

# Het begin van de Verzamelingenleer

Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI  
TU Delft

Leiden, 15 oktober 2008

## Georg Cantor



## Overzicht

- 1  $\mathbb{N}$  versus  $\mathbb{R}$ 
  - De vraag
  - Het antwoord
  - Algebraïsche getallen
- 2  $\mathbb{R}$  versus  $\mathbb{R}^2$ 
  - De vraag
  - Het antwoord
- 3 En Toen?
  - Steeds grotere verzamelingen
  - Problemen met Verzamelingen
- 4 Wederopbouw: axiomatisering

## Uit een brief van Cantor aan Dedekind

Halle, d. 29<sup>ten</sup> Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen  $n$  und bezeichne ihn mit  $(n)$ ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrößen  $x$  und bezeichne ihn mit  $(x)$ ; so ist die Frage einfach die, ob sich  $(n)$  dem  $(x)$  so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

In moderne taal:

Bestaat er een bijectie tussen  $\mathbb{N}$  en  $(0, \infty)$ ?

# Uit: Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, 1874

## Stelling

Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebenen unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots \quad (4)$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle  $(\alpha \dots \beta)$  eine Zahl  $\eta$  (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4) nicht vorkommt; dies sol nun bewiesen werden.

## Het bewijs

Cantor's bewijs maakte gebruik van de *volledigheid* van  $\mathbb{R}$ .

Hij begon met een rij

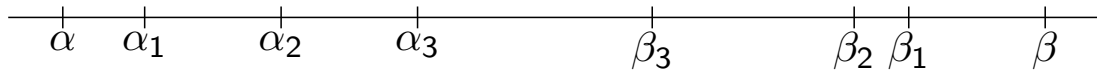
$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$$

van reële getallen en een willekeurig interval

$$(\alpha, \beta)$$

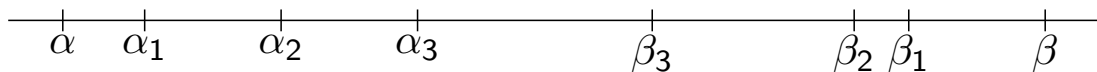
Hij liet toen zien dat er een reëel getal  $\eta \in (\alpha, \beta)$  bestaat ongelijk aan alle  $\omega_\nu$ .

## Het bewijs



- Laat  $\alpha_1$  en  $\beta_1$  de eerste twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in  $(\alpha, \beta)$  liggen en wel zó dat  $\alpha_1 < \beta_1$ .
- Laat  $\alpha_2$  en  $\beta_2$  de eerste twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in  $(\alpha_1, \beta_1)$  liggen en wel zó dat  $\alpha_2 < \beta_2$ .
- Laat  $\alpha_3$  en  $\beta_3$  de eerste twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in  $(\alpha_2, \beta_2)$  liggen en wel zó dat  $\alpha_3 < \beta_3$ .
- ...

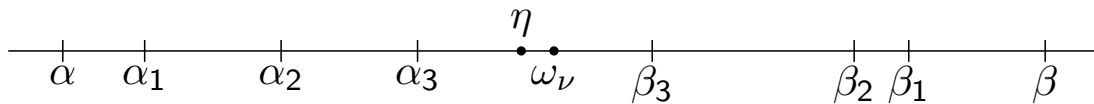
## Het bewijs



Bedenk zelf waarom

- $\omega_1, \omega_2 \notin (\alpha_1, \beta_1)$ ,
- $\omega_3, \omega_4 \notin (\alpha_2, \beta_2)$ ,
- $\omega_5, \omega_6 \notin (\alpha_3, \beta_3)$ ,
- ...

## Het bewijs

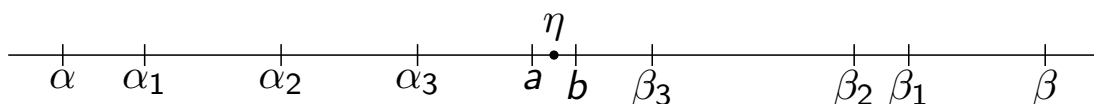


Geval 1: de constructie stopt bij  $n$ .

Waarom zou dat kunnen gebeuren?

Nog maar één (of geen)  $\omega_\nu$  in  $(\alpha_n, \beta_n)$ ; dan is  $\eta$  gauw gevonden.

## Het bewijs



Geval 2: de constructie stopt nooit.

Neem  $a = \sup_n \alpha_n$  en  $b = \inf_n \beta_n$  (die bestaan want ...).

Dan  $a \leq b$  (waarom ook alweer?)

Neem  $\eta \in [a, b]$

# Algebraïsche getallen

## Definitie

Een getal  $a$  heet *algebraïsch* als het een oplossing is van een vergelijking van de vorm

$$c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = 0$$

met  $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$

## Voorbeelden

$0, 1, \frac{2}{3}, \sqrt{2}, \cos \frac{\pi}{9} (8x^3 - 6x - 1 = 0) \dots$

# Aftelbaar veel

## Stelling

*De verzameling van alle algebraïsche getallen is aftelbaar.*

## Bewijs

Bij elke vergelijking  $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = 0$  hoort een natuurlijk getal:

$$N = n - 1 + |c_0| + |c_1| + \dots + |c_n|$$

Elke  $N$  hoort bij maar eindig veel vergelijkingen en elke vergelijking heeft maar eindig veel oplossingen. Elke  $N$  bepaalt dus eindig veel algebraïsche getallen en elk getal is door een  $N$  bepaald.

## Aftelbaar veel

### Bewijs, vervolg

Maak een rij met alle algebraïsche getallen er in, als volgt:

- eerst de getallen bij  $N = 0$ , in volgorde (geen)
- dan de getallen bij  $N = 1$ , in volgorde (0)
- dan de getallen bij  $N = 2$ , in volgorde  $(-1, 1)$
- dan de getallen bij  $N = 3$ , in volgorde  $(-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$
- ...

Zie ook Stelling I.4.6 en zijn bewijs in *Wiskundige Structuren*.

## Uit een brief van Cantor aan Dedekind

Halle, d. 5<sup>ten</sup> Januar 74.

Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Punkte der Fläche ein Punkt der Linie und umgekehrt zu jedem Punkte der Linie ein Punkt der Fläche gehört?

In moderne taal:

Bestaat er een bijectie tussen  $[0, 1]^2$  en  $[0, 1]$ ?

## Uit: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, 1978

### Stelling

(A.) Sind  $x_1, x_2, \dots, x_n$  voneinander unabhängige, veränderliche reelle Größen, von denen jede alle Werte, die  $\geq 0$  und  $\leq 1$  sind, annehmen kann, und ist  $t$  eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum ( $0 \leq t \leq 1$ ), so ist es möglich, die Größe  $t$  dem Systeme der  $n$  Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  so zu ordnen, daß zu jedem bestimmten Werte von  $t$  ein bestimmtes Wertsystem  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und umgekehrt zu jedem bestimmten Wertsysteme  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ein gewisser Wert von  $t$  gehört.

## Een Bewijs uit 1895

Het eerste bewijs van Cantor (uit 1878) maakte gebruik van kettingbreuken. In 1895 had hij zijn theorie verder ontwikkeld en was een wat eenvoudiger bewijs mogelijk.

Dat bestond uit twee stappen en verliep via de verzameling  $2^{\mathbb{N}}$  van alle rijen 0-en en 1-en.

Een punt  $x \in 2^{\mathbb{N}}$  is dus een rij; we schrijven  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ .



## Een Bewijs uit 1895

De volgende twee stellingen maken het bewijs, relatief, eenvoudig.

### Stelling

*Er is een bijectie  $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$*

### Stelling

*Er is een bijectie  $g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$*

## Eerste bijectie

Definieer  $s : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$  door  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$ .

Is dit een bijectie?

Nee: voor  $a = (1, 0, 0, \dots)$  en  $b = (0, 1, 1, 1, \dots)$  geldt

$$s(a) = s(b) = \frac{1}{2}.$$

Dit is, in feite, de enige mogelijkheid: als  $s(x) = s(y)$  dan is er een  $n$  zó dat

- $x_i = y_i$  als  $i < n$
- $x_n = 1$  en  $y_n = 0$
- $x_i = 0$  en  $y_i = 1$  als  $i > n$

Alleen voor deze paren is  $s$  niet injectief.

## Eerste bijjectie

We hebben  $s : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ , bepaald door  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$ .  
 $s$  is wel surjectief (probeer dit zelf eens te bewijzen).

We gaan  $s$  injectief maken.

Er zijn aftelbaar veel 'slechte' paren; dus  $D$ , de verzameling van de  $t$  in  $[0, 1]$  met twee originelen, is aftelbaar.

We tellen  $D$  af:  $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

We tellen ook  $s^{-1}[D]$  af:  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

## Eerste bijjectie

We hebben  $s : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$ , bepaald door  $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$ .

We hebben  $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$  en  $s^{-1}[D] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Buiten  $s^{-1}[D]$  is  $s$  injectief.

Definieer  $f : 2^{\mathbb{N}} \rightarrow [0, 1]$  door

- $f(x) = s(x)$  als  $x \notin s^{-1}[D]$
- $f(x_n) = d_n$  als  $n \in \mathbb{N}$ .

Bewijs dat dit inderdaad een bijjectie oplevert.

## Tweede bijjectie

Definieer  $g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$  door elke  $x$  en  $y$  in elkaar te vlechten:

$$g(x, y) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots)$$

Bewijs dat  $g$  een bijjectie is.

## De afmaker

Definieer nu een afbeelding van  $[0, 1]^2$  naar  $[0, 1]$  door

$$\begin{aligned} (t, s) &\mapsto (f^{-1}(t), f^{-1}(s)) \\ &\mapsto g(f^{-1}(t), f^{-1}(s)) \\ &\mapsto f(g(f^{-1}(t), f^{-1}(s))) \end{aligned}$$

## Cantor's reactie

Cantor was zo verbaasd over zijn eigen ontdekking dat hij aan Dedekind schreef

Halle d. 29<sup>ten</sup> Juni 1877.

Je le vois, mais je ne le crois pas.

## Gelijkmachtigheid

De volgende definitie staat ook in *Wiskundige Structuren*

### Definitie

We zeggen dat twee verzamelingen  $X$  en  $Y$  *gelijkmachtig* zijn als er een bijectie  $f : X \rightarrow Y$  bestaat. Notatie:  $X \sim Y$ .

Daar hoort nog een definitie bij:

### Definitie

We zeggen dat  $X$  niet meer elementen heeft als  $Y$  als er een injectie  $f : X \rightarrow Y$  bestaat. Notatie:  $X \preceq Y$ .

## Een nuttige stelling

### Stelling

*Als  $X \preceq Y$  en  $Y \preceq X$  dan  $X \sim Y$ .*

Dus: uit een injectie  $f : X \rightarrow Y$  en een injectie  $g : Y \rightarrow X$  kun je een bijectie  $b : X \rightarrow Y$  maken.

Een mooi bewijs, van Dedekind, staat in het dictaat *Verzamelingenleer*.

## Het diagonaalargument

### Stelling

*Er is geen bijectie van  $X$  naar  $\mathcal{P}(X)$ .*

### Bewijs

Zij  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  een (willekeurige) afbeelding.

Maak  $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$ .

Er is geen  $x$  met  $A = f(x)$ :

als  $x \in A$  dan  $x \notin f(x)$ , dus  $x \in A \setminus f(x)$ ;

als  $x \notin A$  dan  $x \in f(x)$ , dus  $x \in f(x) \setminus A$ .

Dus:  $f$  is niet surjectief.

## Meer en meer en meer en ...

Er is wel een injectie van  $X$  naar  $\mathcal{P}(X)$ : doe  $x \mapsto \{x\}$ .

Dus  $\mathcal{P}(X)$  heeft *echt meer* elementen dan  $X$ .

We schrijven  $X \prec \mathcal{P}(X)$ .

Dus

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))) \prec \dots$$

Dan

$$\mathbb{N}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\mathbb{N})$$

## Meer en meer en meer en ...

We gaan weer verder

$$\mathbb{N}_\infty \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty))) \prec \dots$$

Dan

$$\mathbb{N}_{\infty\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\mathbb{N}_\infty)$$

enzovoort, enzovoort, ...

## Uit: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. 1895

### Definitie

Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten  $m$  unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen.

In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}$$

## Een problematische verzameling

Met de definitie van Cantor in de hand maken we  $V$ , de verzameling van *alle* verzamelingen.

En daarmee de verzameling  $R = \{x \in V : x \notin x\}$ .

Denk aan het diagonaalargument: er volgt

$$R \in R \text{ dan en slechts dan als } R \notin R$$

Dit is de paradox van Russell.

## Wat nu?

De verzamelingenleer was in relatief korte tijd voor de Wiskunde zeer belangrijk geworden. Denk aan *Wiskundige Structuren*:

- $\mathbb{N}$  is een verzameling met ...
- $\mathbb{Z}$  is een verzameling met ...
- $\mathbb{Q}$  is een verzameling met ...
- $\mathbb{R}$  is een verzameling met ...

## Goede en slechte verzamelingen

### Goed

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \dots$

### Slecht

$V, R, \dots$

Hoe de goede van de slechte te scheiden?



## Axioma's

Denk, weer, aan *Wiskundige Structuren*:  
uit rekenregels **R1** tot en met **R12** kunnen we alle stellingen uit de  
Analyse afleiden.

- **R1–R9**: algebra
- **R10**: ordening
- **R11** en **R12**: analyse

## Axioma's

In 1908 deed Zermelo hetzelfde voor de Verzamelingenleer.  
Hij formuleerde 'rekenregels' die, als je ze strikt toepast, helpen de  
paradoxen te vermijden.

## Axioma's

### Axioma 0

Er bestaat een verzameling.

### Axioma 1

Twee verzamelingen zijn gelijk als ze exact dezelfde elementen hebben.

### Axioma 2

Als  $X$  een verzameling is en  $\varphi$  een eigenschap dan is  $\{x \in X : \varphi\}$  een verzameling.

## Axioma's

### Stelling

*Er bestaat precies één lege verzameling.*

### Bewijs

Neem een verzameling  $X$  (Axioma 0).

De verzameling  $A = \{x \in X : x \neq x\}$  bestaat (Axioma 2 met ' $x \neq x$ ').

Er geldt: voor alle  $x$  geldt  $x \notin A$  (dus  $A$  is leeg).

Als  $B$  voldoet aan 'voor alle  $x$  geldt  $x \notin B$ ' dan  $B = A$  (Axioma 1)

## Nog meer Axioma's

Zermelo formuleerde in totaal acht axioma's voor het werken met verzamelingen; later deed Fraenkel er nog eentje bij.

Uit deze axioma's zijn, nagenoeg, alle bekende resultaten uit de Analyse, Algebra, ... af te leiden.

De hele lijst en de opbouw is te vinden in het dictaat *Verzamelingenleer*.

<http://www.math.leidenuniv.nl/~kphart>