wi2080

Maat- en Integratietheorie

dr. E. Coplakova en dr. K.P. Hart

Cursus 1999/2000

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Maatruimten

Het centrale begrip bij de abstracte integratie is dat van maatruimte. Een *maatruimte* bestaat uit drie dingen: een onderliggende verzameling, in het algemeen X geheten; een speciale familie deelverzamelingen van X, in het algemeen met $\mathcal{A}$ aangeduid en een functie μ met domein $\mathcal{A}$ en waarden in $[0, \infty]$. De functie μ zullen we een *maat* noemen en de elementen van $\mathcal{A}$ noemen we *meetbare verzamelingen*, de familie $\mathcal{A}$ moet een *σ-algebra* zijn.

Ringen van verzamelingen

σ-algebra's hebben twee aspecten, een eindig en een oneindig. We bekijken eerst het eindige aspect.

1.1. Definitie. Zij X een verzameling. Een niet-lege familie $\mathcal{R}$ van deelverzamelingen van X heet een *ring* (ook wel *ring op X*) als deze gesloten is onder het nemen van verschillen en verenigingen, met andere woorden als voor alle A en B in $\mathcal{R}$ geldt

$$A \setminus B \in \mathcal{R} \text{ en } A \cup B \in \mathcal{R}.$$

De eerste twee voorbeelden zijn heel belangrijk voor de constructie van de Lebesgue-maten op $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$.

1.2. Voorbeeld. We noemen een links-open en rechts-gesloten interval $(a, b]$ in $\mathbb{R}$ een *speld*. De familie $\mathcal{S}$ is gedefinieerd door: $A \in \mathcal{S}$ dan en slechts dan als A de vereniging van eindig veel spelden is. Het is niet zo moeilijk in te zien dat $A \in \mathcal{S}$ dan en slechts dan als A de vereniging is van eindig veel *paarsgewijs disjuncte* spelden. De familie $\mathcal{S}$ is een ring op $\mathbb{R}$.

1.3. Voorbeeld. Een deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ van de vorm $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ heet een *tegel*. Als in Voorbeeld 1.2 definiëren we een ring $\mathcal{T}$ op $\mathbb{R}^2$ door: $A \in \mathcal{T}$ dan en slechts dan als A een vereniging is van eindig veel tegels.

Het derde voorbeeld zullen we gebruiken om een onverwachte toepassing van de integratietheorie te geven.

1.4. Voorbeeld. De familie $\mathcal{F}_X$ van *eindige* deelverzamelingen van een verzameling X is altijd een ring.

Het laatste voorbeeld komt uit de theorie van de metrische ruimten.

1.5. Voorbeeld. Zij (X, d) een metrische ruimte en zij $\mathcal{C}(X) = \{C : C \text{ is open en gesloten in } X\}$. Dan is $\mathcal{C}(X)$ een ring met $X \in \mathcal{C}$; zo'n ring heet ook wel een *algebra*. Wat is $\mathcal{C}(\mathbb{R})$? Wat is $\mathcal{C}(\mathbb{N})$?

1.6. OPGAVE. Ga na dat $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$ voor elk tweetal verzamelingen A en B.

1.7. OPGAVEN.

1. Zij $\mathcal{R}$ een ring op X. Dan geldt:
   a) $\varnothing \in \mathcal{R}$,
   b) de vereniging van eindig veel elementen van $\mathcal{R}$ behoort weer tot $\mathcal{R}$, en
   c) de doorsnede van eindig veel elementen van $\mathcal{R}$ behoort weer tot $\mathcal{R}$.
2. Het *symmetrische verschil* $A \vartriangle B$ van twee verzamelingen A en B is gedefinieerd door
$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$
   Een niet-lege familie $\mathcal{R}$ van deelverzamelingen van X is een ring dan en slechts dan als voor alle $A, B \in \mathcal{R}$ geldt: (1) $A \vartriangle B \in \mathcal{R}$ en (2) $A \cap B \in \mathcal{R}$.

1.8. OPMERKING. Voor een deelverzameling A van X definiëren we de *karakteristieke functie van* A door
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in A, \text{ en} \\ 0 & \text{als } x \notin A. \end{cases}$$
Ga na dat $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$ en dat $\chi_{A \vartriangle B} = \chi_A + \chi_B$, waarbij het optellen modulo 2 gebeurt.

1.9. OPMERKING. In de algebra komt het begrip *ring* ook voor; een ring is dan een verzameling met daarop twee bewerkingen gedefinieerd: 'optellen' en 'vermenigvuldigen'. Een ring van verzamelingen is een algebraïsche ring als we 'symmetrisch verschil nemen' als optelling nemen en 'doorsnede nemen' als vermenigvulding. We verwijzen naar het college Algebra voor meer informatie.

σ-algebra's

Nu dan de volledige definitie van σ-algebra's.

1.10. DEFINITIE. Zij X een verzameling. Een *σ-algebra op X* is een ring $\mathcal{A}$ op X die voldoet aan

(i) $X \in \mathcal{A}$, en
(ii) als $\langle A_n \rangle_n$ een rij in $\mathcal{A}$ is dan $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Dus: een σ-algebra is een algebra (een ring waar X in zit) die gesloten is onder het nemen van aftelbare verenigingen.

De volgende opgave maakt het in veel gevallen wat makkelijker om te controleren dat een ring een σ-algebra is — zie bijvoorbeeld Lemma 3.7.

1.11. OPGAVE. Ga na dat een ring $\mathcal{A}$ een σ-algebra is dan en slechts dan als $X \in \mathcal{A}$ en als $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ voor elke *disjuncte* rij $\langle A_n \rangle_n$ in $\mathcal{A}$.

1.12. VOORBEELD. De familie 2^X van *alle* deelverzamelingen van X is een σ-algebra. De familie 2^X wordt wel de *machtsverzameling van* X genoemd.

1.13. OPGAVE. Een familie $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van X is een σ-algebra dan en slechts dan als aan de volgende drie voorwaarden is voldaan:

a) $X \in \mathcal{A}$,
b) als $A \in \mathcal{A}$ dan $X \setminus A \in \mathcal{A}$, en
c) als $\langle A_n \rangle_n$ een rij in $\mathcal{A}$ is dan $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

1.14. OPGAVE. Ga na dat in Opgave 1.13 voorwaarde c) vervangen kan worden door voorwaarde c'):
c') als $\langle A_n \rangle_n$ een rij in $\mathcal{A}$ is dan $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$.

1.15. OPGAVE. Zij X een willekeurige verzameling. Beschrijf de kleinst mogelijke σ-algebra op X.

* **1.16.** OPGAVE. Definieer $\mathcal{A}_a = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ is aftelbaar of } \mathbb{R} \setminus A \text{ is aftelbaar}\}$. Toon aan dat $\mathcal{A}_a$ een σ-algebra is. *Aanwijzing*: Dit gaat het makkelijkst via Opgave 1.13.

1.17. OPGAVE. Als $\mathcal{A}$ gesloten is onder aftelbare verenigingen en doorsneden, is $\mathcal{A}$ dan een σ-algebra?

We hebben nu twee voorbeelden van σ-algebra's gezien. Om meer (interessante) σ-algebra's te kunnen maken hebben we de volgende propositie nodig.

1.18. PROPOSITIE. *Zij X een verzameling en $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ een collectie σ-algebra's op X. Dan is ook $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ een σ-algebra.*

Met behulp van deze propositie kunnen we de volgende definitie maken.

1.19. DEFINITIE. Zij $\mathcal{E}$ een niet-lege familie deelverzamelingen van een verzameling X. Zij $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ de doorsnede van alle σ-algebra's die $\mathcal{E}$ omvatten; we noemen $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ de *σ-algebra voortgebracht door $\mathcal{E}$*.

1.20. OPGAVEN.

1. Zij $\mathcal{E}$ een niet-lege familie deelverzamelingen van X. Laat zien dat $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ de kleinste σ-algebra is met $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{E})$.
2. Zij $\mathcal{F}_\mathbb{N}$ de familie van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$; wat is $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_\mathbb{N})$?
3. Zij $\mathcal{F}_\mathbb{R}$ de familie van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Dan is $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_\mathbb{R})$ gelijk aan de σ-algebra $\mathcal{A}_a$ uit Opgave 1.16.

De σ-algebra's $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_\mathbb{N})$ en $\mathfrak{S}(\mathcal{F}_\mathbb{R})$ zijn eenvoudig te beschrijven; voor de meeste families $\mathcal{E}$ zit $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ heel wat ingewikkelder in elkaar. Een belangrijk voorbeeld van een familie $\mathcal{E}$ met een ingewikkelde $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ is de topologie van een metrische ruimte; de door die familie voortgebrachte σ-algebra heeft een speciale naam.

1.21. DEFINITIE. Zij (X, d) een metrische ruimte. De σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ voortgebracht door de topologie van X heet de *Borel-algebra van X*. De elementen van $\mathcal{B}(X)$ heten *Borel-verzamelingen.*

De σ-algebra $\mathcal{B}(X)$ bevat veel meer verzamelingen dan alleen de open verzamelingen: de gesloten verzamelingen behoren ook tot $\mathcal{B}(X)$. Als $\langle B_n \rangle_n$ een rij in $\mathcal{B}(X)$ is dan behoren $\bigcap_n B_n$ en $\bigcup_n B_n$ ook tot $\mathcal{B}(X)$. In het bijzonder behoort G tot $\mathcal{B}(X)$ als G te schrijven is als de doorsnede van een aftelbare familie open verzamelingen: zo'n verzameling werd in Hoofdstuk 3 van *Metrische topologie* een G_δ-verzameling genoemd. Evenzo is elke F_σ-verzameling een Borel-verzameling.

Hiermee zijn nog lang niet alle Borel-verzamelingen gevonden; we kunnen weer verenigingen van aftelbaar veel G_δ-verzamelingen nemen (we krijgen dan $G_{\delta\sigma}$-verzamelingen) en doorsneden van aftelbaar veel F_σ-verzamelingen ($F_{\sigma\delta}$-verzamelingen) enzovoort enzovoort.

Voor het geval van de topologie van $\mathbb{R}$ kan men bewijzen dat dit proces van telkens aftelbare verenigingen en complementen toevoegen niet na eindig veel, zelfs niet na aftelbaar veel, maar pas na overaftelbaar veel stappen afgelopen is. Gelukkig komen we in de praktijk met de G_δ- en F_σ-verzamelingen al een heel eind, zie bijvoorbeeld Stelling 3.19.

1.22. OPGAVEN. We beschouwen $\mathbb{R}$ met de gewone metriek.

1. a) Elke F_σ-verzameling en elke G_δ-verzameling is een Borel-verzameling.
   b) De verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zijn Borel-verzamelingen.
   c) Elk interval is een Borel-verzameling.

* 2. Construeer een Borel-verzameling die noch een F_σ- noch een G_δ-verzameling is. *Aanwijzing*: $\mathbb{Q}$ is geen G_δ-verzameling en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ is (dus) geen F_σ-verzameling.

3. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ kan op diverse manieren beschreven worden.
   a) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{S}(\mathcal{S})$, waarbij $\mathcal{S}$ de ring uit Voorbeeld 1.2 is. *Aanwijzing*: Toon aan: (1) $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ en
   (2) elke open verzameling is de vereniging van aftelbaar veel spelden.
   b) $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{S}(\mathcal{H})$, waarbij $\mathcal{H} = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$ de familie van alle (linker-) *halflijnen* is. *Aanwijzing*: $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

** **1.23.** OPGAVE. Stel $\mathcal{A}$ is een oneindige σ-algebra. Ga na of $\mathcal{A}$ aftelbaar kan zijn.

1.24. OPMERKING. De vraag rijst natuurlijk of elke deelverzameling van $\mathbb{R}$ een Borel-verzameling is. Het antwoord hierop is ontkennend; er zijn (een heleboel) deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ die niet Borel zijn: In Opgave 2.17 wordt er een gemaakt.

Een fraai voorbeeld van een niet-Borel-verzameling werd gegeven door MAZURKIEWICZ in [1936]: In de metrische ruimte $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ (met uniforme metriek) is de verzameling der differentieerbare functies niet Borel.

De uitgebreide reële getallen

1.25. DEFINITIE. De *uitgebreide verzameling van reële getallen* $\mathbb{R}^*$ bestaat uit $\mathbb{R}$ tezamen met twee nieuwe elementen $-\infty$ en ∞. We breiden de ordening op $\mathbb{R}$ uit tot een ordening op $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ door de afspraak

$$-\infty < a < \infty \qquad \text{voor alle } a \in \mathbb{R}.$$

Met deze afspraak is ∞ een bovengrens voor iedere verzameling. Zo kunnen we dan op natuurlijke manier over intervallen als $[-\infty, a]$ en $[a, \infty]$ spreken. We schrijven dan ook wel eens (suggestief) $[-\infty, \infty]$ in plaats van $\mathbb{R}^*$.

1.26. DEFINITIE. We spreken een aantal rekenregels af voor $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned}
x + \infty &= \ \ \infty + x = \ \ \infty && \text{voor } x \in (-\infty, \infty],\\
x - \infty &= -\infty + x = -\infty && \text{voor } x \in [-\infty, \infty),\\
x \cdot \infty &= \ \ \infty \cdot x = \ \ \infty && \text{voor } x \in (0, \infty] \text{ en}\\
0 \cdot \infty &= \ \ \infty \cdot 0 = \ \ 0.
\end{aligned}$$

De derde regel kan met behulp van mintekens uitgebreid worden tot alle produkten $x \cdot \infty$ en $x \cdot -\infty$ met $x \neq 0$.

We kunnen van $\mathbb{R}^*$ een metrische ruimte maken.

∗ **1.27.** OPGAVE. Door $\arctan \infty = \pi/2$ en $\arctan(-\infty) = -\pi/2$ wordt arctan op heel $\mathbb{R}^*$ gedefinieerd.

a) Laat zien dat $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ een metriek op $\mathbb{R}^*$ bepaald.

b) Toon aan dat $a_n \longrightarrow \infty$ in $(\mathbb{R}^*, d)$ dan en slechts dan als voor elke $v \in \mathbb{R}$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat $a_n > v$ voor alle $n \geqslant N$.

c) Toon aan dat $a_n \longrightarrow -\infty$ in $(\mathbb{R}^*, d)$ dan en slechts dan als voor elke $v \in \mathbb{R}$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat $a_n < v$ voor alle $n \geqslant N$.

∗ **1.28.** OPGAVE. Bewijs dat arctan een homeomorfisme is van $[-\infty, \infty]$ op $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

1.29. OPGAVE. Bewijs: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^*) : B \subseteq \mathbb{R}\}$.

Maatruimten

We definiëren nu de belangrijke begrippen *maat* en *maatruimte*.

1.30. DEFINITIE. Zij $\mathcal{A}$ een σ-algebra op een verzameling X. Een *maat op* $\mathcal{A}$ is een functie $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ die *aftelbaar additief* is, dat wil zeggen: als $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ een *disjuncte* collectie elementen van $\mathcal{A}$ is dan

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Voorts eisen we dat er tenminste één $A \in \mathcal{A}$ is met $\mu(A) < \infty$. Het drietal $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heet een *maatruimte*. De elementen van $\mathcal{A}$ noemen we *meetbare verzamelingen*.

1.31. OPMERKING. We spreken ook wel eens over 'een maat op de verzameling X'; hiermee bedoelen we dan een maat die op een σ-algebra op X is gedefinieerd.

1.32. VOORBEELD. Zij X een verzameling. Voor $E \subseteq X$ definiëren we

$$\tau(E) = \begin{cases} \infty & \text{als } E \text{ oneindig is, en} \\ |E| & \text{als } E \text{ eindig is.} \end{cases}$$

Dan is τ een maat op 2^X, de *telmaat*. N.B. met $|E|$ geven we het aantal elementen van E aan.

1.33. OPGAVE. Zij X een willekeurige verzameling. Definieer een maat op de σ-algebra uit Opgave 1.15.

∗ **1.34.** OPGAVE. Zij $\mathcal{A}_a$ de σ-algebra uit Opgave 1.16.

a) Laat zien dat

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{als } A \text{ aftelbaar is, en} \\ 1, & \text{als } \mathbb{R} \setminus A \text{ aftelbaar is} \end{cases}$$

een maat op $\mathcal{A}_a$ definieert.

b) Laat zien dat de beperking van de telmaat ook een maat op $\mathcal{A}_a$ definieert.

1.35. STELLING. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Dan geldt*

(i) $\mu(\varnothing) = 0$.

(ii) *Als $\{A_1, \dots, A_n\}$ een disjunct stelsel uit $\mathcal{A}$ is dan*
$$\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_n).$$

(iii) *Als $A, B \in \mathcal{A}$ met $A \subseteq B$ dan $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*

1.36. STELLING. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, en $\langle E_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ een rij meetbare verzamelingen.*

(i) *Als $E_0 \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \cdots$ en $E = \bigcup_n E_n$ dan $\mu(E) = \lim_n \mu(E_n)$.*

(ii) *Als $E_0 \supseteq E_1 \supseteq E_2 \supseteq \cdots$ en $E = \bigcap_n E_n$ dan $\mu(E) = \lim_n \mu(E_n)$,* mits *er een n is zodat $\mu(E_n) < \infty$.*

(iii) *Laat door middel van een voorbeeld zien dat het voorbehoud in (ii) nodig is.*

Maatruimten vormen ook de wiskundige fundering voor de kansrekening; een *kansruimte* is niet anders dan een maatruimte waarin de totale verzameling maat 1 heeft. Meestal noteert men zo'n kansruimte als $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, waarbij $\mathcal{A}$ een σ-algebra op Ω is. De elementen van $\mathcal{A}$ heten dan gebeurtenissen en P heet dan een *kansmaat*.

1.37. VOORBEELD. De *Poissonverdeling met parameter* λ krijgen we door $\Omega = \mathbb{N}$ te nemen, $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{N}}$ en door
$$P(A) = \sum_{k \in A} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$
te definiëren.

In de volgende hoofdstukken zullen we een belangrijke maat op $\mathbb{R}$ construeren, de Lebesgue-maat; we zullen daarbij zien dat een heleboel niet-lege verzamelingen maat 0 krijgen — aftelbare verzamelingen bijvoorbeeld. Een verzameling van de maat 0 is nagenoeg verwaarloosbaar; haar complement neemt vrijwel de gehele verzameling in beslag. Dit heeft tot het volgende spraakgebruik geleid: iets gebeurt *bijna overal* als de verzameling van de punten waar het niet gebeurd de maat 0 heeft. In het laatste hoofdstuk zullen we dit gebruiken om Riemann-integreerbare functies te karakteriseren: een begrensde functie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ is Riemann-integreerbaar dan en slechts dan als deze bijna overal continu is, met andere woorden als de verzameling $\{x : f \text{ is niet continu in } x\}$ de maat 0 heeft.

Hoofdstuk 2

De Uitwendige Maat op $\mathbb{R}$

In dit en het volgende hoofdstuk zullen we een maat op (een σ-algebra op) $\mathbb{R}$ construeren. Met behulp van deze maat zullen we dan de Lebesgue-integraal op $\mathbb{R}$ definiëren. De bedoeling is natuurlijk wel dat functies die al (Riemann-)integreerbaar zijn dit ook blijven en dat de waarde van de nieuwe integraal gelijk is aan de waarde van die Riemann-integraal.

In het volgende citaat van Lebesgue wordt uitgelegd wat voor soort maat we dan nodig hebben.

> Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes:
> 1° Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle.
> 2° Deux ensembles égaux ont même mesure.
> 3° La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs, deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles. *H. Lebesgue* [1902]

Net als Lebesgue definiëren we eerst een functie $\mu^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ die al behoorlijk op een maat lijkt en in het volgende hoofdstuk bepalen we dan een σ-algebra waarop die functie μ^* een maat is. In Opgaven 2.17 en 3.13 zullen we zien dat die σ-algebra niet gelijk kan zijn aan de hele machtsverzameling van $\mathbb{R}$; met behulp van de daar geconstrueerde verzameling kan men zelfs inzien dat het principieel onmogelijk aan alle drie wensen van Lebesgue te voldoen en toch alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ meetbaar te maken.

Lengte van spelden

We beginnen met het meten van spelden; dat kan, intuïtief, natuurlijk maar op één manier.

2.1. Definitie. Als $S = (a, b]$ een speld is dan noemen we $|S| = b - a$ de *lengte van S*.

De volgende stelling is het fundament voor de definitie van de Lebesgue-maat. Als voorbereiding eerst de volgende opgave.

2.2. Opgave.

a) Zij $S = (a, b]$ een speld en $\{S_n : n \leqslant N\}$ een eindige disjuncte verzameling spelden met $\bigcup_{n \leqslant N} S_n \subseteq S$; dan geldt $\sum_{n \leqslant N} |S_n| \leqslant b - a$. *Aanwijzing*: Schrijf $S_n = (a_n, b_n]$ en neem aan dat $a_m < a_n$ als $m < n$; toon aan dat dan ook $b_m \leqslant a_n$ als $m < n$.

b) Toon aan: als $S = \bigcup_{n \leqslant N} S_n$ dan $|S| = \sum_{n \leqslant N} |S_n|$.

2.3. Stelling. *Als de speld S de vereniging van een disjuncte familie $\{S_n\}_n$ van spelden is dan geldt $|S| = \sum_{n=1}^{\infty} |S_n|$.*

Bewijs. Met behulp van Opgave 2.2 volgt snel dat $\sum_{n=1}^{\infty}|S_n| \leqslant |S|$.

Het bewijs van $\sum_{n=1}^{\infty}|S_n| \geqslant |S|$ is wat lastiger. We bewijzen dat $\sum_{n=1}^{\infty}|S_n| \geqslant |S|-\varepsilon$ voor elke $\varepsilon > 0$.

Zij $\varepsilon > 0$ en kies $c \in (a,b)$ met $c < a+\varepsilon/2$ en schrijf $S_n = (a_n, b_n]$ voor elke n. Blaas nu elke S_n op tot het open interval $T_n = (a_n, b_n + \varepsilon 2^{-(n+1)})$. De intervallen T_n overdekken het compacte interval $[c,b]$; er is dus een $N \in \mathbb{N}$ zó dat $[c,b] \subseteq \bigcup_{n\leqslant N} T_n$.

We beweren nu dat $b-c < \sum_{n\leqslant N}(b_n - a_n + \varepsilon 2^{-(n+1)})$; hieruit volgt dan dat

$$b-c < \sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n + \varepsilon 2^{-(n+1)}) = \sum_{n=1}^{\infty}|S_n| + \varepsilon/2.$$

Omdat $c < a+\varepsilon/2$ volgt dan

$$\sum_{n=1}^{\infty}|S_n| + \varepsilon > b-c+\varepsilon/2 > b-a.$$

We bewijzen de bewering in het volgende lemma. □

2.4. Lemma. *Als het gesloten interval $[a,b]$ door eindig veel open intervallen (c_n, d_n) $(n = 1, 2, \dots, N)$ wordt overdekt dan geldt $b-a < \sum_{n=1}^{N}(d_n - c_n)$.*

Bewijs. We bewijzen dit met inductie naar N. Voor $N = 1$ is het gestelde duidelijk (ga het toch maar na).

Voor de stap van N naar $N+1$ nemen we een overdekking $\{(c_n, d_n) : n \leqslant N+1\}$ van $[a,b]$. Na eventuele hernummering mogen we aannemen dat $b \in (c_{N+1}, d_{N+1})$. Als $c_{N+1} < a$ dan zijn we meteen klaar. Zo niet dan passen we de inductieveronderstelling toe op het gesloten interval $[a, c_{N+1}]$ en de familie $\{(c_n, d_n) : n \leqslant N\}$; er volgt $c_{N+1} - a < \sum_{n=1}^{N}(d_n - c_n)$. Verder geldt $b - c_{N+1} < d_{N+1} - c_{N+1}$. Tel nu de respectievelijke linker- en de rechterleden bij elkaar op, dan volgt het gestelde. □

De uitwendige maat

We hebben dus als het ware een 'maat' op de familie van alle spelden gedefinieerd; we gaan deze 'maat' uitbreiden tot een maat op een σ-algebra waar alle spelden in zitten. Als eerste stap definiëren we een bijna-maat op de familie van alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

2.5. Definitie. Voor een willekeurige deelverzameling A van $\mathbb{R}$ definiëren we haar *uitwendige maat* $\mu^*(A)$ door

$$\mu^*(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|S_n| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right\}.$$

Het infimum wordt hierbij genomen over alle mogelijke *aftelbare* overdekkingen van A met spelden.

Merk op dat de definitie niet zinledig is: elke verzameling wordt overdekt door de familie $\{(n, n+1] : n \in \mathbb{Z}\}$.

Uit de definitie volgt meteen dat μ^* monotoon is.

2.6. PROPOSITIE. *μ^* is* monotoon: *als $A \subseteq B$ dan $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.*

We zullen in Opgave 2.17 zien dat μ^* niet aftelbaar additief is; wel heeft μ^* de volgende eigenschap.

2.7. PROPOSITIE. *μ^* is* aftelbaar subadditief*: als $A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ dan geldt*

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Van een paar eenvoudige verzamelingen kunnen we de uitwendige maat expliciet uitrekenen.

2.8. OPGAVE. Voor elke aftelbare verzameling A geldt $\mu^*(A) = 0$; in het bijzonder geldt dus $\mu^*(\mathbb{Q}) = 0$.

2.9. OPGAVE. Toon aan dat de uitwendige maat van de Cantor-verzameling 0 is.

Een klein beetje additiviteit krijgen we door naar verzamelingen van uitwendige maat 0 te kijken.

2.10. OPGAVE. Als $\mu^*(A) = 0$ dan geldt $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(B)$ voor elke B.

Voor we meer eigenschappen van μ^* afleiden gaan we eerst na dat we ons in de definitie tot 'handige' families spelden kunnen beperken.

2.11. OPGAVE. Toon aan, door grote spelden als vereniging van kleine spelden te schrijven, dat voor elke $\delta > 0$ geldt:

$$\mu^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |S_n| : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \text{ en } |S_n| < \delta \text{ voor alle } n \right\}.$$

2.12. OPGAVE. Toon aan, door eerdere spelden van latere af te trekken, dat zowel in Definitie 2.5 als Opgave 2.11 de spelden S_n paarsgewijs disjunct genomen kunnen worden. *Aanwijzing*: gebruik Opgave 2.2 om de som van de lengten onder controle te houden.

De eerste belangrijke eigenschap van μ^* is dat intervallen goed gemeten worden.

2.13. STELLING. *Voor een speld $(a, b] \subseteq \mathbb{R}$ geldt $\mu^*\big((a, b]\big) = b - a$.*

BEWIJS. Zij $\{S_n\}_n$ een willekeurige *disjuncte* overdekking van $(a, b]$ met spelden (we gebruiken hier Opgave 2.12); door elke speld S_n te vervangen door $S'_n = S_n \cap (a, b]$ vinden we, via Stelling 2.3, dat

$$b - a = \sum_{n=1}^{\infty} |S'_n| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |S_n|.$$

Hieruit volgt meteen dat $\mu^*\big((a, b]\big) = b - a$. □

Door de monotonie van μ^* te gebruiken krijgen we de volgende propositie.

2.14. PROPOSITIE. *Voor elk interval I met eindpunten a en b geldt $\mu^*(I) = |b - a|$.*

2.15. OPGAVE.

a) Voor elke a en b en elke aftelbare verzameling A geldt $\mu^*\big((a, b] \setminus A\big) = b - a$.

b) Het interval $[0,1]$ is overaftelbaar.

We gaan kijken in hoeverre aan de eisen van Lebesgue voldaan is.

Wat Eis 1° betreft, in Stelling 2.13 hebben we gezien dat voor een speld S geldt $\mu^*(S) = |S|$, met andere woorden: de uitwendige maat van een speld is gelijk aan haar lengte. Er zijn dus voldoende verzamelingen waarvan de maat niet 0 is.

Aan de tweede eis van Lebesgue en aan een voor de hand liggende variant daarop is ook voldaan.

2.16. Opgave. Voor $A \subseteq \mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R}$ korten we met respectievelijk $x + A$ en $x \cdot A$ de verzamelingen $\{x + a : a \in A\}$ en $\{xa : a \in A\}$ af.

a) Toon aan dat $\mu^*(x + A) = \mu^*(A)$.

b) Toon aan dat $\mu^*(x \cdot A) = |x| \cdot \mu^*(A)$.

Additiviteitseigenschappen

De derde eis van Lebesgue is de lastigste; we weten dat μ^* voor spelden aftelbaar additief is en dat we voor willekeurige verzamelingen aftelbare subadditiviteit hebben. In de volgende opgave laten we zien dat μ^* niet aftelbaar additief is. Het voorbeeld werd gevonden door Vitali.

$**$ **2.17.** Opgave. We definiëren een equivalentierelatie $\sim$ op $\mathbb{R}$ door

$$x \sim y \text{ als } x - y \in \mathbb{Q}.$$

Merk op dat de equivalentieklasse van $x \in \mathbb{R}$ gelijk is aan $\mathbb{Q}_x = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$ en dat dus elke equivalentieklasse dicht ligt in $\mathbb{R}$. Kies nu uit elke equivalentieklasse één punt in de doorsnede met $(0, \frac{1}{2})$ en noem de verzameling van al die punten E. Definiëer verder voor $q \in \mathbb{Q}$:

$$E_q = \{e + q : e \in E\}.$$

a) Bewijs: als $p, q \in \mathbb{Q}$ en $p \neq q$ dan $E_p \cap E_q = \varnothing$. *Aanwijzing*: als $x \in E_p \cap E_q$ dan $x - p, x - q \in E$ en $(x - p) - (x - q) \in \mathbb{Q}$.

b) Bewijs: voor elke $q \in \mathbb{Q}$ geldt $\mu^*(E_q) = \mu^*(E)$.

c) Bewijs: $(\frac{1}{2}, 1] \subseteq \bigcup\{E_q : q \in (0,1] \cap \mathbb{Q}\} \subseteq (0, \frac{3}{2}]$.

d) Bewijs: $\mu^*(E) > 0$.

e) Bewijs: $\mu^*\big(\bigcup_{0<q\leqslant 1} E_q\big) \leqslant \frac{3}{2} < \infty = \sum_{0<q\leqslant 1} \mu^*(E_q)$.

f) Ga na dat μ^* zelfs niet eindig additief is, dat wil zeggen: er zijn disjuncte verzamelingen A en B met $\mu^*(A \cup B) < \mu^*(A) + \mu^*(B)$.

We hebben nu gezien dat μ^* niet aftelbaar additief is. We gaan daarom onderzoeken voor welke soort verzamelingen μ^* wel aftelbaar additief is. Voor we dat doen maken we eerst een opmerking.

2.18. Opmerking. Uit de aftelbare subadditiviteit van μ^* weten we dat voor elke disjuncte rij $\langle A_n \rangle_n$ deelverzamelingen van $\mathbb{R}$, met vereniging A altijd $\mu^*(A) \leqslant \sum_n \mu^*(A_n)$ geldt. Om in voorkomende gevallen $\mu^*(A) = \sum_n \mu^*(A_n)$ te bewijzen is het dus voldoende aan te tonen dat $\mu^*(A) \geqslant \sum_n \mu^*(A_n)$ en dit betekent weer dat we voor elke N zullen moeten laten zien dat $\mu^*(A) \geqslant \sum_{n\leqslant N} \mu^*(A_n)$. Heel vaak gebeurt dit door te laten zien dat $\mu^*\big(\bigcup_{n\leqslant N} A_n\big) = \sum_{n\leqslant N} \mu^*(A_n)$ en dan de monotonie te gebruiken.

2.19. LEMMA. *Als F_1 en F_2 disjuncte compacte verzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn dan geldt*

$$\mu^*\big(F_1 \cup F_2\big) = \mu^*(F_1) + \mu^*(F_2).$$

BEWIJS. We weten al dat $\mu^*(F_1 \cup F_2) \leqslant \mu^*(F_1) + \mu^*(F_2)$; we gebruiken Opgave 2.11 om de omgekeerde ongelijkheid te bewijzen.

Kies $\delta > 0$ zó dat $|x - y| > 2\delta$ als $x \in F_1$ en $y \in F_2$. Als $\{S_n\}_n$ een familie spelden is die $F_1 \cup F_2$ overdekt en zo dat $|S_n| < \delta$ voor alle n dan volgt

$$\sum |S_n| \geqslant \sum \big\{|S_n| : S_n \cap F_1 \neq \varnothing\big\} + \sum \big\{|S_n| : S_n \cap F_2 \neq \varnothing\big\},$$

ga dit zorgvuldig na. De rechterkant is groter dan of gelijk aan $\mu^*(F_1) + \mu^*(F_2)$. □

2.20. LEMMA. *Als $\{F_i : i = 1, \dots, n\}$ een disjuncte collectie compacte verzamelingen is dan geldt*

$$\mu^*\big(F_1 \cup \dots \cup F_n\big) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(F_i).$$

2.21. OPGAVE. Bewijs: als $\{F_n\}_n$ een disjuncte familie compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ is dan geldt $\mu^*(\bigcup_n F_n) = \sum_n \mu^*(F_n)$. *Aanwijzing*: Zie Opmerking 2.18.

2.22. OPGAVE. Als $\{S_n\}_n$ een disjuncte familie spelden is dan geldt $\mu^*(\bigcup_n S_n) = \sum_n \mu^*(S_n)$. *Aanwijzing*: Zie Opmerking 2.18.

Hoofdstuk 3

De Lebesgue-maat

Na het voorbereidende werk in het vorige hoofdstuk zullen we nu de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$ construeren, dat wil zeggen, we beschrijven een σ-algebra $\mathcal{M}$ en bewijzen dat de beperking van μ^* tot die σ-algebra een maat is.

> **Definition.** Für eine gegebene Maßfunction $\mu^* A$ soll eine Punktmenge A meßbar heißen, wenn für jede willkürliche Punktmenge W von endlichem äußeren Maße die Geichung
> $$\mu^* W = \mu^* AW + \mu^*(W - AW)$$
> erfüllt ist. Das äußere Maß $\mu^* A$ einer meßbaren Punktmenge A wird das Maß der Punktmenge genannt und mit μA bezeichnet. *C. Carathéodory* [1918]

Lebesgue-meetbare verzamelingen

We beginnen met het definiëren van meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Deze definitie werd bedacht door Carathéodory (zie bovenstaand citaat). We korten het complement $\mathbb{R} \setminus A$ van een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ af met A^c.

3.1. DEFINITIE. Een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ heet *Lebesgue-meetbaar* als voor *iedere* deelverzameling X van $\mathbb{R}$ de volgende gelijkheid geldt:

$$\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c).$$

De collectie van alle Lebesgue-meetbare verzamelingen geven we aan met $\mathcal{M}$.

Voor het gemak schrijven we in dit hoofdstuk kortweg 'meetbaar' in plaats van 'Lebesgue-meetbaar'.

3.2. OPMERKING. Uit de aftelbare subadditiviteit van μ^* volgt dat altijd geldt

$$\mu^*(X) \leqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c).$$

Voor meetbare verzamelingen A moet dus ook $\mu^*(X) \geqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c)$ gelden. In een bewijs zullen we ons dan ook vaak tot deze ongelijkheid beperken.

3.3. OPGAVE. Als $\mu^*(A) = 0$ dan is A meetbaar en $\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A^c)$ voor elke X. *Aanwijzing*: Pas de subadditiviteit en monotonie van μ^* toe.

We gaan nu de volgende stelling bewijzen.

3.4. STELLING. *De familie $\mathcal{M}$ is een σ-algebra en μ^* is een maat op $\mathcal{M}$.*

We beginnen met aantonen dat $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$ en dat $\mathcal{M}$ een ring is.

3.5. OPGAVE. Twee eigenschappen van $\mathcal{M}$ zijn erg eenvoudig te verifiëren.

a) $\mathbb{R}$ is meetbaar.

b) Als A meetbaar is dan is A^c het ook.

3.6. LEMMA. *Als A en B meetbaar zijn dan zijn $A \cap B$ en $A \cup B$ het ook.*

BEWIJS. Omdat $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ is het voldoende te bewijzen dat $A \cup B$ altijd meetbaar is (zie Opgave 3.5). Zij $X \subseteq \mathbb{R}$ willekeurig. Gebruik eerst dat A meetbaar is: $\mu^*(X) \geqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c)$; gebruik vervolgens twee keer dat B meetbaar is:

$$\mu^*(X \cap A) \geqslant \mu^*(X \cap A \cap B) + \mu^*(X \cap A \cap B^c)$$

en

$$\mu^*(X \cap A^c) \geqslant \mu^*(X \cap A^c \cap B) + \mu^*(X \cap A^c \cap B^c).$$

Merk verder op dat $X \cap A^c \cap B^c = X \cap (A \cup B)^c$ en dat $X \cap (A \cup B) = (X \cap A \cap B) \cup (X \cap A^c \cap B^c) \cup (X \cap A^c \cap B)$; pas tenslotte de subadditiviteit van μ^* toe om te concluderen dat $\mu^*(X) \geqslant \mu^*\bigl(X \cap (A \cup B)\bigr) + \mu^*\bigl(X \cap (A \cup B)^c\bigr)$. ☐

We weten nu dat $\mathcal{M}$ een ring is waar $\mathbb{R}$ in zit; het volgende lemma maakt daarom, met behulp van Opgave 1.11, het bewijs van Stelling 3.4 af.

3.7. LEMMA. *Als $\langle A_n \rangle_n$ een disjuncte rij in $\mathcal{M}$ is dan geldt $A = \bigcup_n A_n \in \mathcal{M}$ en $\mu^*(A) = \sum_n \mu^*(A_n)$.*

BEWIJS. We bewijzen met inductie dat $\mu^*(X) \geqslant \mu^*(X \cap A^c) + \sum_{n \leqslant N} \mu^*(X \cap A_n)$ voor alle X. Dan volgt

$$\mu^*(X) \geqslant \mu^*(X \cap A^c) + \textstyle\sum_n \mu^*(X \cap A_n) \geqslant \mu^*(X \cap A^c) + \mu^*(X \cap A)$$

en, met $X = A$ als speciaal geval, $\mu^*(A) \geqslant \sum_n \mu^*(A_n)$.

Definieer eerst voor elke N de verzameling $X_N = (X \cap \bigcup_{n \leqslant N} A_n) \cup (X \cap A^c)$ en merk op dat $X_N \cap (\bigcup_{n \leqslant N} A_n)^c = X \cap A^c$ en $X_N \cap \bigcup_{n \leqslant N} A_n = X \cap \bigcup_{n \leqslant N} A_n$.

Voor $N = 1$ passen we de meetbaarheid van A_1 en bovenstaande formules toe:

$$\mu^*(X) \geqslant \mu^*(X_1) \geqslant \mu^*(X \cap A_1) + \mu^*(X \cap A^c).$$

Voor de stap van N naar $N+1$ gebruiken we bovenstaande formules en de meetbaarheid van $\bigcup_{n \leqslant N+1} A_n$:

$$\mu^*(X) \geqslant \mu^*(X_{N+1}) \geqslant \mu^*(X \cap \textstyle\bigcup_{n \leqslant N+1} A_n) + \mu^*(X \cap A^c).$$

Schrijf nu even $Y = X \cap \bigcup_{n \leqslant N+1} A_n$ en pas de meetbaarheid van A_{N+1} toe:

$$\mu^*(Y) \geqslant \mu^*(Y \cap A_{N+1}) + \mu^*(Y \cap \bigcup_{n \leqslant N} A_n).$$

De inductieaanname geeft tenslotte

$$\mu^*(Y \cap \bigcup_{n \leqslant N} A_n) \geqslant \sum_{n \leqslant N} \mu^*(Y \cap A_n).$$

Zet nu alle ongelijkheden in de juiste volgorde achter elkaar. ☐

3.8. OPMERKING. We hebben tot nu toe van μ^* alleen de monotonie en de aftelbare subadditiviteit gebruikt. Dit betekent dat dit procédé in heel algemene gevallen toepasbaar is. Het is dan ook een veelgebruikte manier om maatruimten te construeren: het is meestal niet zo moeilijk een functie als μ^* te maken; de σ-algebra en bijbehorende maat krijgt men dan zo kado. Het hangt dan wel van de functie μ^* af of men iets interessants overhoudt.

In ons geval kunnen we bewijzen dat elke Borel-verzameling meetbaar is.

3.9. LEMMA. *Voor elke $c \in \mathbb{R}$ is het interval $(-\infty, c]$ meetbaar.*

AANWIJZING. Zij X een willekeurige deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $\{S_n\}_n$ een overdekking van X met spelden. Verdeel elke speld in twee spelden: $L_n = S_n \cap (-\infty, c]$ en $R_n = S_n \cap (c, \infty)$. Merk op dat $\{L_n\}_n$ een overdekking van $X \cap (-\infty, c]$ is en $\{R_n\}_n$ een overdekking van $X \cap (c, \infty)$. Ga verder na dat $\sum_n |S_n| = \sum_n |L_n| + \sum_n |R_n|$ zodat $\sum_n |S_n| \geqslant \mu^*\big(X \cap (-\infty, c]\big) + \mu^*\big(X \cap (c, \infty)\big)$.

3.10. STELLING. *De σ-algebra $\mathcal{M}$ omvat de Borel-algebra.*

BEWIJS. Omdat $\mathcal{M}$ een σ-algebra is met $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{M}$ volgt met behulp van Opgave 1.22.3 dat $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{M}$. $\square$

Nu we weten dat $\mathcal{M}$ een σ-algebra is en μ^* een maat op $\mathcal{M}$ kunnen we formeel de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$ definiëren.

3.11. DEFINITIE. De beperking van μ^* tot $\mathcal{M}$ noemen we de *Lebesgue-maat op* $\mathbb{R}$ en we zullen hem in het vervolg met m aanduiden.

3.12. OPGAVE. Maak Opgave 2.16 af door aan te tonen dat voor elke meetbare verzameling A en elke $x \in \mathbb{R}$ de verzamelingen $x + A$ en $x \cdot A$ ook meetbaar zijn.

3.13. OPGAVE. Zij E de verzameling uit Opgave 2.17; toon aan dat $E \notin \mathcal{M}$. Een ander voorbeeld van een niet Lebesgue-meetbare verzameling werd in [1908] door VAN VLECK beschreven. Voor meer informatie over niet-Lebesgue-meetbare verzamelingen verwijzen we naar het artikel [1984] van SIMOSON.

3.14. OPGAVE. Zij C de Cantorverzameling. Toon aan dat C meetbaar is en bereken $m(C)$.

* **3.15.** OPGAVE. Zij $r \in (0, 1)$; construeer een compacte deelverzameling K van $[0, 1]$ zó dat K geen niet-leeg open interval omvat en $m(K) = r$. Lukt het ook om $m(K) = 1$ te krijgen? *Aanwijzing*: Bestudeer de constructie van de Cantor-verzameling nog eens goed.

** **3.16.** OPGAVE. Voor iedere $\varepsilon > 0$ zij $A(\varepsilon) = \big\{x \in (0, 1) : -\varepsilon \leqslant \sin(1/x) \leqslant \varepsilon\big\}$. Bewijs:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m\big(A(\varepsilon)\big)}{\varepsilon} = \frac{1}{3}.$$

Aanwijzing: Hier hebben we de volgende formule van Euler nodig: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

** **3.17.** OPGAVE (Voor puzzelaars). Definieer voor $x \in [0, 1]$ en $n \in \mathbb{N}$:

$$Z_n(x) = \text{het aantal zevens in de eerste } n \text{ decimalen van } x,$$

en zij

$$E = \left\{ x : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} Z_n(x) \text{ bestaat} \right\}.$$

a) Bewijs: E is meetbaar, E is niet open en E is niet gesloten.
b) Bepaal $m(E)$.
Voor informatie over getallen waarin alle decimalen even vaak voorkomen zie het boekje NIVEN [1956, Hoofdstuk VIII].

Regulariteit van m

We kunnen Lebesgue-meetbare verzamelingen op diverse manieren karakteriseren. Voor we de stelling formuleren eerst een lemma.

3.18. LEMMA. *Als $\mu^*(A) < \infty$ dan bestaat voor elke $\varepsilon > 0$ een open verzameling G met $\mu^*(G) < \mu^*(A) + \varepsilon$.*

AANWIJZING. Uit de definitie krijgen we een overdekking $\{S_n\}_n$ van A met spelden zó dat $\sum_n |S_n| < \mu^*(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Bekijk nu het bewijs van Stelling 2.3 om te zien hoe je een overdekking $\{L_n\}_n$ van A met open intervallen kunt maken zó dat $\sum_n \mu^*(L_n) < \mu^*(A) + \varepsilon$.

3.19. STELLING. *Voor een deelverzameling van $\mathbb{R}$ zijn de volgende uitspraken equivalent.*

(i) *A is Lebesgue-meetbaar.*

(ii) *Bij elke $\varepsilon > 0$ kunnen we een gesloten verzameling F en een open verzameling G vinden zó dat $F \subseteq A \subseteq G$ en $m(G \setminus F) < \varepsilon$.*

(iii) *Er bestaan een F_σ-verzameling F en een G_δ-verzameling G zó dat $F \subseteq A \subseteq G$ en $m(G \setminus F) = 0$.*

(iv) *A is te schrijven als $B \cup N$ met B een Borel-verzameling en N een verzameling van uitwendige maat 0.*

BEWIJS. (i) $\Rightarrow$ (ii): neem eerst aan dat A begrensd is en kies met behulp van Lemma 3.18 een open verzameling G zó dat $A \subseteq G$ en $m(G) < m(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$, kies vervolgens een open verzameling O met $G \setminus A \subseteq O$ en $m(O) < m(G \setminus A) + \frac{1}{2}\varepsilon$. Neem $F = A \setminus O$; dan is F gesloten en $m(G \setminus F) < m(O) < \varepsilon$. Als A onbegrensd is vinden we voor elke $n \in \mathbb{Z}$ verzamelingen F_n en G_n als gewenst voor $A \cap (n, n+1]$ met $m(G_n \setminus F_n) < 2^{-|n|}\varepsilon$; neem $G = \bigcup_n G_n$ en $F = \bigcup_n F_n$, dan geldt: G is open, F is gesloten (waarom?) en $m(G \setminus F) < 3\varepsilon$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): neem voor elke n een open G_n en een gesloten F_n met $F_n \subseteq G_n$ en $m(G_n \setminus F_n) < 2^{-n}$; dan zijn $\bigcup_n F_n$ en $\bigcap_n G_n$ als gewenst.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): neem $B = F$ en $N = A \setminus F$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): we weten al dat B en N in $\mathcal{M}$ zitten. $\square$

3.20. OPGAVE. Als $A \in \mathcal{M}$ dan geldt $m(A) = \sup\{m(C) : C \text{ is compact en } C \subseteq A\}$.

Met behulp van deze opgave kunnen we een merkwaardige eigenschap van meetbare verzamelingen afleiden.

3.21. OPGAVE. Als $A \in \mathcal{M}$ en $m(A) > 0$ dan is er een $\delta > 0$ zó dat $(-\delta, \delta) \subseteq \{x - y : x, y \in A\}$; in de verzameling verschillen van elementen van A zit niet alleen 0 maar zelfs een hele omgeving van 0.

De Lebesgue-maat op $\mathbb{R}^2$

We kunnen voor $\mathbb{R}^2$ eenzelfde soort constructie uitvoeren als voor $\mathbb{R}$. We beginnen door voor een *tegel* T van de vorm $(a, b] \times (c, d]$ in $\mathbb{R}^2$ zijn *oppervlakte* $\operatorname{opp} T$ te definiëren als $\operatorname{opp} T = (b - a) \times (d - c)$. Er komen nu nieuwe versies van Opgaven 2.2 en Stelling 2.3.

3.22. OPGAVE.

a) Zij $T = (a, b] \times (c, d]$ een tegel en $\{T_n : n \leqslant N\}$ een eindige disjuncte verzameling tegels met $\bigcup_{n \leqslant N} T_n \subseteq T$, dan geldt $\sum_{n \leqslant N} \operatorname{opp} T_n \leqslant \operatorname{opp} T$.
Aanwijzing: Schrijf $T_n = (a_n, b_n] \times (c_n, d_n]$ en gebruik de verzamelingen $\{a_n, b_n : n \leqslant N\}$ en $\{c_n, d_n : n \leqslant N\}$ om partities $P = \{p_0, \ldots, p_K\}$ en $Q = \{q_0, \ldots, q_L\}$ van respectievelijk $(a, b]$ en $(c, d]$ te maken. Laat vervolgens zien dat elke tegel T_n de vereniging van een aantal tegels $(p_k, p_{k+1}] \times (q_l, q_{l+1}]$ is.

b) Toon aan: als $T = \bigcup_{n \leqslant N} T_n$ dan $\operatorname{opp} T = \sum_{n \leqslant N} \operatorname{opp} T_n$.

3.23. STELLING. *Als de tegel T de vereniging van een disjuncte familie $\{T_n\}_n$ van tegels is dan geldt* $\operatorname{opp} T = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{opp} T_n$.

Het bewijs loop geheel analoog aan dat van Stelling 2.3, met gebruikmaking van het volgende lemma.

3.24. LEMMA. *Als de gesloten rechthoek $[a, b] \times [c, d]$ door eindig veel open rechthoeken $(a_n, b_n) \times (c_n, d_n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ wordt overdekt dan geldt $(b - a) \times (d - c) < \sum_{n=1}^{N} (a_n, b_n) \times (d_n - c_n)$.*

Het bewijs van dit lemma is wat lastiger dan dat van Lemma 2.4 omdat je op moet letten dat je een open rechthoek niet dubbel telt, maar het is te doen.

De definitie van de uitwendige maat μ_2^* met behulp van aftelbare overdekkingen met tegels is nu geheel analoog aan die van μ^*.

3.25. DEFINITIE (en NOTATIE). Voor een willekeurige deelverzameling A van $\mathbb{R}^2$ definiëren we haar *uitwendige maat* $\mu_2^*(A)$ door

$$\mu_2^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{opp} T_n : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \right\}.$$

Het infimum wordt hierbij genomen over alle mogelijke *aftelbare* overdekkingen van A met tegels.

Het hele proces dat we voor de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$ hebben doorlopen kunnen we nu voor μ_2^* volgen. Er zijn geen wezenlijke veranderingen nodig, de functie μ_2^* is monotoon en aftelbaar subadditief en dat is al wat we nodig hadden om meetbare verzamelingen te definiëren. We krijgen zo een σ-algebra $\mathcal{M}_2$ op $\mathbb{R}^2$ zó dat de beperking m_2 van μ_2^* een maat op $\mathcal{M}_2$ is. We noemen de elementen van $\mathcal{M}_2$ weer *Lebesgue-meetbaar* en we noemen m_2 de *Lebesgue-maat op* $\mathbb{R}^2$.

We kunnen nu ook weer bewijzen dat elke Borel-verzameling in $\mathbb{R}^2$ tot $\mathcal{M}_2$ behoort.

3.26. OPGAVE. Elke open verzameling in $\mathbb{R}^2$ kan geschreven worden als vereniging van aftelbaar veel tegels. *Aanwijzing*: Als O open is en $x \in O$ maak dan een tegel T met *rationale* hoekpunten zó dat $x \in T \subseteq O$.

3.27. OPGAVE. Elke tegel behoort tot $\mathcal{M}_2$. *Aanwijzing*: Bewijs, net als bij Lemma 3.9 dat de halfvlakken $(-\infty, c] \times \mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \times (-\infty, c]$ meetbaar zijn.

Daarnaast kunnen we voor $\mathcal{M}_2$ en m_2 de corresponderende versies van Lemma 3.18 en Stelling 3.19 bewijzen. Dit heeft als belangrijk gevolg dat voor zowel $\lambda = m$ als voor $\lambda = m_2$ en elke meetbare verzameling A de volgende formules gelden:

$$\lambda(A) = \sup\{\lambda(C) : C \text{ is compact en } C \subseteq A\}$$

en

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(G) : G \text{ is open en } A \subseteq G\}.$$

Deze twee formules worden vaak samengevat met de zin: *De Lebesgue-maat is regulier.*

Tenslotte, voor μ_2^* geldt Opgave 3.3 ook; we hebben dus voor zowel $\lambda = m$ als voor $\lambda = m_2$ de volgende uitspraak: als B meetbaar is, $m(B) = 0$ en $A \subseteq B$ dan is A ook meetbaar en (uiteraard) $m(A) = 0$. Een maat die aan deze uitspraak voldoet noemen we *volledig*; de Lebesgue-maat is dus een voorbeeld van een volledige maat.

Het verband tussen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_2$

We gaan het verband tussen $\mathcal{M}$ en m aan de ene kant en $\mathcal{M}_2$ en m_2 aan de andere kant onderzoeken. Om te beginnen laten we zien dat de Borel-verzamelingen van $\mathbb{R}$ en die van $\mathbb{R}^2$ nauw met elkaar samenhangen. We noteren de familie van alle 'rechthoeken' van de vorm $A \times B$ met $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ als $\mathcal{B}_2$ en de familie van alle *halfvlakken* uit Opgave 3.27 met $\mathcal{H}_2$.

3.28. Opgave. Toon aan $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathfrak{S}(\mathcal{B}_2) = \mathfrak{S}(\mathcal{T}) = \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$.

Voor $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_2$ bestaat een dergelijk mooi verband niet.

3.29. Opgave. Zij E een niet-meetbare deelverzameling van $\mathbb{R}$.

a) Toon aan dat $\mu_2^*(\{0\} \times E) = 0$ en dus $\{0\} \times E \in \mathcal{M}_2$.

b) Toon aan dat $\{0\} \times E$ *niet* in de σ-algebra zit die voortgebracht wordt door de familie rechthoeken $M \times N$ met $M, N \in \mathcal{M}$.

Het verband tussen $\mathcal{M}_2$ en $\mathcal{M}$ is iets subtieler. Om dit aan te kunnen geven voeren we de volgende notatie in: als $A \subseteq \mathbb{R}^2$ en $x \in \mathbb{R}$ dan noteren we $A_x = \{y : (x, y) \in A\}$ en we noemen dit de *verticale sectie* van A over x. Evenzo is $A^y = \{x : (x, y) \in A\}$ de *horizontale sectie* van A over y.

Van de verzameling $A = \{0\} \times E$ uit Opgave 3.29 zijn alle vertical secties leeg, op één na: $A_0 = E$. Een horizontale sectie A^y is leeg (als $y \notin E$) of $\{0\}$ (als $y \in E$). De verzameling A heeft dus weinig niet-meetbare secties. Elk element van de familie $\mathcal{M}_2$ heeft deze eigenschap.

3.30. Stelling. *Als $A \in \mathcal{M}_2$ dan heeft de verzameling $\{x : A_x \notin \mathcal{M}\}$ de maat 0, met andere woorden: voor bijna alle x is A_x meetbaar (en ook: voor bijna alle y is A^y meetbaar).*

Bewijs. Kies een F_σ-verzameling F en een G_δ-verzameling G zó dat $F \subseteq A \subseteq G$ en $m_2(G \setminus F) = 0$. Merk op dat $F_x \subseteq A_x \subseteq G_x$ voor alle x, dat F_x een F_σ-verzameling is en G_x een G_δ-verzameling. Als we kunnen aantonen dat $m(G_x \setminus F_x) = 0$ voor bijna alle x dan zijn we klaar. Dit volgt uit een wat algemenere stelling die we hierna formuleren. □

3.31. Stelling. *Zij $A \in \mathcal{M}_2$, dan geldt: $m_2(A) = 0$ dan en slechts dan als $\mu^*(A_x) = 0$ voor bijna alle $x \in \mathbb{R}$.* □

Het bewijs van deze stelling is nogal lang, daarom laten we het hier achterwege; het is te vinden in het boek [1980] van Oxtoby. Het omgekeerde van Stelling 3.30 geldt niet; men kan een niet-meetbare deelverzameling N van $\mathbb{R}^2$ construeren zó dat voor elke x de verticale en horizontale secties N_x en N^y uit slechts één punt bestaan en dus zeker tot $\mathcal{M}$ behoren. Voor zo'n constructie is nogal wat kennis van de verzamelingenleer nodig; we verwijzen daarom naar het boek [1965] van Hewitt en Stromberg (pagina 393).

Over het verband tussen m en m_2 kunnen we het volgende zeggen.

3.32. Opgave. Als $N \subseteq \mathbb{R}$ en $m(N) = 0$ dan $m_2(N \times \mathbb{R}) = 0$.

Volgens de rekenregels uit Definitie 1.26 geldt $0 \cdot \infty = 0$; de volgende stelling is dus een verbetering van Opgave 3.32.

3.33. Stelling. *Als $A, B \in \mathcal{M}$ dan $A \times B \in \mathcal{M}_2$ en $m_2(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$.*

Hoofdstuk 4

Lebesgue-integratie

We zullen nu voor willekeurige maatruimten integralen definiëren. Omdat in het algemeen niet elke verzameling meetbaar is (zie Opgave 2.17) mogen we niet verwachten dat we elke functie zullen kunnen integreren. We beginnen daarom met de klasse van de meetbare functies te introduceren.

Meetbare functies

Voor de integratietheorie beschouwen we functies van een maatruimte naar $[-\infty, \infty]$, de uitgebreide verzameling van reële getallen.

Bij de definitie van meetbaarheid laten we ons leiden door het spraakgebruik van de waarschijnlijkheidsrekening. Op pagina 6 hebben we een *kansruimte* gedefinieerd als een maatruimte van de vorm $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, waarbij P een *kansmaat* op $\mathcal{A}$ is (dit wil zeggen dat $P(\Omega) = 1$).

Een *stochastische variabele* is dan een functie $X : \Omega \to \mathbb{R}$; de *verdelingsfunctie* van X is een functie van $\mathbb{R}$ naar $[0, 1]$, gedefinieerd door $F(c) = P\bigl(\{X \leqslant c\}\bigr)$ (de kans dat X waarden kleiner dan of gelijk aan c aanneemt). Wil F zinvol gedefinieerd zijn dan zal voor elke c de verzameling $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leqslant c\}$ meetbaar moeten zijn.

Omdat bij het definiëren van meetbare functies alleen de σ-algebra's van belang zijn bekijken we voorlopig even *meetbare ruimten*, dat zijn 'maatruimten zonder maat': als X een verzameling is en $\mathcal{A}$ een σ-algebra op X dan noemen we $(X, \mathcal{A})$ een *meetbare ruimte.*

4.1. Definitie. Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn. Een functie $f : X \to [-\infty, \infty]$ heet *meetbaar* als $f^{-1}\bigl[[-\infty, c]\bigr] \in \mathcal{A}$ voor alle $c \in \mathbb{R}$.

4.2. Opgave. Toon aan: A is een meetbare verzameling dan en slechts dan als haar karakteristieke functie χ_A een meetbare functie is.

4.3. Opgave.

a) Beschrijf de functies die meetbaar zijn ten opzichte van de σ-algebra uit Opgave 1.15.

* b) Beschrijf voor de meetbare ruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_a)$ (Opgave 1.16) de meetbare functies.
Aanwijzing: Bekijk het getal $s = \sup\bigl\{c : f^{-1}\bigl[[-\infty, c]\bigr] \text{ is aftelbaar}\bigr\}$.

4.4. Definitie. De door de familie $\bigl\{[-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\bigr\}$ voortgebrachte σ-algebra noteren we $\mathcal{B}$. Het paar $\bigl([-\infty, \infty], \mathcal{B}\bigr)$ is dan een meetbare ruimte.

* **4.5.** Opgave. In Opgave 1.27 hebben we van $\mathbb{R}^*$ een metrische ruimte gemaakt. Toon aan dat de Borel-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^*)$ van deze metrische ruimte gelijk is aan de σ-algebra $\mathcal{B}$ (vergelijk Opgave 1.22.3).

4.6. PROPOSITIE. *Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn. Een functie $f : X \to [-\infty, \infty]$ is meetbaar dan en slechts dan als voor elke $B \in \mathcal{B}$ geldt $f^{-1}[B] \in \mathcal{A}$.*

AANWIJZING. Controleer aan de hand van de formules $f^{-1}\big[\mathbb{R}^* \setminus B\big] = X \setminus f^{-1}[B]$ en $f^{-1}\big[\bigcup_i B_i\big] = \bigcup_i f^{-1}[B_i]$ dat de familie $\{B : f^{-1}[B] \in \mathcal{A}\}$ een σ-algebra is. Als f meetbaar is dan bevat deze σ-algebra elk interval $[-\infty, c]$ en dus ...

De volgende stelling geeft een aantal handige karakteriseringen van meetbare functies.

4.7. STELLING. *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte, en $f : X \to [-\infty, \infty]$ een functie. Dan zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(i) *f is meetbaar,*
(ii) *voor elke $c \in \mathbb{R}$ is $f^{-1}\big[(c, \infty]\big]$ meetbaar,*
(iii) *voor elke $c \in \mathbb{R}$ is $f^{-1}\big[[c, \infty]\big]$ meetbaar, en*
(iv) *voor elke $c \in \mathbb{R}$ is $f^{-1}\big[[-\infty, c)\big]$ meetbaar.*

4.8. OPGAVE. Ga na dat we ons in de definitie van meetbaarheid en in de voorgaande tot *rationale* c kunnen beperken.

Er doet zich bij het optellen van meetbare functies een kleine complicatie voor. De somfunctie is immers niet altijd goed gedefinieerd, namelijk als $f(x) = \infty$ en $g(x) = -\infty$ of als $f(x) = -\infty$ en $g(x) = \infty$. We ondervangen dit door in deze gevallen af te spreken dat we $(f + g)(x)$ gelijk aan 0 zullen nemen.

4.9. STELLING. *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte. Laat f en g meetbare functies op X zijn en zij $\alpha \in \mathbb{R}$. Dan zijn $f + g$, $f \cdot g$ en αf ook meetbaar.*

4.10. STELLING. *Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte. Laat $\langle f_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ een rij meetbare functies zijn, die puntsgewijs naar een functie f convergeert. Dan is f meetbaar.*

4.11. OPMERKING. Naast gewone meetbaarheid hebben we voor functies naar $\mathbb{R}$ nog twee noties van meetbaarheid.

1. Als $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte is en $f : X \to \mathbb{R}$ een functie dan noemen we f *Borel-meetbaar* als $f^{-1}[B] \in \mathcal{A}$ voor elke Borel-verzameling B. In het bijzonder noemen we een functie $f : M \to \mathbb{R}$ — waar M een metrische ruimte is — Borel-meetbaar als voor elke Borel-verzameling B van $\mathbb{R}$ het volledig origineel $f^{-1}[B]$ een Borel-verzameling van M is.
2. Een functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (of van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$) heet *Lebesgue-meetbaar* als $f^{-1}\big[(-\infty, c]\big]$ Lebesgue-meetbaar is voor elke $c \in \mathbb{R}$.

In de volgende opgaven zullen we zien dat Borel-meetbaarheid hetzelfde is als gewone meetbaarheid.

4.12. OPGAVEN.

1. Toon aan: als M een metrische ruimte is en $f : M \to \mathbb{R}$ een functie dan geldt: f is Borel-meetbaar dan en slechts dan als voor elke open verzameling O het volledig origineel $f^{-1}[O]$ een Borel-verzameling van M is.
2. Toon aan dat elke continue functie Borel-meetbaar is.

$*$ **4.13.** OPGAVEN.

1. Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte en $f : X \to \mathbb{R}$ een afbeelding. Er geldt: f is Borel-meetbaar dan en slechts dan als $f^{-1}\big[(-\infty, c]\big]$ meetbaar is voor elke $c \in \mathbb{R}$; ofwel: f is Borel-meetbaar dan en slechts dan als f een meetbare functie is.
2. Bewijs Stellingen 4.7, 4.9 en 4.10 voor Borel-meetbare functies.
3. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een differentieerbare functie. Toon aan dat f' Borel-meetbaar is.

Voor Lebesgue-meetbare functies geldt een stelling die erg lijkt op Stelling 3.30. We breiden de daar gebruikte notatie uit naar functies van $\mathbb{R}^2$ naar $[-\infty, \infty]$. Als $f : \mathbb{R}^2 \to [-\infty, \infty]$ zo'n functie is dan is bij een vaste x de functie $f_x : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ gedefinieerd door $f_x(y) = f(x, y)$; evenzo definieren we bij vaste y de functie f^y door $f^y(x) = f(x, y)$.

4.14. STELLING. *Als $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lebesgue-meetbaar is dan is voor bijna alle x de verticale sectie f_x Lebesgue-meetbaar en ook is voor bijna alle y de horizontale sectie f^y Lebesgue-meetbaar. Aanwijzing: Denk aan Opgave 4.8.*

Stapfuncties

Stapfuncties zijn zeer eenvoudige meetbare functies en hebben een makkelijk te definiëren integraal.

4.15. DEFINITIE. Zij $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte. Een meetbare functie $s : X \to [-\infty, \infty]$ is een *stapfunctie* als $s[X]$ eindig is en als $s(x) \in \mathbb{R}$ voor alle x.

We kunnen stapfuncties ook met behulp van karakteristieke functies (zie Opmerking 1.8) beschrijven: zij s een stapfunctie en zij $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ de waardenverzameling van s. Voor elke i is de verzameling $A_i = \{x : s(x) = \alpha_i\}$ meetbaar, en voorts geldt $X = \bigcup_i A_i$. Nu kunnen we de stapfunctie f als lineaire combinatie van karakteristieke functies schrijven:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}. \qquad (*)$$

N.B. Tenzij uitdrukkelijk anders vermeld gaan we er van uit dat in $(*)$ de verzamelingen zó gekozen zijn dat $X = \bigcup_i A_i$ en $A_i \cap A_j = \varnothing$ als $i \neq j$. We doen echter niet altijd zo zuinig mogelijk; het kan best zo zijn dat $i \neq j$ en toch $\alpha_i = \alpha_j$.

4.16. OPGAVE. Ga na dat elke lineaire combinatie van karakteristieke functies van meetbare verzamelingen een stapfunctie is.

De volgende stelling laat zien dat we alle meetbare functies kunnen krijgen door puntgewijze limieten van rijen stapfuncties te nemen. Dit feit wordt keer op keer gebruikt bij het bewijzen van stellingen over integralen.

4.17. STELLING. *Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn en $f : X \to [0, \infty]$ een meetbare functie. Dan bestaat een rij stapfuncties $\langle s_n \rangle_n$ op X zó dat*

(i) $\mathbf{0} \leqslant s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \cdots \leqslant f$, *en*
(ii) $s_n \xrightarrow{p} f$.

In woorden: de rij $\langle s_n \rangle_n$ is stijgend en convergeert puntsgewijs naar f.

BEWIJS. Voor $n \in \mathbb{N}$ en voor $i \leqslant n2^n$ definiëren we

$$E_{n,i} = \{x : \frac{i-1}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{i}{2^n}\} \text{ en } F_n = \{x : f(x) \geqslant n\}.$$

Uit deze verzamelingen maken we stapfuncties als volgt:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

Dit lijkt erger dan het is; merk op dat $s_n(x) = (i-1)2^{-n}$ als $(i-1)2^{-n} \leqslant f(x) < i2^{-n}$ en dat $s_n(x) = n$ als $f(x) \geqslant n$. Hieruit volgt dat $f(x) - s_n(x) < 2^{-n}$ zodra $f(x) < n$. Als $f(x) = \infty$ dan is $s_n(x) = n$ voor alle n. (Het kan geen kwaad een plaatje van s_1, s_2 en s_3 te tekenen voor het bijzondere geval $f(x) = x$.)

Merk ook nog op dat $s_n \xrightarrow{u} f$ als f begrensd is. □

4.18. OPMERKING. Merk op dat het omgekeerde van de stelling ook geldt: elke puntsgewijze limiet van stapfuncties is meetbaar. Dit volgt uit Stelling 4.10.

Integralen

We kunnen nu integralen definiëren, de definitie lijkt op die van de onderintegraal bij Riemann-integreerbaarheid. We definiëren integreerbaarheid eerst voor niet-negatieve meetbare functies; in Definitie 4.30 definiëren we integralen voor willekeurige meetbare functies.

4.19. DEFINITIE. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Voor een stapfunctie $s : X \to [0, \infty)$ gegeven door $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$, met $\{A_i : i = 1, \dots, n\}$ disjunct en $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$, definiëren we zijn integraal op X door

$$\int_X s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

(Denk aan de afspraak $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$.)

Voor een willekeurige meetbare functie $f : X \to [0, \infty]$ definiëren we

$$\int_X f\, d\mu = \sup\left\{\int_X s\, d\mu : \mathbf{0} \leqslant s \leqslant f \text{ en } s \text{ is een stapfunctie}\right\}.$$

Verder definiëren we voor $E \in \mathcal{A}$ de integraal van f over E door $\int_E f\, d\mu = \int_X f \cdot \chi_E\, d\mu$.

Tenslotte noemen we een niet-negatieve meetbare functie f *integreerbaar op* E als $\int_E f\, d\mu < \infty$.

Als we in de voorgaande definitie $X = \mathbb{R}$ nemen, $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ en $\mu = m$ dan krijgen we een nieuwe integraal voor functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$, de *Lebesgue-integraal*; deze integraal is voor een ruimere klasse functies gedefinieerd dan de Riemann-integraal.

4.20. OPGAVE. In Opgave 4.3 zijn de meetbare functies ten opzichte van de σ-algebra uit Opgave 1.15 bepaald en in Opgave 1.33 is deze σ-algebra van een maat voorzien. Bereken nu de integralen van deze meetbare functies.

4.21. Opgave. In Opgave 4.3 zijn de functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ beschreven die meetbaar zijn ten opzichte van $\mathcal{A}_a$.

a) Bereken hun integralen ten opzichte van de maat uit Opgave 1.34.

b) Bereken hun integralen ten opzichte van de telmaat.

4.22. Opgave. De karakteristieke functie $\chi_{\mathbb{Q}}$ van $\mathbb{Q}$ is niet Riemann-integreerbaar (dit is welbekend) maar wel Lebesgue-integreerbaar en $\int_{\mathbb{R}} f\,dm = 0$.

4.23. Opgave. Bewijs dat voor een stapfunctie $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$ en $E \in \mathcal{A}$ geldt $\int_E s\,d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E)$.

De volgende stelling bevat een waslijst aan eigenschappen van de Lebesgue-integraal; we zullen ze vaak zonder expliciete verwijzing gebruiken.

4.24. Stelling. *Voor alle niet-negatieve meetbare functies f en g en alle meetbare verzamelingen A, B en E geldt*

(i) *Als $f \leqslant g$ dan $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$,*

(ii) *als $A \subseteq B$ dan $\int_A f\,d\mu \leqslant \int_B f\,d\mu$,*

(iii) *als $f(x) = 0$ voor alle $x \in E$ dan $\int_E f\,d\mu = 0$ (ook als $\mu(E) = \infty$—hier is de regel $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$ voor afgesproken),*

(iv) *als $\mu(E) = 0$ dan $\int_E f\,d\mu = 0$,*

(v) *als $\int_E f\,d\mu = 0$ dan $\mu(C) = 0$, waar $C = \{x \in E : f(x) > 0\}$ en*

(vi) *als $\int_E f\,d\mu < \infty$ dan $\mu(C) = 0$, waar $C = \{x \in E : f(x) = \infty\}$,*

(vii) *voor alle a met $0 \leqslant a \leqslant \infty$ hebben we $\int_E af\,d\mu = a\int_E f\,d\mu$.*

4.25. Stelling. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en laat s en t niet-negatieve stapfuncties zijn.*

(i) $\int_X s + t\,d\mu = \int_X s\,d\mu + \int_X t\,d\mu$.

(ii) *Als $E \in \mathcal{A}$ de vereniging is van een disjuncte collectie $\{E_i : i \in \mathbb{N}\}$ uit $\mathcal{A}$ dan*

$$\int_E s\,d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{E_i} s\,d\mu.$$

4.26. Opmerking. Omdat zeker $\int_\varnothing s\,d\mu = 0$ volgt in feite uit onderdeel (i) van de voorgaande stelling dat voor elke niet-negatieve stapfunctie s de functie

$$\nu(E) = \int_E s\,d\mu$$

een nieuwe maat op $\mathcal{A}$ definieert.

4.27. Voorbeeld. Neem op $\mathbb{N}$ de telmaat τ (zie Voorbeeld 1.32). Dan is elke functie $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$ meetbaar en heeft als integraal:

$$\int_{\mathbb{N}} f\,d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).$$

We zien dat reeksen óók integralen zijn. Elke stelling die we over integralen kunnen bewijzen zal ook voor reeksen gelden.

4.28. DEFINITIE. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en $f : X \to [-\infty, \infty]$ een meetbare functie. Definieer f^+ en f^- door $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$ en $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$.

4.29. OPGAVE. Toon aan dat f^+ en f^- meetbaar zijn en dat $f = f^+ - f^-$.

Met behulp van f^+ en f^- definiëren we nu integralen voor willekeurige meetbare functies, doch alleen voor die functies waarvan de absolute waarde een eindige integraal heeft.

4.30. DEFINITIE. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Zij $f : X \to [-\infty, \infty]$ meetbaar. We noemen f *integreerbaar* op $E \in \mathcal{A}$ als $\int_E |f| \, d\mu < \infty$, en we definiëren in dat geval

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f^+ \, d\mu - \int_E f^- \, d\mu.$$

N.B. Dit is welgedefinieerd omdat $f^+, f^- \leqslant |f|$.

4.31. OPGAVE. Bewijs dat $|\int_E f \, d\mu| \leqslant \int_E |f| \, d\mu$ voor elke functie die integreerbaar is over E.

4.32. OPGAVE. Bekijk Opgaven 4.20 en 4.21; welke meetbare functies zijn integreerbaar?

4.33. OPGAVE. Op $\mathbb{R}$ kunnen we met behulp van de telmaat twee maatruimten maken: $(\mathbb{R}, 2^{\mathbb{R}}, \tau)$ en $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_a, \tau)$. Toon aan dat deze maatruimten *precies* dezelfde integreerbare functies hebben (de eerste maatruimte heeft wel veel meer meetbare functies).

Hoofdstuk 5

Convergentiestellingen

In dit hoofdstuk behandelen we drie fundamentele stellingen over integralen en maatruimten. Deze stellingen gelden dus in het bijzonder ook voor de Lebesgue-integraal; eenvoudige voorbeelden laten zien dat ze niet voor de Riemann-integraal gelden.

Men zou kunnen denken, met het oog op de toepassingen in dit dictaat, dat het niet de moeite loont deze resultaten in hun volle algemeenheid (dus niet alleen voor de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$) te bewijzen. Dit is om twee redenen een misvatting. Ten eerste kost het aantonen van de algemene stellingen geen extra moeite en ten tweede komen bij de kansrekening en andere vakken wel degelijk andere maatruimten ter sprake.

In feite zien we hier het nut van abstractie: Door slechts drie stellingen te bewijzen verkrijgen we gereedschap dat in vele situaties te gebruiken is.

De Monotone-convergentiestelling

Deze stelling werd in 1906 door de Italiaanse wiskundige B. Levi ontdekt.

> Se una succesione non descrescente di funzioni $f_n(x)$ positive ed integrabili nell'aggregato $\mathfrak{A}$ ha in $\mathfrak{A}$ un limite $f(x)$, e se esiste ed è finito il
>
> $$\lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{A}} f_n(x)\,dx,$$
>
> la funzione $f(x)$ è integrabile in $\mathfrak{A}$ e si ha
>
> $$\int_{\mathfrak{A}} f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_{\mathfrak{A}} f_n(x)\,dx. \tag{2}$$
>
> *B. Levi* [1906]

Tegenwoordig wordt de stelling iets algemener geformuleerd.

5.1. Stelling. *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Laat $\langle f_n\rangle_n$ een rij meetbare functies van X naar $[0,\infty]$ zijn. Neem aan*

(i) *de rij $\langle f_n\rangle_n$ is stijgend, dus $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \cdots$ voor alle $x \in X$, en*

(ii) *de rij $\langle f_n\rangle_n$ convergeert puntsgewijs naar een functie f.*

Dan is de functie f ook meetbaar en

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu.$$

Bewijs. Uit Stelling 4.10 volgt dat f meetbaar is. Zij nu $\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu$ ($\alpha = \infty$ is niet uitgesloten). Nu geldt $f_n \leqslant f$ voor elke n, dus ook $\int_X f_n\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu$ voor elke n. Hieruit volgt dan dat $\alpha \leqslant \int_X f\,d\mu$. Als $\alpha = \infty$ dan zijn we dus klaar.

Neem daarom aan dat $\alpha < \infty$; we bewijzen dat $\int_X f\,d\mu \leqslant \alpha$. We doen dit door voor elke stapfunctie s met $\mathbf{0} \leqslant s \leqslant f$ te bewijzen dat $\int_X s\,d\mu \leqslant \alpha$. Neem zo'n stapfunctie s

en neem $c \in (0,1)$ willekeurig. We tonen aan dat $\alpha \geqslant c \int_X s\,d\mu$; daar c willekeurig is volgt hier dan uit dat ook $\alpha \geqslant \int_X s\,d\mu$.

We beginnen met een rij verzamelingen $\langle E_n \rangle_n$ te maken, als volgt

$$E_n = \{x : f_n(x) \geqslant c \cdot s(x)\}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Hier hebben we c nodig: omdat $c \cdot s(x) < s(x) \leqslant f(x)$ voor elke x met $0 < s(x) \leqslant f(x)$ volgt nu dat $X = \bigcup_n E_n$. Ook is elke E_n meetbaar (want de functies $f_n - cs$ zijn meetbaar). We krijgen nu

$$\int_X f_n\,d\mu \geqslant \int_{E_n} f_n\,d\mu \geqslant c \int_{E_n} s\,d\mu \qquad (*)$$

voor elke n. Bedenk nu dat de functie $\nu(A) = c \int_A s\,d\mu$ een maat op $\mathcal{A}$ definieert (Opmerking 4.26); we kunnen dan op grond van Stelling 1.36 concluderen dat

$$\lim_{n\to\infty} c \int_{E_n} s\,d\mu = c \int_X s\,d\mu.$$

Pas nu $(*)$ toe; er komt

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \geqslant c \int_X s\,d\mu,$$

hetgeen we net wilden hebben. □

5.2. OPGAVE. Maak een stijgende rij Riemann-integreerbare functies $\langle f_n \rangle_n$ op het interval $[0,1]$ met begrensde puntsgewijze limiet f die niet Riemann-integreerbaar is.

Uit de Monotone convergentiestelling kunnen we nu heel wat nuttige eigenschappen van de Lebesgue-integraal afleiden.

5.3. OPGAVE. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Laat f en g niet-negatieve meetbare functies zijn en $E \in \mathcal{A}$. Dan

$$\int_E f + g\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu.$$

5.4. OPGAVE. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en $E \in \mathcal{A}$. Bewijs: als f en g integreerbaar zijn op E dan is $f + g$ dat ook en $\int_E f + g\,d\mu = \int_E f\,d\mu + \int_E g\,d\mu$. N.B. Herinner dat we hebben afgesproken dat $(f+g)(x) = 0$ als $f(x) = \pm\infty$ en $g(x) = \mp\infty$.

Voor reeksen met positieve termen krijgen we nu de volgende stelling.

5.5. STELLING. *Zij $\sum f_n$ een reeks van niet-negatieve meetbare functies met somfunctie f. Dan is f meetbaar en*

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

Vergelijk de volgende stelling eens met Stelling 1.36(ii).

5.6. STELLING. *Neem aan $\langle f_n \rangle_n$ is een dalende rij niet-negatieve meetbare functies met (meetbare) puntsgewijze limiet f. Dan geldt*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu,$$

mits *er een* n *is zódat* $\int_X f_n\,d\mu < \infty$. *(Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat het voorbehoud nodig is.)*

Denk bij de volgende twee opgaven aan Voorbeeld 4.27.

∗ **5.7.** OPGAVE. Zij $\langle a_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\rangle$ een 'dubbelrij' in $[0, \infty]$.

a) Bewijs

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}.$$

b) Neem aan dat voor elke m de rij $\langle a_{mn}\rangle_n$ stijgend is, met limiet b_m. Bewijs

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m = \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}.$$

∗ **5.8.** OPGAVE. Beschouw de volgende dubbelrij $\langle a_{mn} : m, n \in \mathbb{N}\rangle$:

$$a_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{als } m > n, \text{ en} \\ 2^{m-n} & \text{als } n \geqslant m. \end{cases}$$

Bepaal $\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ voor elke m, en $\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$. Probeer de uitkomst te verklaren.

∗ **5.9.** OPGAVE. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Zij $f : X \to [0, \infty]$ meetbaar. Dan definieert

$$\nu(A) = \int_A f\,d\mu$$

een maat op $\mathcal{A}$.

Het Lemma van Fatou

Het Lemma van Fatou gaat niet letterlijk over het verwisselen van limiet en integraal maar over het verwisselen van lim inf en integraal. Het is zeer handig bij het afschatten van bepaalde integralen.

> Si des fonctions positives, bornées sommables: $f_1(x)$, $f_2(x)$, … tendent vers une fonction bornée ou non $f(x)$ et si
>
> $$\int_a^b f_n(x)\,dx$$
>
> reste, quel que soit n, inférieur à un nombre fixe, la fonction $f(x)$ est intégrable, et l'on a:
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx \leqq \text{lim. inf.} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$
>
> *P. Fatou* [1906]

Het lemma kan wat algemener geformuleerd worden dan hierboven; de rij functies hoeft niet te convergeren. Voor we het Lemma van Fatou in de moderne vorm formuleren geven we eerst een definitie.

5.10. DEFINITIE. Zij $\langle a_n \rangle_n$ een rij reële getallen. We definiëren

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geqslant n} a_k$$

en

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geqslant n} a_k.$$

Deze getallen heten respectievelijk de *limes inferior* en de *limes superior* van de rij $\langle a_n \rangle_n$. Voor een rij functies definiëren we lim inf en lim sup puntsgewijs; $f = \liminf_n f_n$ betekent dus dat voor elke x afzonderlijk geldt $f(x) = \liminf_n f_n(x)$.

5.11. STELLING (Lemma van Fatou). *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en $\langle f_n \rangle_n$ een rij niet-negatieve meetbare functies op X. Dan geldt*

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

BEWIJS. We definiëren een stijgende rij meetbare functies $\langle g_n \rangle_n$ door $g_n = \inf_{k \geqslant n} f_k$. Dan convergeert $\langle g_n \rangle_n$ monotoon naar $\liminf f_n$, dus $\int_X \liminf f_n \, d\mu = \lim \int_X g_n \, d\mu$. Verder geldt $g_n \leqslant f_k$ voor $k \geqslant n$, dus $\int_X g_n \, d\mu \leqslant \inf_{k \geqslant n} \int_X f_k \, d\mu$ voor elke n. We concluderen dat $\lim \int_X g_n \, d\mu \leqslant \liminf \int_X f_n \, d\mu$. □

5.12. OPGAVE. Maak het bewijs van het Lemma van Fatou volledig door te bewijzen dat de functies g_n meetbaar zijn.

5.13. OPGAVE. Definieer een rij $\langle f_n \rangle_n$ meetbare functies op $[0,1]$ door $f_n = \chi_{[0,\frac{1}{2}]}$ als n even is en $f_n = \chi_{(\frac{1}{2},1]}$ als n oneven is. Bepaal $\liminf f_n$ en $\liminf \int_{[0,1]} f_n \, dm$. Wat zegt dit over het Lemma van Fatou?

De Gedomineerde-convergentiestelling

De Monotone-convergentiestelling geeft ons veel meer vrijheid bij het verwisselen van limieten en integralen dan we bij de Riemann-integraal hebben. Er zijn echter genoeg rijen die niet monotoon zijn, die puntsgewijs convergeren en waarbij we graag ook limiet en integraal willen verwisselen (zie bijvoorbeeld Opgaven 6.3 en 6.9). De Gedomineerde-convergentiestelling zegt dat als alle termen van de rij gedomineerd worden door één integreerbare functie het verwisselen van limieten en integralen toegestaan is. Dat enig voorbehoud nodig zal zijn kunnen we zien aan Stelling 5.6 en Opgave 5.8.

Lebesgue formuleerde de Gedomineerde-convergentiestelling als volgt.

> *Une suite convergente de fonctions sommables f_i est intégrable terme à terme lorsqu'il existe une fonction sommable F telle que l'on ait, quels que soient i et les variables, $|f_i| \leqq |F|$.* *H. Lebesgue* [1908]

5.14. STELLING (De Gedomineerde-convergentiestelling). *Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en laat $\langle f_n \rangle_n$ een rij meetbare functies van X naar $\mathbb{R}^*$ zijn. Neem aan*

(i) *de rij $\langle f_n \rangle_n$ is puntsgewijs convergent met limiet f, en*

(ii) *er is één integreerbare functie $g : X \to [0, \infty]$ zó dat $|f_n| \leqslant g$ voor alle n.*

Dan zijn alle functies f_n en de functie f integreerbaar en

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

BEWIJS. Om te beginnen: f is meetbaar als puntsgewijze limiet van meetbare functies. Dat elke f_n integreerbaar is volgt meteen: $|f_n| \leqslant g$ dus $\int_X |f_n|\,d\mu \leqslant \int_X g\,d\mu < \infty$. Ook geldt $|f| \leqslant g$, dus f is integreerbaar.

Rest nog te bewijzen dat $\int_X f\,d\mu = \lim \int_X f_n\,d\mu$. Welnu, pas het Lemma van Fatou toe op de rij $\langle g + f_n\rangle_n$ en bedenk dat $\liminf f_n = \lim f_n$:

$$\int_X g\,d\mu + \int_X f\,d\mu = \int_X g + f\,d\mu \leqslant \liminf \int_X g + f_n\,d\mu = \int_X g\,d\mu + \liminf \int_X f_n\,d\mu.$$

Pas het Lemma van Fatou ook toe op de rij $\langle g - f_n\rangle_n$ en bedenk nu dat $\liminf -a_n = -\limsup a_n$:

$$\int_X g\,d\mu - \int_X f\,d\mu = \int_X g - f\,d\mu \leqslant \liminf \int_X g - f_n\,d\mu = \int_X g\,d\mu - \limsup \int_X f_n\,d\mu.$$

Alle berekeningen zijn geoorloofd omdat elke integraal die we bekijken eindig is. Als we $\int_X g\,d\mu$ overal wegstrepen en de ongelijkheden combineren dan vinden we

$$\limsup \int_X f_n\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu \leqslant \liminf \int_X f_n\,d\mu$$

en dit zegt niets anders dan $\int_X f\,d\mu = \lim \int_X f_n\,d\mu$. □

Enige tijd na de ontdekking ervan had Lebesgue de Gedomineerde-convergentiestelling in iets andere vorm nodig:

> α' La suite u_1, u_2, ..., formée de fonctions sommables et convergeant vers une fonction sommable u est intégrable terme à terme si, quel que soit i et x, on a
>
> $$\big|u(x) - u_i(x)\big| \leqslant V(x),$$
>
> $V(x)$ étant une fonction sommable. *H. Lebesgue* [1909]

** **5.15.** OPGAVE. Laat zien dat Lebesgue's twee formuleringen van de Gedomineerde-convergentiestelling equivalent zijn.

5.16. OPGAVE. Zij $\langle a_n\rangle_n$ een begrensde rij getallen in $\mathbb{R}$. Bewijs

a) $\liminf -a_n = -\limsup a_n$;

b) $\lim a_n$ bestaat dan en slechts dan als $\liminf a_n = \limsup a_n$.

* **5.17.** OPGAVE. Bekijk nogmaals Opgave 5.8; waarom is de Gedomineerde-convergentiestelling niet toepasbaar?

* **5.18.** OPGAVE. Zij $A \subseteq [0,1]$ een meetbare verzameling en $h > 0$. Toon aan:

$$\frac{1}{2h} \int_{[0,1]} m\big(A \cap (x-h, x+h)\big)\,dm \leqslant m(A).$$

Aanwijzing: Ga na dat $\mu(A) = \frac{1}{2h} \int_{[0,1]} m\big(A \cap (x-h, x+h)\big)\,dm$ een maat definieert. Ga vervolgens na dat de ongelijkheid zeker voor intervallen geldt.

5.19. OPMERKING. We besluiten dit hoofdstuk met een opmerking over vectornormen. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. We definiëren twee bij X behorende vectorruimten:

$$\mathcal{L}_1(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathbb{R}^X : f \text{ is integreerbaar}\},$$

en

$$\mathcal{L}_2(X, \mathcal{A}, \mu) = \{f \in \mathbb{R}^X : f^2 \text{ is integreerbaar}\}.$$

Op $\mathcal{L}_1$ definiëren we $\|f\|_1 = \int_X |f|\, d\mu$, en voor $f \in \mathcal{L}_2$ schrijven we $\|f\|_2 = \sqrt{\int_X f^2\, d\mu}$.

(i) Neem eerst $X = \{1, \dots, n\}$ met de telmaat; ga na dat $\mathcal{L}_2$ niets anders is dan $\mathbb{R}^n$ met de Euclidische norm $\|\cdot\|_2$. De ruimte $\mathcal{L}_1$ levert een nieuwe norm op $\mathbb{R}^n$, de *somnorm*, gegeven door

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|;$$

deze norm is equivalent met $\|\cdot\|_2$, hetgeen betekent dat hij dezelfde topologie als $\|\cdot\|_2$ bepaalt.

(ii) Neem vervolgens $X = \mathbb{N}$ met de telmaat. Dan krijgen we ℓ_1 en ℓ_2.

(iii) Tenslotte bekijken we $X = [0, 1]$ met de Lebesgue-maat. De ruimten $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$ zijn nu geen genormeerde ruimten (waarom niet?), maar in beide gevallen is de deelruimte $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ van de continue functies wel genormeerd. Deze ruimten kennen we al uit de cursus *Metrische topologie*.

* **5.20.** OPGAVEN.

1. Neem $[0, 1]$ met de Lebesgue-maat en neem $f \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Bewijs dat $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2$.
   Aanwijzing: Kijk eerst naar stapfuncties.
2. Geef een voorbeeld van een continue functie f op $[-1, 1]$ waarvoor $\|f\|_1 > \|f\|_2$.

Met behulp van de Gedomineerde-convergentiestelling kunnen we soms onverwachte resultaten bewijzen.

5.21. OPGAVE. Gegeven is een rij $\langle f_n \rangle_n$ meetbare functies met de eigenschap dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < \infty.$$

Dan is $\sum_n f_n(x)$ absoluut convergent voor bijna alle x; de somfunctie f is integreerbaar en $\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu$.

5.22. OPGAVE. Geef een voorbeeld van een rij $\langle f_n \rangle_n$ van continue functies van $[0, 1]$ naar $\mathbb{R}$ met (1) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ voor alle x; (2) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\, dx = 0$ en (3) de rij $\langle f_n(x) \rangle_n$ convergeert voor geen enkele x.

Hoofdstuk 6

Riemann-integratie en herhaalde integralen

In dit hoofdstuk bekijken we het verband van de Lebesgue-integralen met de welbekende Riemann-integralen. Aan het eind zeggen we ook nog iets over herhaalde integralen.

Gewone Riemann-integralen

Met behulp van de Gedomineerde-convergentiestelling kunnen we laten zien dat Riemann-integreerbare functies ook Lebesgue-integreerbaar zijn en dat de beide integralen dezelfde waarde hebben. Uit het bewijs kunnen we ook een karakterisering van Riemann-integralen afleiden.

6.1. STELLING. *Laat $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integreerbaar zijn. Dan is f ook Lebesgue-integreerbaar op $[a,b]$ en $\int_{[a,b]} f \, dm = \int_a^b f(x)\,dx$.*

BEWIJS. Riemann-integreerbare functies zijn per definitie begrensd; er is dus een getal M zó dat $|f(x)| \leqslant M$ voor alle x. Hieruit volgt al dat f Lebesgue-*integreerbaar* is, met $\int_{[a,b]} |f| \, dm \leqslant M(b-a)$, *mits* we vast kunnen stellen dat f Lebesgue-*meetbaar* is.

Kies een rij partities $\langle P_n \rangle_n$ zó dat $\lim_n L(P_n, f) = \lim_n U(P_n, f) = \int_a^b f(x)\,dx$ en neem aan dat P_{n+1} telkens een verfijning van P_n is.

Maak nu, voor elke n, stapfuncties s_n en t_n als volgt: schrijf $P_n = \{x_{n,0}, \ldots, x_{n,k_n}\}$ en definieer

$$s_n(x) = m_{n,i} \text{ als } x_{i-1} < x \leqslant x_i$$
$$t_n(x) = M_{n,i} \text{ als } x_{i-1} < x \leqslant x_i$$

en $s_n(a) = t_n(a) = f(a)$. Merk op dat s_n en t_n Borel-meetbaar zijn.

Het is eenvoudig na te gaan dat $s_n(x) \leqslant s_{n+1}(x) \leqslant f(x) \leqslant t_{n+1}(x) \leqslant t_n(x)$ voor alle x en alle n. Verder geldt $\int_{[a,b]} s_n \, dm = L(P_n, f)$ en $\int_{[a,b]} t_n \, dm = U(P_n, f)$ voor elke n.

Definieer $f_-(x) = \lim_n s_n(x)$ en $f_+(x) = \lim_n t_n(x)$; deze functies zijn Borel-meetbaar. De rijen $\langle s_n \rangle_n$ en $\langle t_n \rangle_n$ worden gedomineerd door de constante functie M; we kunnen dus de Gedomineerde-convergentiestelling toepassen en concluderen dat f_- en f_+ Lebesgue-integreerbaar zijn over $[a,b]$ en

$$\int_{[a,b]} f_- \, dm = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f_+ \, dm. \tag{$*$}$$

Zij $N = \{x : f_-(x) < f_+(x)\}$ en merk op dat $m(N) = 0$ omdat $\int_{[a,b]} f_+ - f_- \, dm = 0$.

Voor een willekeurige $c \in \mathbb{R}$ geldt

$$f_+^{-1}\big[[-\infty, c]\big] \subseteq f^{-1}\big[[-\infty, c]\big] \subseteq f_-^{-1}\big[[-\infty, c]\big]$$

en ook

$$N_c = f^{-1}\bigl[[-\infty, c]\bigr] \setminus f_+^{-1}\bigl[[-\infty, c]\bigr] \subseteq N.$$

Hieruit volgt dat $f^{-1}\bigl[[-\infty, c]\bigr]$ de vereniging is van een Borel-verzameling, namelijk $f_+^{-1}\bigl[[-\infty, c]\bigr]$, en een verzameling van de maat 0, namelijk N_c. We concluderen dat f Lebesgue-meetbaar is.

Tenslotte, omdat $f_- \leqslant f \leqslant f_+$ volgt met $(*)$ dat $\int_{[a,b]} f\, dm = \int_a^b f(x)\, dx$. □

6.2. OPGAVE. Definieer, in het voorgaande bewijs, $C = [a, b] \setminus (N \cup \bigcup_n P_n)$. Toon aan:
(1) $m(C) = b - a$ en
(2) f is continu in elk punt van C (dus f is bijna overal continu).
Aanwijzing: Als $x \in C$ dan geldt $\lim_n s_n(x) = f(x) = \lim_n t_n(x)$. Kies, bij $\varepsilon > 0$, een n met $f(x) - \varepsilon < s_n(x)$ en $t_n(x) < f(x) + \varepsilon$; kies ook een i met $x_{n,i-1} < x < x_{n,i}$. Op het interval $(x_{n,i-1}, x_{n,i})$ geldt $s_n(x) \leqslant f(y) \leqslant t_n(x)$.

6.3. OPGAVE. Zij $\langle f_n \rangle_n$ een rij continue functies op het interval $[0, 1]$ zó dat voor alle x en n geldt $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$. Neem ook aan dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ voor alle x. Dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0.$$

a) Bewijs dit met behulp van de Gedomineerde-convergentiestelling.

$**$ b) Probeer dit ook eens te bewijzen *zonder* de Lebesgue-theorie te gebruiken. (Zie voor inspiratie: ARZELÀ [1885], OSGOOD [1897] en EBERLEIN [1957].)

6.4. OPGAVE. Zij $\langle f_n \rangle_n$ een rij Riemann-integreerbare functies op het interval $[a, b]$ die puntsgewijs convergeert naar de Riemann-integreerbare functie f. Leg uit waarom $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.

6.5. OPGAVE. Bewijs:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi e^{-R \sin t} dt = 0.$$

Uit het bewijs van Stelling 6.1 en Opgave 6.2 volgt dat een Riemann-integreerbare functie bijna overal continu is. Het omgekeerde geldt ook.

6.6. STELLING. *Zij $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ een begrensde functie die bijna overal continu is. Dan is f Riemann-integreerbaar op $[a, b]$.*

BEWIJS. Zij $N = \{x : f \text{ is niet continu in } x\}$ en $M = \sup_x \bigl|f(x)\bigr|$. Neem $\varepsilon > 0$; kies een open verzameling U om N met $m(U) < \varepsilon$ en kies voor elke $x \in [a, b] \setminus N$ een open interval $I_x = (c_x, d_x)$ om x zó dat $\bigl|f(y) - f(x)\bigr| < \varepsilon$ voor $y \in [c_x, d_x]$. De verzameling $C = [a, b] \setminus U$ is compact, er zijn dus (eindig veel) $x_1, \ldots, x_n$ in C zó dat $C \subseteq \bigcup_i I_{x_i}$.

Zij $P = \{p_0, \ldots, p_m\}$ de partitie van $[a, b]$ die bestaat uit a, b en alle eindpunten van de intervallen $I_{x_1}, \ldots, I_{x_n}$. Merk op: als (p_{j-1}, p_j) de verzameling C snijdt dan snijdt het een van de intervallen (c_{x_i}, d_{x_i}) en dus moet $c_{x_i} \leqslant p_{j-1} < p_j \leqslant d_{x_i}$. Conclusie: het interval (p_{j-1}, p_j) ligt geheel binnen U of het ligt geheel binnen een interval I_{x_i}; zij

$J = \{j : (p_{j-1}, p_j) \subseteq U\}$ en $K = \{j : (p_{j-1}, p_j) \nsubseteq U\}$. Hiermee kunnen we het verschil tussen $U(f, P)$ en $L(f, P)$ uitwerken:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{j \in J} (M_j - m_j)(p_j - p_{j-1}) + \sum_{j \in K} (M_j - m_j)(p_j - p_{j-1}).$$

Als $j \in J$ dan geldt $M_j - m_j \leqslant 2M$ en als $j \in K$ dan geldt $M_j - m_j \leqslant 2\varepsilon$. We zien:

$$U(f,P) - L(f,P) \leqslant 2M \sum_{j \in J} (p_j - p_{j-1}) + 2\varepsilon \sum_{j \in K} (p_j - p_{j-1}).$$

Maar $\sum_{j \in J} (p_j - p_{j-1}) \leqslant m(U) < \varepsilon$ en $\sum_{j \in K} (p_j - p_{j-1}) \leqslant b - a$. Conclusie $U(f,P) - L(f,P) \leqslant 2(M + b - a)\varepsilon$. Door ε te laten variëren volgt nu dat $\int_a^b f(x)\, dx$ bestaat. $\square$

Oneigenlijke Riemann-integralen

De volgende stelling geeft aan wat we mogen verwachten voor oneigenlijk Riemann-integreerbare functies.

6.7. STELLING. *Zij $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ een functie met de eigenschap dat de Riemann-integraal $\int_a^c f(x)\, dx$ bestaat voor elke $c < b$. Neem aan dat $\lim_{c \to b} \int_a^c \bigl|f(x)\bigr|\, dx$ bestaat en eindig is. Dan is f Lebesgue-integreerbaar op $[a, b)$ en $\int_{[a,b)} f\, dm = \int_a^b f(x)\, dx$.*

BEWIJS. In het bewijs hoeven we geen onderscheid te maken tussen de gevallen $b < \infty$ en $b = \infty$. Uit de theorie van de Riemann-integraal weten we al dat $\int_a^b f(x)\, dx$ bestaat.

Zij nu $\langle c_n \rangle_n$ een willekeurige rij in $[a, b)$ met limiet b en definieer een rij $\langle f_n \rangle_n$ door $f_n = f \cdot \chi_{[a, c_n]}$. Dan is $\bigl\langle |f_n| \bigr\rangle_n$ een stijgende rij niet-negatieve Lebesgue-meetbare functies die puntsgewijs naar f convergeert. De Monotone-convergentiestelling en Stelling 6.1 impliceren nu dat

$$\int_{[a,b)} |f|\, dm = \lim_{n \to \infty} \int_{[a, c_n]} |f|\, dm = \lim_{n \to \infty} \int_a^{c_n} \bigl|f(x)\bigr|\, dx = \int_a^b \bigl|f(x)\bigr|\, dx.$$

We zien dat f Lebesgue-integreerbaar is op $[a, b)$. De Gedomineerde-convergentiestelling geeft nu dat ook

$$\int_{[a,b)} f\, dm = \lim_{n \to \infty} \int_{[a, c_n]} f\, dm = \lim_{n \to \infty} \int_a^{c_n} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$\square$

Er is niet veel fantasie nodig om links- en tweezijdige versies te formuleren en bewijzen.

6.8. OPGAVE. Bewijs:

$$\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}.$$

6.9. OPGAVE. Een (zeer) zwakke vorm van de Formule van Stirling is

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}. \qquad (\dagger)$$

Rechtvaardig de volgende afleiding van deze limiet (geef in het bijzonder aan welke convergentiestelling gebruikt wordt):

Neem de logaritme van het linkerlid, dit wordt

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right).$$

Het rechterlid is de integraal, over $(0,1]$, van een stapfunctie s_n. De zo verkregen rij stapfuncties convergeert puntsgewijs naar $\ln x$. Dan volgt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(\frac{i}{n}\right) = \int_{(0,1]}\ln\, dm = \int_0^1 \ln x\, dx = -1.$$

Na het nemen van de e-macht krijgen we (†).

6.10. Opgave. Gok de waarden van de volgende limieten.

a) $\lim_{n\to\infty}\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n e^{\frac{x}{2}}\, dx$;

b) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}\, dx$.
Rechtvaardig je antwoorden.

Niet alles gaat goed

In Stelling 6.7 is niet voor niets de voorwaarde opgenomen dat $|f|$ oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $[a,b)$. Zonder deze aanname geldt de stelling niet.

6.11. Opgave. Definieer

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{als } x \neq 0 \\ 1 & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Deze functie is continu op heel $\mathbb{R}$.

a) Toon aan dat f oneigenlijk Riemann-integreerbaar is op $[0,\infty)$.
Aanwijzing: Pas partiële integratie toe.

b) Toon aan dat f niet Lebesgue-integreerbaar is op $[0,\infty)$. *Aanwijzing*: Laat zien dat $\int_{[(k-1)\pi,k\pi]}|f|\, dm \geqslant \frac{2}{k\pi}$.

6.12. Opmerking. Het verschijnsel dat sommige oneigenlijk Riemann-integreerbare functies niet Lebesgue-integreerbaar zijn laat zich verklaren uit het feit dat bij de oneigenlijke Riemann-integraal de *volgorde* een grote rol speelt; hierdoor worden bijvoorbeeld in Opgave 6.11 alleen de intervallen van de vorm $[0,b]$ bekeken. Bij de Lebesgue-integraal gebeurt dit uitdrukkelijk niet; daar wordt over de hele verzameling tegelijk geïntegreerd en is elk interval even belangrijk.

Denk hierbij ook aan het verschil tussen relatief en absoluut convergente reeksen: een relatief convergente reeks kun je herschikken met als resultaat dat de som een andere waarde krijgt, bij een absoluut convergente reeks kan dit niet.

Herhaalde integralen

Aan het eind van Hoofdstuk 3 hebben we het verband tussen de σ-algebra's $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_2$ bekeken. We gaan nu bekijken hoe de maten m en m_2 samenhangen en wanneer integralen over $\mathbb{R}^2$ met betrekking tot m_2 door middel van herhaalde integralen uitgerekend kunnen worden.

In Stelling 3.33 hebben we gezien dat $m_2(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$ voor $A, B \in \mathcal{M}$; we kunnen dit op twee manieren herformuleren. Schrijf hiertoe even $C = A \times B$; de eerste formulering wordt:

$$m_2(C) = \int_{\mathbb{R}} m(C_x)\, dm, \tag{$*$}$$

bedenk hierbij dat $C_x = B$ als $x \in A$ en $C_x = \varnothing$ als $x \notin A$. De tweede formulering krijgen we door op te merken dat $m(C_x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{C_x}\, dm$ en dat $\chi_{C_x} = (\chi_C)_x$ voor elke x, we krijgen:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_C\, dm_2 = m_2(C) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \chi_C(x,y)\, dm(y)\, dm(x), \tag{$**$}$$

we schrijven $dm(x)$ en $dm(y)$ om aan te geven met over welke $\mathbb{R}$ we eigenlijk integreren.

Formule $(*)$ geldt voor alle meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}^2$, met een voorbehoud; het kan immers zijn dat C_x voor bepaalde x niet meetbaar is. De verzameling N van die x-en heeft echter de maat 0; we vervangen daarom C door $C' = C \cap (M \times \mathbb{R})$, waar $M = \{x : C_x \text{ is meetbaar}\}$. Dit maak geen verschil omdat $m_2(C) = m_2(C')$ en $m(C_x) = m(C'_x)$ voor $x \in M$. We krijgen de volgende stelling

6.13. STELLING. *Zij $C \in \mathcal{M}_2$ en definieer C' en M als boven. Dan geldt*

$$m_2(C) = m_2(C') = \int_{\mathbb{R}} m(C'_x)\, dm = \int_M m(C'_x)\, dm = \int_M m(C_x)\, dm. \quad \square$$

Formule $(**)$ geldt voor willekeurige niet-negatieve meetbare functies met eenzelfde soort voorbehoud: schrijven weer $N = \{x : f_x \text{ is niet meetbaar}\}$ en $M = \mathbb{R} \setminus M$. We herdefiniëren f zó dat $f(x,y) = 0$ als $x \in N$. We krijgen dan

6.14. STELLING (Stelling van Fubini). *Zij $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$ Lebesgue-meetbaar; dan geldt*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, dm_2 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dm(y)\, dm(x). \quad \square$$

We bewijzen Stellingen 6.13 en 6.14 hier niet omdat de bewijzen nogal lang zijn. In het boek [1995] van BEAR wordt het hele verhaal netjes uit de doeken gedaan.

Een speciaal geval van Stelling 6.13 kunnen we hier wel bewijzen.

6.15. OPGAVE. Zij $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ een meetbare functie en zij L_f het gebied tussen de x-as en de grafiek van f, dus $L_f = \big\{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$. Dan is L_f meetbaar en $m_2(L_f) = \int_{\mathbb{R}} f\, dm$.

Literatuur

ARZELÀ, C.
[1885] Sulla integrazione per serie. *Roma Accademia Lincei Rendiconti*, **1**, 532–537.

BEAR, H. S.
[1995] *A primer of Lebesgue integration*. Academic Press Inc., San Diego, CA. Een aardige inleiding tot de Lebesgue-integratie.

BOAS, R. P., JR.
[1996] *A Primer of Real Functions (fourth edition)*. The Carus Mathematical Monographs 13. The Mathematical Association of America, Washington. Een leuk boekje om af en toe eens door te bladeren. Met een mooi hoofdstuk over Lebesgue- en Riemann-Stieltjes-integratie.

CARATHÉODORY, C.
[1918] *Vorlesungen über reele Funktionen*. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin. TWI Bibliotheek: 26–01 Cara.

EBERLEIN, W. F.
[1957] Notes on integration I: The underlying convergence theorem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **10**, 357–360.

FATOU, P.
[1906] Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Mathematica*, **30**, 335–400.

HAWKINS, T.
[1970] *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development*. The University of Wisconsin Press, Madison, Wis.-London. Herdruk: Chelsea Publishing Co., New York (1975).

HEWITT, E. and K. STROMBERG.
[1965] *Real and Abstract Analysis*. Graduate Texts in Mathematics 25. Springer-Verlag, Berlin. TWI Bibliotheek: 28-01 Hewi.2.

LEBESGUE, H.
[1902] Intégrale, longuer, aire. *Annali di Matematica pura et applicata (3)*, **7**, 231–359. De dissertatie van Lebesgue.
[1908] Sur la methode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm. *Bulletin de la Société mathématique de France*, **36**, 1–16.
[1909] Sur les intégrales singulières. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouses, pour les sciences mathématiques et les sciences physiques*, **1**, 25–117.

LEVI, B.
[1906] Sopra l'integrazione delle serie. *Rendiconti Ist. Lombaro sue Lett.*, **39**, 775–780.

MAZURKIEWICZ, S.
[1936] Über die Menge der differenzierbare Funktionen. *Fundamenta Mathematicae*, **27**, 244–249. Een bewijs dat de verzameling differentieerbare functies niet Borel is in de ruimte $C\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

NIVEN, I.
[1956] *Irrational Numbers*. The Carus Mathematical Monographs 11. The Mathematical Association of America. TWI Bibliotheek: 11 J 72 Nive.

OSGOOD, W. F.

[1897] Non-uniform convergence and the integration of series term by term. *American Journal of Mathematics*, **19**, 155–190.

OXTOBY, J. C.

[1980] *Measure and Category. Second edition.* Graduate Texts in Mathematics 2. Springer-Verlag, Berlin etc. Een boek dat de analogieën tussen de topologische en maattheoretische eigenschappen van $\mathbb{R}$ en andere metrische ruimten blootlegt.

SIMOSON, A.

[1984] On two halves being two wholes. *American Mathematical Monthly*, **91**, 190–193. Een aardig artikel over niet-meetbare verzamelingen.

VAN VLECK, E. B.

[1908] On non-measurable sets of points, with an example. *Transactions of the American Mathematical Society*, **9**(2), 237–244.

Index