wi2080

Maat- en Integratietheorie

(Werkboek)

dr. E. Coplakova en dr. K.P. Hart

Cursus 1999/2000

Hoofdstuk 1

Maatruimten

σ-algebra's

1.12. Als X een verzameling is dan is 2^X, de familie van alle deelverzamelingen van X, een σ-algebra. Immers

1.14. ($\Rightarrow$) Zij $\mathcal{A}$ een σ-algebra op een verzameling X. We bewijzen dat $\mathcal{A}$ voldoet aan

c') Als $\langle A_n \rangle_n$ een rij in $\mathcal{A}$ is dan $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$.

($\Leftarrow$) Neem nu aan dat $\mathcal{A}$ aan a), b) en c') voldoet; we bewijzen dat $\mathcal{A}$ aan c) uit Opgave 1.13 voldoet.

1.17. De familie $\mathcal{C} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ is aftelbaar}\}$ is gesloten onder het nemen van aftelbare doorsneden en aftelbare verenigingen. Immers:

Is $\mathcal{C}$ een σ-algebra?

1.18. Zij $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ een familie σ-algebra's op een verzameling X. Dan is de familie $\mathcal{A} = \bigcap_\lambda \mathcal{A}_\lambda$ een σ-algebra. Immers

— $X \in \mathcal{A}$, want

— als $A \in \mathcal{A}$ dan $X \setminus A \in \mathcal{A}$, want

— Als $\langle A_n \rangle_n$ een rij in $\mathcal{A}$ is dan $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$, want

1.20.1. Zij $\mathcal{E}$ een niet-lege familie deelverzamelingen van X.

— Er is een σ-algebra $\mathcal{A}$ op X met $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, namelijk $\mathcal{A} =$

Zij $\{\mathcal{A}_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de familie van alle σ-algebra's met $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_\lambda$ voor elke $\lambda \in \Lambda$.

— $\mathfrak{S}(\mathcal{E}) = \bigcap_\lambda \mathcal{A}_\lambda$ is een σ-algebra, want

— Als $\mathcal{A}$ een σ-algebra is en $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ dan geldt $\mathfrak{S}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ (dus $\mathfrak{S}(\mathcal{E})$ is de kleinste σ-algebra waar $\mathcal{E}$ in zit). Immers

1.22.1. Beschouw $\mathbb{R}$ met de gewone metriek. Toon aan

a) Elke F_σ-verzameling en elke G_δ-verzameling is een Borel-verzameling.

b) De verzamelingen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ zijn Borel-verzamelingen.

c) Elk interval is een Borel-verzameling.

Hoofdstuk 2

De Uitwendige Maat op $\mathbb{R}$

De uitwendige maat

2.6. μ^* is monotoon. Immers

2.7. We laten nu zien dat μ^* aftelbaar subadditief is. Zij $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Als $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) = \infty$ is er niets te bewijzen dus we nemen aan dat $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i) < \infty$.

— Zij $\varepsilon > 0$. Voor elke i is er een familie spelden $\{S_n^i : n \in \mathbb{N}\}$ zó dat $A_i \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^i$ en $\sum_{n=1}^{\infty} |S_n^i| < \mu^*(A_i) + \varepsilon/2^{i+1}$. Immers

— $\mu^*(A) \leqslant \sum_i \sum_n |S_n^i|$, want

— Hieruit volgt dat $\mu^*(A) \leqslant \sum_i \mu^*(A_i)$, want

2.14. Als I een begrensd interval is met eindpunten a en b, $a < b$, dan geldt $\mu^*(I) = b - a$. Leid dit af uit het feit dat voor elke $\varepsilon > 0$ geldt

$$(a, b - \varepsilon] \subseteq I \subseteq (a - \varepsilon, b].$$

Additiviteitseigenschappen

2.19. Als F_1 en F_2 disjuncte compacte deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn dan geldt $\mu^*(F_1 \cup F_2) = \mu^*(F_1) + \mu^*(F_2)$.

a) $\mu^*(F_1 \cup F_2) \leqslant \mu^*(F_1) + \mu^*(F_2)$ volgt uit

b) $\mu^*(F_1 \cup F_2) \geqslant \mu^*(F_1) + \mu^*(F_2)$:

— Er is een $\delta > 0$ zó dat voor alle $x \in F_1$ en $y \in F_2$ geldt $|x - y| > 2\delta$. Immers

Zij $\mathcal{S} = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ een overdekking van $F_1 \cup F_2$ met spelden zó dat $|S_n| < \delta$ voor alle n.

— De familie $\mathcal{S}_1 = \{S_n : S_n \cap F_1 \neq \varnothing\}$ overdekt F_1. Immers

— De familie $\mathcal{S}_2 = \{S_n : S_n \cap F_2 \neq \varnothing\}$ overdekt F_2. Immers

— De families $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{S}_2$ zijn disjunct want

— $\sum_{n=1}^{\infty} |S_n| \geqslant \sum\big\{|S_n| : S_n \in \mathcal{S}_1\big\} + \sum\big\{|S_n| : S_n \in \mathcal{S}_2\big\}$. Immers

— We hebben bewezen dat $\sum_{n=1}^{\infty} |S_n| \geqslant \mu^*(F_1) + \mu^*(F_2)$, want

— Nu is bewezen dat $\mu^*(F_1 \cup F_2) \geqslant \mu^*(F_1) + \mu^*(F_2)$, want

2.21. Zij $\{F_n\}_n$ een disjuncte familie compacte verzamelingen.

— $\mu^*(\bigcup_n F_n) \leqslant \sum_n \mu^*(F_n)$ volgt uit

— Voor elke N geldt $\mu^*(\bigcup_{n\leqslant N} F_n) \leqslant \mu^*(\bigcup_n F_n)$ wegens

— Voor elke N geldt $\sum_{n\leqslant N} \mu^*(F_n) \leqslant \mu^*(\bigcup_n F_n)$ want

— We kunnen concluderen dat $\sum_n \mu^*(F_n) \leqslant \mu^*(\bigcup_n F_n)$ want

Hoofdstuk 3

De Lebesgue-maat

Lebesgue-meetbare verzamelingen

3.3. Neem aan $\mu^*(A) = 0$ en zij X willekeurig

— $\mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c) = \mu^*(X \cap A^c)$ want

— $\mu^*(X) \geqslant \mu^*(X \cap A) + \mu^*(X \cap A^c)$ want

— $\mu^*(X) = \mu^*(X \cap A^c)$ want

3.5. a) Voor een willekeurige $X \subseteq \mathbb{R}$ geldt $\mu^*(X) = \mu^*(X \cap \mathbb{R}) + \mu^*(X \cap \mathbb{R}^c)$ want

b) Als A meetbaar is dan is A^c het ook want $\mu^*(X \cap A^c) + \mu^*\bigl(X \cap (A^c)^c\bigr) =$

Regulariteit van m

3.18. Neem aan $\mu^*(A) < \infty$ en zij $\varepsilon > 0$.

— Er is een overdekking $\{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ van A met spelden zó dat $\sum_{n=1}^{\infty} |S_n| < \mu^*(A) + \frac{1}{2}\varepsilon$ want

Schrijf $S_n = (a_n, b_n]$ en zij $T_n = (a_n, b_n + 2^{-(n+1)}\varepsilon)$ voor elke n.

— $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$ is open en $A \subseteq G$ want

— $\mu^*(G) \leqslant \mu^*(A) + \varepsilon$ want

3.20. Zij $A \in \mathcal{M}$ en $x < m(A)$; we vinden een compacte verzameling C met $C \subseteq A$ en $m(C) > x$.

— er bestaat een gesloten verzameling F met $F \subseteq A$ en $m(F) > x$, want

— er is een $n \in N$ zó dat $m\bigl(F \cap [-n, n]\bigr) > x$, want

— $C = F \cap [-n, n]$ is als gewenst, want

3.21. Zij $A \in \mathcal{M}$ met $m(A) > 0$.

— Er is een compacte deelverzameling C van A met $m(C) > 0$, want

— Er is een open verzameling U om C met $m(U) < 2m(C)$, want

— Er is een $\delta > 0$ zó dat $(x - \delta, x + \delta) \subseteq U$ voor *elke* $x \in C$, want

— Zij $t \in (-\delta, \delta)$, dan $t + C \subseteq U$, want

— $C \cap (t + C) \neq \varnothing$, want

— Er zijn $x, y \in C$ met $x - y = t$, want

Het verband tussen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}_2$

3.32. Zij $N \in \mathcal{M}$ met $m(N) = 0$; we bewijzen dat $m_2(N \times \mathbb{R}) = 0$. Zij $\varepsilon > 0$.

— Voor elke n is er een overdekking $\{S_m^n : m \in \mathbb{N}\}$ van N met spelden zó dat $\sum_m |S_m^n| < 2^{-n}\varepsilon$, immers

Definieer voor $n \in \mathbb{Z}$ en $m \in \mathbb{N}$ de tegel T_m^n door: $T_m^n = S_m^{|n|} \times (n, n+1]$.

— $\operatorname{opp} T_m^n = |S_m^{|n|}|$ want

— De familie $\{T_m^n : n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$ overdekt $N \times \mathbb{R}$ want

— $\sum_{n,m} \operatorname{opp} T_m^n =$

— We kunnen concluderen dat $m_2(N \times \mathbb{R}) = 0$ want

3.33. Laat $A, B \in \mathcal{M}$. We bewijzen dat $\mu_2^*(A \times B) = m(A) \cdot m(B)$.

(i) $\mu_2^*(A \times B) \leqslant m(A) \cdot m(B)$: neem overdekkingen $\{S_n^a\}_n$ en $\{S_n^b\}$ van respectievelijk A en B met spelden.

— Definieer $T_{n,m} = S_n^a \times S_m^b$; dan is $\{T_{n,m}\}_{n,m}$ een overdekking van $A \times B$ met tegels, want

— $\sum_{n,m} \operatorname{opp} T_{n,m} = \sum_n |S_n^a| \cdot \sum_m |S_m^b|$, want

— Nu volgt $\mu_2^*(A \times B) \leqslant m(A) \cdot m(B)$ want

(ii) $m_2(A \times B) \geqslant m(A) \cdot m(B)$ voor compacte A en B: Zij $\{T_n\}_n$ een overdekking van $A \times B$ met tegels en $\varepsilon > 0$; schrijf $T_n = (a_n, b_n] \times (c_n, d_n]$.

— Voor elke n bestaat een δ_n zó dat $(b_n - a_n + \delta_n)(d_n - c_n + \delta_n) < \operatorname{opp} T_n + 2^{-n}\varepsilon$, immers

Stel $U_n = (a_n, b_n + \delta_n) \times (c_n, d_n + \delta_n)$ voor elke n.

— Er is een N zó dat $\{U_n\}_{n \leqslant N}$ een overdekking van $A \times B$ is, want

— $\sum_{n \leqslant N} m_2(U_n) < \sum_n \operatorname{opp} T_n + 2\varepsilon$, want

Zij $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$ de stijgende aftelling van de verzameling $\{a_n, b_n + \delta_n : n \leqslant N\}$ en evenzo $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_q\}$ de aftelling van $\{c_n, d_n + \delta_n : n \leqslant N\}$; verder stellen we $I = \{i : (x_i, x_{i+1}] \cap A \neq \varnothing\}$ en $J = \{j : (y_j, y_{j+1}] \cap B \neq \varnothing\}$.

— $A \subseteq \bigcup_{i \in I}(x_i, x_{i+1}]$ (en $B \subseteq \bigcup_{j \in J}(y_j, y_{j+1}]$), want

— $\bigcup_{i \in I, j \in J}(x_i, x_{i+1}) \times (y_j, y_{j+1}) \subseteq \bigcup_{n \leqslant N} U_n$, want

— $\sum_{i \in I}(x_{i+1} - x_i) \cdot \sum_{j \in J}(y_{j+1}, y_j) \leqslant \sum_{n \leqslant N} m_2(U_n)$, want

— We kunnen nu concluderen dat $m_2(A \times B) \geqslant m(A) \cdot m(B)$, immers

(iii) $\mu_2^*(A \times B) \geqslant m(A) \cdot m(B)$ voor willekeurige A en B:

— $m(A) \cdot m(B) = \sup\{m_2(C \times D) : C \subseteq A,\ D \subseteq B$ en C en D zijn compact$\}$, want

— $\mu_2^*(A \times B) \geqslant \sup\{m_2(C \times D) : C \subseteq A,\ D \subseteq B$ en C en D zijn compact$\}$, immers

(iv) $A \times B \in \mathcal{M}_2$:

— Er zijn F_σ-verzamelingen C en F en G_δ-verzamelingen D en G met $C \subseteq A \subseteq D$, $F \subseteq B \subseteq G$ en $m(D \setminus C) = m(G \setminus F) = 0$, want

— $C \times F$ is een F_σ-verzameling, want

— $D \times G$ is een G_δ-verzameling, want

— $(D \times G) \setminus (C \times F) \subseteq (D \setminus C) \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times (G \setminus F)$, immers

— $m_2\big((D \times G) \setminus (C \times F)\big) = 0$, want

— $A \times B$ is meetbaar wegens

Hoofdstuk 4

Lebesgue-integratie

Meetbare functies

4.9. Laat $(X, \mathcal{A})$ een meetbare ruimte zijn en f en g meetbare functies van X naar $(-\infty, \infty]$.

(i) We bewijzen dat $f + g$ meetbaar is. Zij $c \in \mathbb{R}$.

— Als $f(x) + g(x) > c$ dan is er $q \in \mathbb{Q}$ met $f(x) > q$ en $g(x) > c - q$. Immers

— $(f+g)^{-1}\big[(c,\infty]\big] = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} f^{-1}\big[(q,\infty]\big] \cap g^{-1}\big[(c-q,\infty]\big]$. Immers

— $(f+g)^{-1}\big[(c,\infty]\big]$ is meetbaar, want

(ii) We bewijzen dat αf meetbaar is voor elke $\alpha \in \mathbb{R}$. We onderscheiden drie gevallen:

— $\alpha = 0$:

— $\alpha > 0$:

— $\alpha < 0$:

4.10. Zij $\langle f_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ een rij meetbare functies is met puntsgewijze limiet f.

— Zij $c \in \mathbb{R}$. Er geldt: $f(x) \leqslant c$ dan en slechts dan als

$$(\forall l \in \mathbb{N})(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)\, f_n(x) \leqslant c + 2^{-l}.$$

Immers

— $f^{-1}\big[[-\infty, c]\big] = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geqslant N} f_n^{-1}\big[[-\infty, c + 2^{-l}]\big]$. Immers

— De verzameling $f^{-1}\big[[-\infty, c]\big]$ is meetbaar, want

Integralen

4.24. Laat f en g niet-negatieve meetbare functies zijn en A, B en E meetbare verzamelingen.

(i) Als $f \leqslant g$ dan $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$. Immers

(ii) Als $A \subseteq B$ dan $\int_A f\,d\mu \leqslant \int_B f\,d\mu$. Immers

(v) Als $\int_E f\,d\mu = 0$ dan $\mu(C) = 0$, waarbij $C = \{x \in E : f(x) > 0\}$:

— voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $\mu(C_n) = 0$, waar $C_n = \{x \in E : f(x) \geqslant 1/n\}$. Immers

— $C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, dus

(vi) Als $\int_E f\,d\mu < \infty$ dan $\mu(C) = 0$, waarbij $C = \{x \in E : f(x) = \infty\}$:

— voor elke $n \in \mathbb{N}$ geldt $n \cdot \mu(C_n) \leqslant \int_E f\,d\mu$, waar $C_n = \{x \in E : f(x) \geqslant n\}$. Immers

— $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$, dus

(vii) Als $0 \leqslant \alpha \leqslant \infty$ dan $\int_E \alpha f \, d\mu = \alpha \int_E f \, d\mu$. Om dit te bewijzen onderscheiden we drie gevallen:

— $\alpha = 0$:

— $0 < \alpha < \infty$:

— $\alpha = \infty$ (onderscheid twee gevallen: $\int_E f \, d\mu = 0$ en $\int_E f \, d\mu > 0$):

4.25. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en laat s en t niet negatieve stapfuncties zijn. Schrijf s en t respectievelijk als $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ en $t = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \chi_{B_j}$ met $\{A_i\}_i$ en $\{B_j\}_j$ disjunct.

(i) $\int_X s + t \, d\mu = \int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu$:

— Er geldt $s + t = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (\alpha_i + \beta_j) \chi_{A_i \cap B_j}$ want

— $\int_X s \, d\mu = \sum_i \sum_j \alpha_i \mu(A_i \cap B_j)$ want

— $\int_X t \, d\mu = \sum_i \sum_j \beta_j \mu(A_i \cap B_j)$ want

— $\int_X s \, d\mu + \int_X t \, d\mu = \sum_i \sum_j (\alpha_i + \beta_j) \mu(A_i \cap B_j) = \int_X s + t \, d\mu$ want

(ii) Als E en elke E_k meetbaar zijn en $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ met $E_k \cap E_l = \varnothing$ als $k \neq l$, dan geldt

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_{E_k} s \, d\mu :$$

— $\mu(A_i \cap E) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(A_i \cap E_k)$, want

— $\int_E \, s d\mu = \sum_{i=1}^n \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_i \mu(A_i \cap E_k)$, want

— $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{E_k} s \, d\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E_k)$, want

— $\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_i \mu(A_i \cap E_k)$, want

Hoofdstuk 5

Convergentiestellingen

De Monotone-convergentiestelling

5.3. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, zij $E \in \mathcal{A}$ en laat f en g niet-negatieve meetbare functies op X zijn.

— Er zijn stijgende rijen niet-negatieve stapfuncties $\langle s_n \rangle_n$ en $\langle t_n \rangle_n$ zó dat $s_n \to f$ en $t_n \to g$, want

— $\lim_{n\to\infty} \int_E s_n + t_n \, d\mu = \int_E f + g \, d\mu$. Immers

— $\lim_{n\to\infty} \int_E s_n + t_n \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$ want

5.4. Neem aan: f en g zijn integreerbaar op $E \in \mathcal{A}$ en zij $C = \{x \in E : f(x) = \pm\infty$ en $g(x) = \mp\infty\}$. Herinner dat

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{als } x \notin C, \text{ en} \\ 0 & \text{als } x \in C. \end{cases}$$

(i) $f + g$ is integreerbaar op E, want

(ii) $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$ op $E \setminus C$, want

(iii) We bewijzen $\int_E (f+g)\, d\mu = \int_E f\, d\mu + \int_E g\, d\mu$.

— Voor $h = f$, g en $f+g$ geldt $\int_E h\, d\mu = \int_{E\setminus C} h\, d\mu + \int_C h\, d\mu$, want

— Voor $h = f$, g en $f+g$ geldt $\int_C h\, d\mu = 0$, want

— $\int_{E\setminus C} f + g \, d\mu = \int_{E\setminus C} f \, d\mu + \int_{E\setminus C} g \, d\mu$, want

5.5. Zij $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ een reeks niet-negatieve meetbare functies.

— De somfunctie $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ is meetbaar, want

— $\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$, want

De Gedomineerde-convergentiestelling

5.21. Gegeven is een rij $\langle f_n \rangle_n$ meetbare functies met de eigenschap dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty.$$

a) Definieer $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big| f(x) \big|$, dan is φ integreerbaar; dit volgt uit

b) $\mu(N) = 0$, waar $N = \{x : \varphi(x) = \infty\}$, want

De reeks $\sum_n f_n(x)$ is bijna overal absoluut convergent.

c) Herdefinieer $f_n(x) = 0$, voor $x \in N$; dan verandert $\int_X f_n \, d\mu$ niet, want

De reeks $\sum_n f_n(x)$ is nu overal absoluut convergent.

d) Voor elke N geldt $\left|\sum_{n \leqslant N} f_n(x)\right| \leqslant \varphi(x)$, want

e) $\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$, dit volgt uit

Hoofdstuk 6

Riemann-integratie en herhaalde integralen

Gewone Riemann-integratie

6.3. Zij $\langle f_n \rangle_n$ een rij continue functies op het interval $[0,1]$ zó dat voor alle x en n geldt $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$. Neem ook aan dat $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ voor alle x.

— Elke f_n is Lebesgue-meetbaar want

— Er is een Lebesgue-integreerbare functie $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ zó dat $|f_n| \leqslant g$ voor alle n, namelijk

— Voor elke n geldt $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{[0,1]} f_n\,dm$ want

— We kunnen concluderen dat $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$, want

6.5. Te bewijzen:

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi e^{-R\sin t} dt = 0.$$

— Om $\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi e^{-R\sin t} dt = 0$ aan te tonen is het voldoende om te laten zien dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi e^{-n\sin t} dt = 0,$$

(NB R neemt alle waarden in $[0,\infty)$ aan en n neemt alleen waarden in $\mathbb{N}$ aan) want:

Definieer $f_n\colon [0,\pi] \to [0,\infty]$ door $f_n(t) = e^{-n \sin t}$.

— Voor elke $n \in \mathbb{N}$ en elke $t \in [0,\pi]$ geldt $0 < f_n(t) \leqslant 1$, want

— De puntsgewijze limiet van de rij $\langle f_n \rangle_n$ is de functie f gedefinieerd door

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < t < \pi \\ 1 & \text{als } t = 0 \text{ of } t = \pi. \end{cases}$$

Immers

d) $\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(t)\,dt = 0$ want

6.8. Definieer, voor $n \in \mathbb{N}$, de functie f_n door $f_n(x) = \frac{1}{n^4+x^2}$.

— Elke f_n is Lebesgue-meetbaar, want

— $\int_0^\infty f_n(x)\,dx =$

— $\int_{[0,\infty)} f_n\,dm = \int_0^\infty f_n(x)\,dx$ want

— $\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty f_n(x)\,dx$ want

— $\int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ want

Herhaalde integralen

6.15. Zij $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ Lebesgue-meetbaar. We bewijzen dat $L_f = \{(x,y) : 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ meetbaar is en dat $m_2(L_f) = \int_{\mathbb{R}} f\,dm$.

(i) Geval 1: f is een stapfunctie, zeg $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$.

— $L_f = \bigcup_{i=1}^n A_i \times [0,\alpha_i]$ immers

en dus is L_f meetbaar op grond van

— $m_2(L_f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(A_i) = \int_{\mathbb{R}} f\, dm$, want

(ii) Geval 2: f is willekeurig (en meetbaar). Kies een stijgende rij $\langle s_n \rangle_n$ stapfuncties die puntsgewijs naar f convergeert.

— Zo'n rij bestaat wegens

— $\int_{\mathbb{R}} f\, dm = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} s_n\, dm$ wegens

— Er geldt $L_f^- \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} L_{s_n} \subseteq L_f$ (hierin is $L_f^- = \{(x,y) : 0 \leqslant y < f(x)\}$), want

— We kunnen concluderen dat $\mu_2^*(L_f) \geqslant \int_{\mathbb{R}} f\, dm$, want

(iii) We maken het bewijs af door te laten zien dat de *grafiek* G_f van f meetbaar is en de maat nul heeft.

— Dit is voldoende want $L_f =$

— Het is voldoende te laten zien dat voor elke n de verzameling $G_n = \{(x, f(x)) : n \leqslant x \leqslant n+1\}$ meetbaar is en de maat nul heeft want

We nemen voor het gemak $n = 0$; zij $k \in \mathbb{N}$. Stel $A_0 = \{x : f(x) = 0\}$ en voor $i > 0$ stellen we $A_i = \{x : (i-1)2^{-k} < f(x) \leqslant i2^{-k}\}$.

— De verzamelingen A_i zijn meetbaar en disjunct, en er geldt $[0,1] = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$, immers

— Er geldt $G_0 \subseteq H_k = A_0 \times \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times \big((i-1)2^{-k}, i2^{-k}\big]$, immers

— De verzameling H_k is meetbaar want

— $m_2(H_k) \leqslant 2^{-k}$ want

— Er geldt $G_0 = \bigcap_{k=0}^{\infty} H_k$, want

— Conclusie: