op de cirkel om z met straal R geldt $|\zeta - z| = R$

$$\bigl|f(\zeta)\bigr| \leqslant a + b\sqrt[3]{|\zeta|} \leqslant a + b\sqrt[3]{|z| + R}$$

Pas de formule van Cauchy toe

$$\bigl|f'(z)\bigr| \leqslant \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \frac{a + b\sqrt[3]{|z| + R}}{R^2} = \frac{a + b\sqrt[3]{|z| + R}}{R}$$

dit geldt voor *alle* $R > 0$, en dus $f'(z) = 0$.
Dus $f'(z) = 0$ voor alle z; we zien dat f constant is.

Delft University of Technology

Som 3: uitwerking

- $\oint_\varepsilon \frac{1}{\zeta^2 \cos\zeta}\,\mathrm{d}\zeta = 0$ (afgeleide van $\cos^{-1} z$ in $z = 0$).
- gebruik de stelling over "analytisch op $U_r'(z_0)$ en continu in z_0"; de gegeven waarden maken g en h continu in a_k en b_k.
- pas de formule van Cauchy toe, we krijgen

$$2\pi\mathrm{i}\frac{g(a_k)}{a_k^2} = \frac{8\mathrm{i}}{(4k-1)^2\pi} \text{ en } 2\pi\mathrm{i}\frac{h(b_k)}{b_k^2} = -\frac{8\mathrm{i}}{(4k+1)^2\pi}$$

Delft University of Technology

Som 4

Bekijk de slides van 26 mei en vervang het plusteken door een minteken

Convergentie van functierijen

Voor de theorie van analytische functies is *lokale uniforme convergentie* de belangrijkste notie.

Een rij functies $\langle f_n \rangle_n$ van D naar $\mathbb{C}$ convergeert *lokaal uniform* op D naar een functie $f : D \to \mathbb{C}$ als

voor elke $z_0 \in D$ een $r > 0$ bestaat zó dat de rij $\langle f_n \rangle_n$ uniform naar f convergeert op $U_r(z_0) \cap D$.

Dus: voor elke $z_0 \in D$ bestaat een $r > 0$ zodanig dat voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geqslant N$ en alle $z \in U_r(z_0) \cap D$ geldt

$$\left| f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon$$

Delft University of Technology

Convergentie van functierijen

Twee belangrijke eigenschappen:

Als $\langle f_n \rangle_n$ *lokaal uniform* op een gebied D naar f convergeert convergeert de rij *uniform* op elke compacte deelverzameling van D.

Als $\langle f_n \rangle_n$ een *lokaal uniform* convergente rij analytische functies is op een gebied D dan is de limiet, f, ook analytisch.
En de rij afgeleiden convergeert lokaal uniform naar f'.

Convergentie van functiereeksen

Als $\langle f_n \rangle_n$ een rij functies is dan noemen we de (bijbehorende) reeks $\sum f_n$ *normaal convergent* (op D) als

voor elke $z_0 \in D$ een $r > 0$ en een rij $\langle M_n \rangle_n$ positieve reële getallen bestaan met

- $\left|f_n(z)\right| \leqslant M_n$ voor $z \in U_r(z_0) \cap D$, en
- $\sum M_n$ convergeert

(Dit is ietsje sterker dan lokaal uniforme convergentie.)

Opgave III.1.6

De reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - (2\nu+1)z + \nu(\nu+1)}$$

convergeert normaal op $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$.

Neem $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ en $r > 0$ zó dat $U_{2r}(z) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.
Heel expliciet: $r = \frac{1}{2} \min\{|z-\nu| : \nu \in \mathbb{N}\}$.

Opgave III.1.6

Neem $\nu \in \mathbb{N}$ vast en $w \in U_r(z)$, dan geldt $|w - \nu| > r$
(en natuurlijk ook $\bigl|w - (\nu + 1)\bigr| > r$).
Dus voor elke ν en elke $w \in U_r(z)$ geldt

$$\bigl|w^2 - (2\nu + 1)w + \nu(\nu + 1)\bigr| = \bigl|(w - \nu)(w - (\nu + 1))\bigr| > r^2$$

Opgave III.1.6

Ook geldt, voor elke ν en w

$$|\nu - w| \geqslant \bigl||\nu - z| - |z - w|\bigr|$$

Als $\nu > |z| + r$ dan $\bigl||\nu - z| - |z - w|\bigr| > \nu - |z| - r$.
Voor die ν geldt dan

$$\bigl|w^2 - (2\nu + 1)w + \nu(\nu + 1)\bigr| = \bigl|(w - \nu)(w - (\nu + 1))\bigr| > (\nu - |z| - r)^2$$

Opgave III.1.6

Voor $\nu > 2(|z| + r)$ geldt dus

$$\frac{1}{\left|w^2 - (2\nu + 1)w + \nu(\nu + 1)\right|} < \frac{1}{(\nu - |z| - r)^2} < \frac{4}{\nu^2}$$

op $U_r(z)$.

De reeks

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4}{\nu^2}$$

convergeert.

Opgave III.1.6

De som van de reeks?

Breuksplitsen:

$$\frac{1}{z^2-(2\nu+1)z+\nu(\nu+1)} = \frac{1}{z-\nu-1} - \frac{1}{z-\nu}$$

Partiële som

$$\sum_{\nu=1}^{N} \frac{1}{z^2-(2\nu+1)z+\nu(\nu+1)} = \frac{1}{z-N-1} - \frac{1}{z-1}$$

De som is dus $\frac{1}{1-z}$.

Normale convergentie van machtreeksen

De machtreeks $\sum a_n z^n$, met convergentiestraal r, is normaal convergent op $U_r(0)$.
Immers: de reeks is absoluut en uniform convergent op $U_\rho(0)$ voor elke $\rho < r$.

En nu zien we weer:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

is analytisch op $U_r(0)$ en

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Hoofdresultaat

Stelling (III.2.2)

Zij $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, zij $a \in D$ en zij R de afstand van a tot het complement van D (als $D = \mathbb{C}$ dan $R = \infty$).
Op de schijf $\{z : |z - a| < R\}$ geldt

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

met

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

waarbij $\alpha(t) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ voor een r met $0 < r < R$.

Opmerkingen

De coëfficiënten zijn onafhankelijk van de straal van α.

De machtreeks convergeert op de schijf $U_R(a)$.

De convergentiestraal is dus ten minste zo groot als R, de afstand van a tot het complement van D.

De convergentiestraal is gelijk aan de straal van de grootste schijf om a waarop de functie f nog analytisch (te maken) is.

Bijvoorbeeld: de machtreeks van $\arctan z$ rond 0 heeft straal 1, omdat i en $-\mathrm{i}$ vertakkingspunten zijn:

$\arctan z$ is analytisch op $\{z : |z| < 1\}$ maar op geen grotere schijf met 0 als middelpunt.

$\arctan z$

Herinner:

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)$$

We nemen Log en gebruiken

$$\mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$$

We vullen $\mathrm{i}z$ en $-\mathrm{i}z$ in en trekken de resultaten van elkaar af.

Mag dat zomaar?

Afbeelding

Als $|z| < 1$ dan liggen de drie getallen

$$\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}, \qquad 1+\mathrm{i}z, \qquad \text{en} \qquad 1-\mathrm{i}z$$

in het rechter-halfvlak: $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$. (Plaatje op het bord.)

In dat geval geldt

$$\operatorname{Log}\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} = \operatorname{Log}(1+\mathrm{i}z) - \operatorname{Log}(1-\mathrm{i}z)$$

want het verschil van de argumenten ligt in $(-\pi, \pi)$.

arctan z

Invullen:

$$\mathrm{Log}(1+iz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(iz)^n$$

$$\mathrm{Log}(1-iz) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(-iz)^n$$

de termen met *even* index zijn gelijk;
als n oneven is, zeg $n = 2k+1$, dan is de $n$de term van het verschil

$$\frac{(-1)^{2k+2}}{2k+1}(iz)^{2k+1} - \frac{(-1)^{2k+2}}{2k+1}(-iz)^{2k+1} = \frac{2i^{2k+1}}{2k+1}z^{2k+1}$$

Delft University of Technology

arctan z

Merk nu op dat $i^{2k+1} = (-1)^k i$, er staat dus

$$\frac{2i(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}$$

dus deze tak van $\arctan z$ is gelijk aan

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2i(-1)^k}{2k+1} z^{2k+1}$$

Conclusie

$$\arctan z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1} z^{2k+1}$$

$\arctan z$

We kunnen ook $\frac{1}{1+z^2}$ termsgewijs integreren:

$$
\begin{aligned}
\arctan z &= \int \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n z^{2n}\,\mathrm{d}z \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}
\end{aligned}
$$

Delft University of Technology

Uniciteit

Stelling (II.3.2)

Als D een gebied is en f en g twee analytische functies op D dan zijn equivalent

- $f = g$
- $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ *heeft een verdichtingspunt in D*
- *er is een punt z_0 in D met $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ voor alle n*

Delft University of Technology

Uniciteit

Conclusie: als $M \subseteq D$ een verdichtingspunt in D heeft en $f : M \to \mathbb{C}$ is een functie dan is er ten hoogste één analytische functie, $\bar{f}$, op D met $\bar{f}(z) = f(z)$ voor $z \in M$.

Speciaal geval (veelgebruikt): als D een gebied is met $D \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$
en als f en g analytisch zijn op D
en als $f(x) = g(x)$ voor $x \in D \cap \mathbb{R}$
dan geldt $f = g$.

Open-afbeeldingstelling

Stelling (III.3.3)

Als D een gebied is en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch en niet constant dan is $f[D]$ ook een gebied (dus open en samenhangend).

Tijdens het bewijs:
als $f(z) = a_n(z-a)^n + a_{n+1}(z-a)^{n+1} + \cdots$ met $n \geqslant 1$
dan is $f(z)$, nabij a, te schrijven als $h(z)^n$ met h een conforme afbeelding (injectief en analytisch)

Maximum-modulusprincipe

Stelling (III.3.5)

Als $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch is (D een gebied) en als $|f|$ een lokaal maximum heeft in $z_0 \in D$ dan is f constant.

Lemma van Schwarz

We bekijken de eenheidsschijf: $\mathbb{E} = \{z : |z| < 1\}$.

Stelling

Stel $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ is analytisch en $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant 1$ voor alle z. Neem ook aan dat $f(0) = 0$.
Dan geldt $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant |z|$ voor alle z, en ook $\bigl|f'(0)\bigr| \leqslant 1$.
Als er een $a \neq 0$ is met $|f(a)| = |a|$, of als $|f'(0)| = 1$, dan is er een $t \in [0, 2\pi]$ zó dat $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} z$ voor alle z.

Delft University of Technology

Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

Stel $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ is analytisch en bijectief met $\varphi(0) = 0$.

Dan geldt $\bigl|\varphi(z)\bigr| \leqslant |z|$ voor alle z.

Dan geldt ook: $|\varphi^{-1}(z)| \leqslant |z|$, ofwel $|z| \leqslant \bigl|\varphi(z)\bigr|$, voor alle z.

Conclusie: φ is een rotatie.

Delft University of Technology

Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

De afbeelding $\varphi_a : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$, gedefinieerd door

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}$$

is analytisch, zijn eigen inverse ($\varphi_a^{-1} = \varphi_a$, reken maar na), en voldoet aan $\varphi_a(0) = a$ en $\varphi_a(a) = 0$.

Afbeeldingen van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$

Stelling (III.3.10)

Stel $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ *is bijectief en analytisch. Dan zijn er* $a \in \mathbb{E}$ *en* $t \in [0, 2\pi)$ *zó dat*

$$\varphi(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}$$

Bewijs: neem $a = \varphi^{-1}(0)$ en bekijk $\psi = \varphi \circ \varphi_a$.
ψ is analytisch en bijectief, en $\psi(0) = 0$.

Opgave III.3.13

Stel $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ is analytisch en stel er zijn $a, b \in \mathbb{E}$ met $a \neq b$, $f(a) = a$ en $f(b) = b$.

Dan geldt $f(z) = z$ voor alle z.

Delft University of Technology

Opgave III.3.13, geval 1

Stel eerst dat $a = 0$.

Het Lemma van Schwarz geeft ons eerst dat $|f(z)| \leqslant |z|$ voor alle z.

En ook, omdat $|f(b)| = |b|$, een t is zó dat $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} z$ voor alle z.

Maar $f(b) = b$, en dus $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = 1$.

Delft University of Technology

Opgave III.3.13, geval 2

Nu het geval $a \neq 0$ (en ook $b \neq 0$).

Neem φ_a en definieer $h = \varphi_a \circ f \circ \varphi_a$.
Dan is ook h analytisch van $\mathbb{E}$ naar $\mathbb{E}$.

Er geldt $h(0) = 0$ want $\varphi_a(0) = a$, $f(a) = a$ en $\varphi_a(a) = 0$.

Er geldt $h(\varphi_a(b)) = \varphi_a(b)$, want $\varphi_a(\varphi_a(b)) = b$ en $f(b) = b$.

Conclusie $h(z) = z$ voor alle z, en dus $f(z) = z$ voor alle z.

Nog een voorbeeld

Stel $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ is analytisch, $f(0) = 0$ en $f'(0) = 0$.
Wat kunnen we nu over $|f(z)|$ zeggen?

Er geldt $|f(z)| \leqslant |z|^2$ voor alle z.

Als er een $a \neq 0$ is met $|f(a)| = |a|^2$ dan is er een $t \in [0, 2\pi)$ zó dat $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} z^2$ voor alle z.

Dit volgt ook door een h te nemen met $f(z) = h(z)^2$.

Delft University of Technology