

Partieel breuksplitsen

In [1, Hoofdstuk 6] wordt gebruik gemaakt van de techniek van het (partieel) breuksplitsen

(Zie ook: [2, Hoofdstuk 7 §4]) om de inverse Laplace getransformeerde van reële, rationale functies te bepalen.

Laat in het vervolg $\frac{T(s)}{N(s)}$ zo'n reële rationale functie zijn. $T(s)$ en $N(s)$ zijn dus reële polynomen in s .

We kunnen aannemen dat $gr\{T(s)\} \leq gr\{N(s)\}$ (gr staat voor 'de graad van').

Is dit niet het geval dan kunnen we eerst $T(s)$ en $N(s)$ op elkaar delen voordat we tot breuksplitsen overgaan.

Voorbeeld

$$\text{Laat } \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{s^4 - 4s^3 + 3s^2 + 2s - 5}{(s-2)^2(s+1)} = \frac{s^4 - 4s^3 + 3s^2 + 2s - 3}{s^3 - 3s^2 + 4}.$$

Delen geeft nu:

$$\begin{array}{r} s^3 - 3s^2 + 4 \overline{) s^4 - 4s^3 + 3s^2 + 2s - 5} \\ \underline{s^4 - 3s^3 - 4s} \\ -s^3 + 3s^2 - 2s - 5 \\ \underline{-s^3 + 3s^2 - 4} \\ -2s - 1 \end{array}$$

$$\text{zodat } \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{s^4 - 4s^3 + 3s^2 + 2s - 5}{(s-2)^2(s+1)} = s - 1 - \frac{2s+1}{(s-2)^2(s+1)}$$

$N(s)$ bevat alleen reële lineaire en kwadratische factoren. Hier komt ook de naam partiële breuksplitsing vandaan want $N(s)$ kan ook ontbonden worden in complexe lineaire factoren.

- Is $N(s) = (s-a)^r \cdots$ dan komt in de breuksplitsing voor

$$\frac{A_1}{(s-a)} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(s-a)^r}.$$

Voorbeeld

Zie ook het voorgaande voorbeeld.

$$\text{Laat } \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{2s + 1}{(s - 2)^2(s + 1)}.$$

We kunnen $\frac{T(s)}{N(s)}$ zeker schrijven als de som van twee breuken waarbij in elke breuk de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer.

Dat wil zeggen dat

$$\begin{aligned} \frac{T(s)}{N(s)} &= \frac{2s + 1}{(s - 2)^2(s + 1)} \\ &= \frac{A_1s + A_2}{(s - 2)^2} + \frac{B}{s + 1} \end{aligned}$$

voor zekere constanten A_1 , A_2 en B .

Dit is echter geen gebruikelijke schrijfwijze.

Omdat

$$\begin{aligned} A_1s + A_2 &= \{A_1(s - 2) + 2A_1\} + A_2 \\ &= A_1(s - 2) + \{2A_1 + A_2\} \\ &= \hat{A}_1(s - 2) + \hat{A}_2 \end{aligned}$$

$$\text{waarbij } \begin{cases} \hat{A}_1 = A_1 \\ \hat{A}_2 = 2A_1 + A_2 \end{cases} \quad \text{is}$$

$$\begin{aligned} \frac{T(s)}{N(s)} &= \frac{2s + 1}{(s - 2)^2(s + 1)} \\ &= \frac{A_1s + A_2}{(s - 2)^2} + \frac{B}{s + 1} \\ &= \frac{\hat{A}_1(s - 2) + \hat{A}_2}{(s - 2)^2} + \frac{B}{s + 1} \\ &= \frac{\hat{A}_1}{(s - 2)} + \frac{\hat{A}_2}{(s - 2)^2} + \frac{B}{s + 1} \end{aligned}$$

We moeten nu het rechterlid weer onder één noemer brengen om de constanten $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ en B te bepalen.

Doen we dit dan vinden we $\hat{A}_1(s-2)(s+1) + \hat{A}_2(s+1) + B(s-2)^2 = 2s+1$ voor $s \in \mathbb{R}$

Substitutie van achtereenvolgens $s = -1$, $s = 0$ en $s = 2$ geeft

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} 9B & = & -1 & & \\ -2\hat{A}_1 & + & \hat{A}_2 & + & 4B = 1 \\ & & 3\hat{A}_2 & & = 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} B & = & -\frac{1}{9} \\ \hat{A}_2 & = & \frac{5}{3} \\ \hat{A}_1 & = & \frac{1}{9} \end{array} \right.$$

Hiermee is gevonden dat $\frac{T(s)}{N(s)} = \frac{\frac{1}{9}}{(s-2)} + \frac{\frac{5}{3}}{(s-2)^2} - \frac{\frac{1}{9}}{s+1}$.

We kunnen nu $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{T(s)}{N(s)}\}$ bepalen.

Omdat

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)}\right\} = e^{2t} \quad [3, \text{formule 2.}]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = te^{2t} \quad [3, \text{formule 11.}]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} = e^{-t} \quad [3, \text{formule 2.}]$$

is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T(s)}{N(s)}\right\} &= \frac{e^{2t}}{9} + \frac{5te^{2t}}{3} - \frac{e^{-t}}{9} \\ &= \frac{e^{2t}}{9}(1 + 15t) - \frac{e^{-t}}{3} \end{aligned}$$

- Is $N(s) = (s^2 + ps + q)^r \cdots$ met $p^2 - 4q < 0$ dan komt in de breuksplitsing voor

$$\frac{A_1s + B_1}{(s^2 + ps + q)} + \frac{A_2s + B_2}{(s^2 + ps + q)^2} + \cdots + \frac{A_rs + B_r}{(s^2 + ps + q)^r}.$$

Voorbeeld

Laat $\frac{T(s)}{N(s)} = \frac{s^4 + 4s^3 + 14s^2 + 22s + 29}{(s^2 + 2s + 4)^2(s+1)}$.

Merk op dat $gr\{T(s)\} < gr\{N(s)\}$ zodat we direct kunnen gaan breuksplitsen.

$\frac{T(s)}{N(s)}$ is zeker schrijven als de som van twee breuken waarbij in elke breuk de graad van de teller kleiner is dan de graad van de noemer. Dat wil zeggen dat

$$\begin{aligned}
\frac{T(s)}{N(s)} &= \frac{s^4 + 4s^3 + 14s^2 + 22s + 29}{(s^2 + 2s + 4)^2(s+1)} \\
&= \frac{A_1s^3 + A_2s^2 + A_3s + A_4}{(s^2 + 2s + 4)^2} + \frac{B}{s+1}
\end{aligned}$$

voor zekere constanten A_1, A_2, A_3, A_4 en B .

Dat klopt ook maar is opnieuw geen gebruikelijke schrijfwijze. Omdat

$$\begin{aligned}
&A_1s^3 + A_2s^2 + A_3s + A_4 \\
&= \{A_1s(s^2 + 2s + 4) - 2A_1s^2 - 4A_1s\} + A_2s^2 + A_3s + A_4 \\
&= A_1s(s^2 + 2s + 4) + (A_2 - 2A_1)s^2 + (A_3 - 4A_1)s + A_4 \\
&= A_1s(s^2 + 2s + 4) + \{(A_2 - 2A_1)(s^2 + 2s + 4) - 2(A_2 - 2A_1)s - 4(A_2 - 2A_1)\} \\
&+ (A_3 - 4A_1)s + A_4 \\
&= A_1s(s^2 + 2s + 4) + (A_2 - 2A_1)(s^2 + 2s + 4) + (A_3 - 2A_2)s + (A_4 - 4A_2 + 8A_1) \\
&= (A_1s + (A_2 - 2A_1))(s^2 + 2s + 4) + (A_3 - 2A_2)s + (A_4 - 4A_2 + 8A_1) \\
&= (\hat{A}_1s + \hat{A}_2)(s^2 + 2s + 4) + \hat{A}_3s + \hat{A}_4
\end{aligned}$$

waarbij $\begin{cases} \hat{A}_1 = A_1 \\ \hat{A}_2 = A_2 - 2A_1 \\ \hat{A}_3 = A_3 - 2A_2 \\ \hat{A}_4 = A_4 - 4A_2 + 8A_1 \end{cases}$ is

$$\begin{aligned}
\frac{T(s)}{N(s)} &= \frac{s^4 + 4s^3 + 14s^2 + 22s + 29}{(s^2 + 2s + 4)^2(s+1)} \\
&= \frac{A_1s^3 + A_2s^2 + A_3s + A_4}{(s^2 + 2s + 4)^2} + \frac{B}{s+1} \\
&= \frac{(\hat{A}_1s + \hat{A}_2)(s^2 + 2s + 4) + \hat{A}_3s + \hat{A}_4}{(s^2 + 2s + 4)^2} + \frac{B}{s+1} \\
&= \frac{(\hat{A}_1s + \hat{A}_2)}{(s^2 + 2s + 4)} + \frac{\hat{A}_3s + \hat{A}_4}{(s^2 + 2s + 4)^2} + \frac{B}{s+1}
\end{aligned}$$

We moeten nu het rechterlid weer onder één noemer brengen om de constanten $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3, \hat{A}_4$ en B te bepalen. Doen we dit dan vinden we

$$\begin{aligned}
&(\hat{A}_1s + \hat{A}_2)(s^2 + 2s + 4)(s+1) + (\hat{A}_3s + \hat{A}_4)(s+1) + B(s^2 + 2s + 4)^2 = \\
&s^4 + 4s^3 + 14s^2 + 22s + 29 \text{ voor } s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Substitutie van $s = -1$ geeft $9B = 18$ zodat $B = 2$.

Verder geeft substitutie van $B = 2$ en achtereenvolgens $s = -2, 0, 1$ en 2

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} 8\hat{A}_1 & - & 4\hat{A}_2 & + & 2\hat{A}_3 & - & \hat{A}_4 & + & 32 & = & 25 \\ 4\hat{A}_2 & + & & & & & \hat{A}_4 & + & 32 & = & 29 \\ 14\hat{A}_1 & + & 14\hat{A}_2 & + & 2\hat{A}_3 & + & 2\hat{A}_4 & + & 98 & = & 70 \\ 72\hat{A}_1 & + & 36\hat{A}_2 & + & 6\hat{A}_3 & + & 3\hat{A}_4 & + & 288 & = & 177 \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} B & & & & & & & & & = & 2 \\ 8\hat{A}_1 & - & 4\hat{A}_2 & + & 2\hat{A}_3 & - & \hat{A}_4 & = & -7 \\ 4\hat{A}_2 & & & & & & \hat{A}_4 & = & -3 \\ 7\hat{A}_1 & + & 7\hat{A}_2 & + & \hat{A}_3 & + & \hat{A}_4 & = & -14 \\ 24\hat{A}_1 & + & 12\hat{A}_2 & + & 2\hat{A}_3 & + & \hat{A}_4 & = & -37 \end{array} \right.$$

Lossen we het stelsel vergelijkingen in $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{A}_3$ en $\hat{A}_4$ op dan vinden we

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \hat{A}_1 & = & -1 \\ \hat{A}_2 & = & -1 \\ \hat{A}_3 & = & -1 \\ \hat{A}_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

Hiermee is gevonden dat $\frac{T(s)}{N(s)} = -\frac{(s+1)}{(s^2+2s+4)} + \frac{(-s+1)}{(s^2+2s+4)^2} + \frac{2}{(s+1)}$.

Soms is het handig deze breuk nog te schrijven als

$$\begin{aligned} \frac{T(s)}{N(s)} &= -\frac{(s+1)}{((s+1)^2+3)} - \frac{(s-1)}{((s+1)^2+3)^2} + \frac{2}{(s+1)} \\ &= -\frac{(s+1)}{((s+1)^2+3)} - \frac{((s+1)-2)}{((s+1)^2+3)^2} + \frac{2}{(s+1)} \\ &= -\frac{(s+1)}{((s+1)^2+3)} - \frac{(s+1)}{((s+1)^2+3)^2} + \frac{2}{((s+1)^2+3)^2} + \frac{2}{(s+1)}. \end{aligned}$$

We kunnen nu $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{T(s)}{N(s)}\}$ bepalen al is dit lastiger dan in het vorige voorbeeld.

Gebruik voor het bepalen van $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{((s+1)^2+3)^2}\}$ dat

$$\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2} = \frac{1}{(s^2+a^2)} - \frac{(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2} \quad [3, \text{formules 3., 10.}]$$

Omdat

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{((s+1)^2+3)}\right\} = e^{-t} \cos(\sqrt{3}t) \quad [3, \text{formules 4., 14.}]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s+1)}{((s+1)^2+3)^2}\right\} = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{3}} t \sin(\sqrt{3}t) \quad [3, \text{formules 9., 14.}]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{((s+1)^2+3)^2}\right\} = \frac{e^{-t}}{6} \left(\frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} - t \cos(\sqrt{3}t) \right) \quad [3, \text{formules 4., 10., 14.}]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} = e^{-t} \quad [3, \text{formule 2.}]$$

is

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{T(s)}{N(s)}\right\} &= -e^{-t}\cos(\sqrt{3}t) - \frac{e^{-t}}{2\sqrt{3}}t\sin(\sqrt{3}t) + \frac{e^{-t}}{3}\left(\frac{\sin(\sqrt{3}t)}{\sqrt{3}} - t\cos(\sqrt{3}t)\right) + 2e^{-t} \\ &= e^{-t}\left\{-\cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{6}t\sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{9}(\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) - 3t\cos(\sqrt{3}t)) + 2\right\} \\ &= \frac{e^{-t}}{18}\{-(18 + 6t)\cos(\sqrt{3}t) + \sqrt{3}(2 - 3t)\sin(\sqrt{3}t) + 36\}\end{aligned}$$

Referenties

- [1] William E. Boyce & Richard C. DiPrima,
Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems,
John Wiley & Sons Inc,
International Student Edition,
10th Edition, Asia, 2013.
- [2] James Stewart,
Calculus, Early Transcendentals,
Cengage Learning,
Metric International Version,
8th Edition, 2016
- [3] Tabel Laplace getransformeerden, op te halen van blackboard.