Het begin van de Verzamelingenleer

Non impeditus ab ulla scientia

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 15 october 2008

Delft University of Technology

Georg Cantor

Overzicht

Delft University of Technology

Overzicht

Delft University of Technology

Uit een brief van Cantor aan Dedekind

Halle, d. 29$^{\text{ten}}$ Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

TU Delft
Delft University of Technology

Uit een brief van Cantor aan Dedekind

Halle, d. 29$^{\text{ten}}$ Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

In moderne taal:

Bestaat er een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $(0, \infty)$?

Overzicht

Uit: Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, 1874

Stelling

Wenn eine nach irgendeinerm Gesetze gegebenen unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \tag{4}$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ *eine Zahl* η *(und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe* (4) *nicht vorkommt; dies sol nun bewiesen werden.*

Het bewijs

Cantor's bewijs maakte gebruik van de *volledigheid* van $\mathbb{R}$.
Hij begon met een rij

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

van reële getallen en een willekeurig interval

$$(\alpha, \beta)$$

Het bewijs

Cantor's bewijs maakte gebruik van de *volledigheid* van $\mathbb{R}$.
Hij begon met een rij

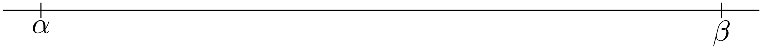
$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

van reëele getallen en een willekeurig interval

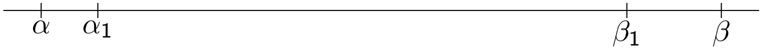
$$(\alpha, \beta)$$

Hij liet toen zien dat er een reëel getal $\eta \in (\alpha, \beta)$ bestaat ongelijk aan alle ω_ν.

Het bewijs

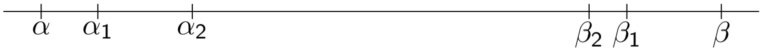


Het bewijs



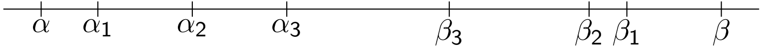
- Laat α_1 en β_1 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α, β) liggen en wel zó dat $\alpha_1 < \beta_1$.

Het bewijs



- Laat α_1 en β_1 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α, β) liggen en wel zó dat $\alpha_1 < \beta_1$.
- Laat α_2 en β_2 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_1, β_1) liggen en wel zó dat $\alpha_2 < \beta_2$.

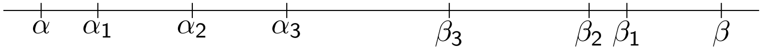
Het bewijs



- Laat α_1 en β_1 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α, β) liggen en wel zó dat $\alpha_1 < \beta_1$.
- Laat α_2 en β_2 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_1, β_1) liggen en wel zó dat $\alpha_2 < \beta_2$.
- Laat α_3 en β_3 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_2, β_2) liggen en wel zó dat $\alpha_3 < \beta_3$.

Delft University of Technology

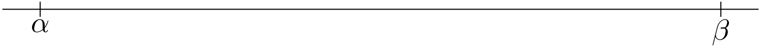
Het bewijs



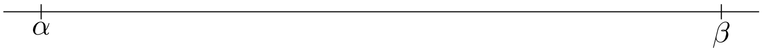
- Laat α_1 en β_1 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α, β) liggen en wel zó dat $\alpha_1 < \beta_1$.
- Laat α_2 en β_2 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_1, β_1) liggen en wel zó dat $\alpha_2 < \beta_2$.
- Laat α_3 en β_3 de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in (α_2, β_2) liggen en wel zó dat $\alpha_3 < \beta_3$.
- ...

Delft University of Technology

Het bewijs

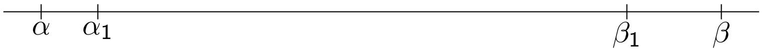


Het bewijs



Bedenk zelf waarom

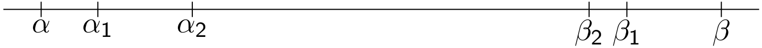
Het bewijs



Bedenk zelf waarom

- $\omega_1, \omega_2 \notin (\alpha_1, \beta_1)$,

Het bewijs

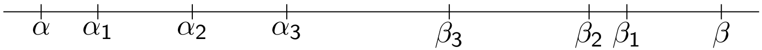


Bedenk zelf waarom

- $\omega_1, \omega_2 \notin (\alpha_1, \beta_1)$,
- $\omega_3, \omega_4 \notin (\alpha_2, \beta_2)$,

Delft University of Technology

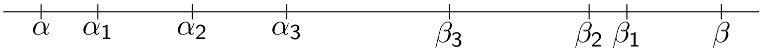
Het bewijs



Bedenk zelf waarom

- $\omega_1, \omega_2 \notin (\alpha_1, \beta_1)$,
- $\omega_3, \omega_4 \notin (\alpha_2, \beta_2)$,
- $\omega_5, \omega_6 \notin (\alpha_3, \beta_3)$,

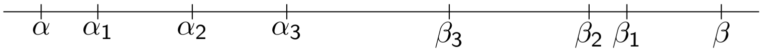
Het bewijs



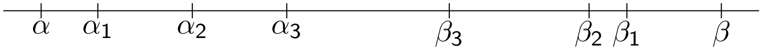
Bedenk zelf waarom

- $\omega_1, \omega_2 \notin (\alpha_1, \beta_1)$,
- $\omega_3, \omega_4 \notin (\alpha_2, \beta_2)$,
- $\omega_5, \omega_6 \notin (\alpha_3, \beta_3)$,
- $\ldots$

Het bewijs

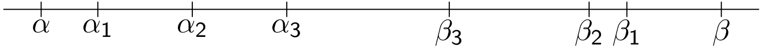


Het bewijs



Geval 1: de constructie stopt bij n.

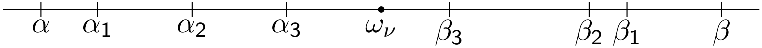
Het bewijs



Geval 1: de constructie stopt bij n.

Waarom zou dat kunnen gebeuren?

Het bewijs

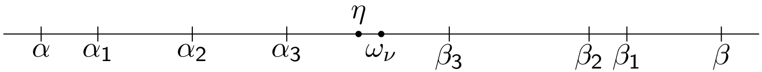


Geval 1: de constructie stopt bij n.

Waarom zou dat kunnen gebeuren?

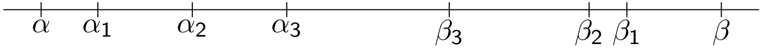
Nog maar één (of geen) ω_ν in (α_n, β_n);

Het bewijs

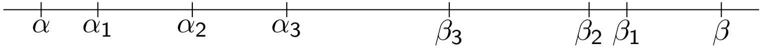


Geval 1: de constructie stopt bij n.
Waarom zou dat kunnen gebeuren?
Nog maar één (of geen) ω_ν in (α_n, β_n); dan is η gauw gevonden.

Het bewijs

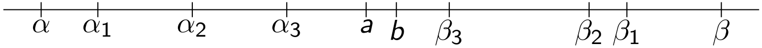


Het bewijs



Geval 2: de constructie stopt nooit.

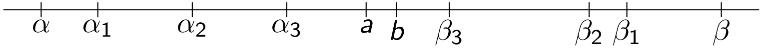
Het bewijs



Geval 2: de constructie stopt nooit.

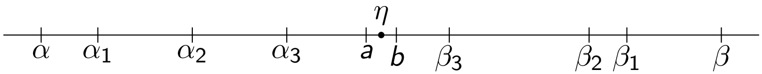
Neem $a = \sup_n \alpha_n$ en $b = \inf_n \beta_n$ (die bestaan want ...).

Het bewijs



Geval 2: de constructie stopt nooit.
Neem $a = \sup_n \alpha_n$ en $b = \inf_n \beta_n$ (die bestaan want ...).
Dan $a \leqslant b$ (waarom ook alweer?)

Het bewijs



Geval 2: de constructie stopt nooit.
Neem $a = \sup_n \alpha_n$ en $b = \inf_n \beta_n$ (die bestaan want . . .).
Dan $a \leqslant b$ (waarom ook alweer?)
Neem $\eta \in [a, b]$

Overzicht

Algebraïsche getallen

Definitie

Een getal a heet *algebraïsch* als het een oplossing is van een vergelijking van de vorm

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

met $c_0, c_1 \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$

Algebraïsche getallen

Definitie

Een getal a heet *algebraïsch* als het een oplossing is van een vergelijking van de vorm

$$c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$$

met $c_0, c_1 \ldots, c_n \in \mathbb{Z}$

Voorbeelden

$0,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \sqrt{2},\ \cos\frac{\pi}{9}\ (8x^3 - 6x - 1 = 0)\ \ldots$

Aftelbaar veel

Stelling

De verzameling van alle algebraïsche getallen is aftelbaar.

Aftelbaar veel

Stelling

De verzameling van alle algebraïsche getallen is aftelbaar.

Bewijs

Bij elke vergelijking $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$ hoort een natuurlijk getal:

$$N = n - 1 + |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_n|$$

Aftelbaar veel

Stelling

De verzameling van alle algebraïsche getallen is aftelbaar.

Bewijs

Bij elke vergelijking $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$ hoort een natuurlijk getal:

$$N = n - 1 + |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_n|$$

Elke N hoort bij maar eindig veel vergelijkingen en elke vergelijking heeft maar eindig veel oplossingen.

TU Delft
Delft University of Technology

Aftelbaar veel

Stelling

De verzameling van alle algebraïsche getallen is aftelbaar.

Bewijs

Bij elke vergelijking $c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n = 0$ hoort een natuurlijk getal:

$$N = n - 1 + |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_n|$$

Elke N hoort bij maar eindig veel vergelijkingen en elke vergelijking heeft maar eindig veel oplossingen. Elke N bepaalt dus eindig veel algebraïsche getallen en

Aftelbaar veel

Stelling

De verzameling van alle algebraïsche getallen is aftelbaar.

Bewijs

Bij elke vergelijking $c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n = 0$ hoort een natuurlijk getal:

$$N = n - 1 + |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_n|$$

Elke N hoort bij maar eindig veel vergelijkingen en elke vergelijking heeft maar eindig veel oplossingen. Elke N bepaalt dus eindig veel algebraïsche getallen en elk getal is door een N bepaald.

TU Delft
Delft University of Technology

Aftelbaar veel

Bewijs, vervolg

Maak een rij met alle algebraïsche getallen er in, als volgt:

Aftelbaar veel

Bewijs, vervolg

Maak een rij met alle algebraïsche getallen er in, als volgt:

- eerst de getallen bij $N = 0$, in volgorde (geen)

Aftelbaar veel

Bewijs, vervolg

Maak een rij met alle algebraïsche getallen er in, als volgt:

- eerst de getallen bij $N = 0$, in volgorde (geen)
- dan de getallen bij $N = 1$, in volgorde (0)

Aftelbaar veel

Bewijs, vervolg

Maak een rij met alle algebraïsche getallen er in, als volgt:

- eerst de getallen bij $N = 0$, in volgorde (geen)
- dan de getallen bij $N = 1$, in volgorde (0)
- dan de getallen bij $N = 2$, in volgorde $(-1, 1)$

Aftelbaar veel

Bewijs, vervolg

Maak een rij met alle algebraïsche getallen er in, als volgt:

- eerst de getallen bij $N = 0$, in volgorde (geen)
- dan de getallen bij $N = 1$, in volgorde (0)
- dan de getallen bij $N = 2$, in volgorde $(-1, 1)$
- dan de getallen bij $N = 3$, in volgorde $(-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$

Aftelbaar veel

Bewijs, vervolg

Maak een rij met alle algebraïsche getallen er in, als volgt:

- eerst de getallen bij $N = 0$, in volgorde (geen)
- dan de getallen bij $N = 1$, in volgorde (0)
- dan de getallen bij $N = 2$, in volgorde $(-1, 1)$
- dan de getallen bij $N = 3$, in volgorde $(-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$
- ...

Aftelbaar veel

Bewijs, vervolg

Maak een rij met alle algebraïsche getallen er in, als volgt:

- eerst de getallen bij $N = 0$, in volgorde (geen)
- dan de getallen bij $N = 1$, in volgorde (0)
- dan de getallen bij $N = 2$, in volgorde $(-1, 1)$
- dan de getallen bij $N = 3$, in volgorde $(-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$
- ...

Zie ook Stelling I.4.6 en zijn bewijs in *Wiskundige Structuren*.

Delft University of Technology

Overzicht

TU Delft
Delft University of Technology

Uit een brief van Cantor aan Dedekind

Halle, d. 5ten Januar 74.

Lässt sich eine Flache (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und ungekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?

Uit een brief van Cantor aan Dedekind

Halle, d. 5ten Januar 74.

Lässt sich eine Flache (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und ungekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?

In moderne taal:

Bestaat er een bijectie tussen $[0,1]^2$ en $[0,1]$?

Overzicht

Delft University of Technology

Uit: Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre, 1978

Stelling

(A.) Sind $x_1, x_2, \ldots\ x_n$ *voneinander unabhängige, veränderliche reele Größen, von denen jede alle Werte, die* $\geqq 0$ *und* $\leqq 1$ *sind, annehmen kann, und ist* t *eine andere Veränderliche mit dem gleichen Spielraum* $(0 \leqq t \leqq 1)$*, so ist es möglich, die Größe* t *dem Systeme der* n *Größen* $x_1, x_2, \ldots\ x_n$ *so zuordnen, daß zu jedem bestimmten Werte von* t *ein bestimmtes Wertsystem* $x_1, x_2, \ldots\ x_n$ *und umgekehrt zu jedem bestimmten Wertsysteme* $x_1, x_2, \ldots\ x_n$ *ein gewisser Wert von* t *gehört.*

Een Bewijs uit 1895

Het eerste bewijs van Cantor (uit 1878) maakte gebruik van kettingbreuken. In 1895 had hij zijn theorie verder ontwikkeld en was een wat eenvoudiger bewijs mogelijk.

Een Bewijs uit 1895

Het eerste bewijs van Cantor (uit 1878) maakte gebruik van kettingbreuken. In 1895 had hij zijn theorie verder ontwikkeld en was een wat eenvoudiger bewijs mogelijk.
Dat bestond uit twee stappen en verliep via de verzameling $2^{\mathbb{N}}$ van alle rijen 0-en en 1-en.

Delft University of Technology

Een Bewijs uit 1895

Het eerste bewijs van Cantor (uit 1878) maakte gebruik van kettingbreuken. In 1895 had hij zijn theorie verder ontwikkeld en was een wat eenvoudiger bewijs mogelijk.
Dat bestond uit twee stappen en verliep via de verzameling $2^{\mathbb{N}}$ van alle rijen 0-en en 1-en.
Een punt $x \in 2^{\mathbb{N}}$ is dus een rij;

Een Bewijs uit 1895

Het eerste bewijs van Cantor (uit 1878) maakte gebruik van kettingbreuken. In 1895 had hij zijn theorie verder ontwikkeld en was een wat eenvoudiger bewijs mogelijk.
Dat bestond uit twee stappen en verliep via de verzameling $2^{\mathbb{N}}$ van alle rijen 0-en en 1-en.
Een punt $x \in 2^{\mathbb{N}}$ is dus een rij; we schrijven $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Een Bewijs uit 1895

De volgende twee stellingen maken het bewijs, relatief, eenvoudig.

Een Bewijs uit 1895

De volgende twee stellingen maken het bewijs, relatief, eenvoudig.

Stelling

Er is een bijectie $f : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$

Een Bewijs uit 1895

De volgende twee stellingen maken het bewijs, relatief, eenvoudig.

Stelling

Er is een bijectie $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$

Stelling

Er is een bijectie $g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$

Eerste bijectie

Definieer $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.

Eerste bijectie

Definieer $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
Is dit een bijectie?

Eerste bijectie

Definieer $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
Is dit een bijectie?
Nee: voor $a = (1,0,0,\ldots)$ en $b = (0,1,1,1,\ldots)$ geldt $s(a) = s(b) = \frac{1}{2}$.

Eerste bijectie

Definieer $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
Is dit een bijectie?
Nee: voor $a = (1,0,0,\ldots)$ en $b = (0,1,1,1,\ldots)$ geldt
$s(a) = s(b) = \frac{1}{2}$.
Dit is, in feite, de enige mogelijkheid:

Eerste bijectie

Definieer $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
Is dit een bijectie?
Nee: voor $a = (1,0,0,\ldots)$ en $b = (0,1,1,1,\ldots)$ geldt $s(a) = s(b) = \frac{1}{2}$.
Dit is, in feite, de enige mogelijkheid: als $s(x) = s(y)$ dan is er een n zó dat

Eerste bijectie

Definieer $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
Is dit een bijectie?
Nee: voor $a = (1, 0, 0, \ldots)$ en $b = (0, 1, 1, 1, \ldots)$ geldt $s(a) = s(b) = \frac{1}{2}$.
Dit is, in feite, de enige mogelijkheid: als $s(x) = s(y)$ dan is er een n zó dat

- $x_i = y_i$ als $i < n$

TU Delft
Delft University of Technology

Eerste bijectie

Definieer $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
Is dit een bijectie?
Nee: voor $a = (1,0,0,\ldots)$ en $b = (0,1,1,1,\ldots)$ geldt $s(a) = s(b) = \frac{1}{2}$.
Dit is, in feite, de enige mogelijkheid: als $s(x) = s(y)$ dan is er een n zó dat

- $x_i = y_i$ als $i < n$
- $x_n = 1$ en $y_n = 0$

Eerste bijectie

Definieer $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
Is dit een bijectie?
Nee: voor $a = (1,0,0,\ldots)$ en $b = (0,1,1,1,\ldots)$ geldt $s(a) = s(b) = \frac{1}{2}$.
Dit is, in feite, de enige mogelijkheid: als $s(x) = s(y)$ dan is er een n zó dat

- $x_i = y_i$ als $i < n$
- $x_n = 1$ en $y_n = 0$
- $x_i = 0$ en $y_i = 1$ als $i > n$

Delft University of Technology

Eerste bijectie

Definieer $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
Is dit een bijectie?
Nee: voor $a = (1,0,0,\ldots)$ en $b = (0,1,1,1,\ldots)$ geldt $s(a) = s(b) = \frac{1}{2}$.
Dit is, in feite, de enige mogelijkheid: als $s(x) = s(y)$ dan is er een n zó dat

- $x_i = y_i$ als $i < n$
- $x_n = 1$ en $y_n = 0$
- $x_i = 0$ en $y_i = 1$ als $i > n$

Alleen voor deze paren is s niet injectief.

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
s is wel surjectief (probeer dit zelf eens te bewijzen).

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
s is wel surjectief (probeer dit zelf eens te bewijzen).

We gaan s injectief maken.

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
s is wel surjectief (probeer dit zelf eens te bewijzen).

We gaan s injectief maken.
Er zijn aftelbaar veel 'slechte' paren; dus D, de verzameling van de t in $[0,1]$ met twee originelen, is aftelbaar.

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
s is wel surjectief (probeer dit zelf eens te bewijzen).

We gaan s injectief maken.
Er zijn aftelbaar veel 'slechte' paren; dus D, de verzameling van de t in $[0,1]$ met twee originelen, is aftelbaar.
We tellen D af: $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
s is wel surjectief (probeer dit zelf eens te bewijzen).

We gaan s injectief maken.
Er zijn aftelbaar veel 'slechte' paren; dus D, de verzameling van de t in $[0,1]$ met twee originelen, is aftelbaar.
We tellen D af: $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$.
We tellen ook $s^{-1}[D]$ af: $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.

Delft University of Technology

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
We hebben $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $s^{-1}[D] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Delft University of Technology

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
We hebben $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $s^{-1}[D] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Buiten $s^{-1}[D]$ is s injectief.

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
We hebben $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $s^{-1}[D] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Buiten $s^{-1}[D]$ is s injectief.
Definieer $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
We hebben $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $s^{-1}[D] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Buiten $s^{-1}[D]$ is s injectief.
Definieer $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door

- $f(x) = s(x)$ als $x \notin s^{-1}[D]$

TU Delft
Delft University of Technology

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
We hebben $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $s^{-1}[D] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Buiten $s^{-1}[D]$ is s injectief.
Definieer $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door

- $f(x) = s(x)$ als $x \notin s^{-1}[D]$
- $f(x_n) = d_n$ als $n \in \mathbb{N}$.

TU Delft
Delft University of Technology

Eerste bijectie

We hebben $s : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$, bepaald door $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot 2^{-n}$.
We hebben $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$ en $s^{-1}[D] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Buiten $s^{-1}[D]$ is s injectief.
Definieer $f : 2^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ door

- $f(x) = s(x)$ als $x \notin s^{-1}[D]$
- $f(x_n) = d_n$ als $n \in \mathbb{N}$.

Bewijs dat dit inderdaad een bijectie oplevert.

Tweede bijectie

Definieer $g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ door elke x en y in elkaar te vlechten

Tweede bijectie

Definieer $g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ door elke x en y in elkaar te vlechten:

$$g(x, y)$$

TU Delft
Delft University of Technology

Tweede bijectie

Definieer $g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ door elke x en y in elkaar te vlechten:

$$g(x, y) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots)$$

Tweede bijectie

Definieer $g : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ door elke x en y in elkaar te vlechten:

$$g(x, y) = (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots)$$

Bewijs dat g een bijectie is.

De afmaker

Definieer nu een afbeelding van $[0,1]^2$ naar $[0,1]$ door

$$(t, s)$$

Delft University of Technology

De afmaker

Definieer nu een afbeelding van $[0,1]^2$ naar $[0,1]$ door

$$(t,s) \mapsto \bigl(f^{-1}(t), f^{-1}(s)\bigr)$$

De afmaker

Definieer nu een afbeelding van $[0,1]^2$ naar $[0,1]$ door

$$\begin{aligned}(t,s) &\mapsto \bigl(f^{-1}(t), f^{-1}(s)\bigr)\\ &\mapsto g\bigl(f^{-1}(t), f^{-1}(s)\bigr)\end{aligned}$$

TU Delft
Delft University of Technology

De afmaker

Definieer nu een afbeelding van $[0,1]^2$ naar $[0,1]$ door

$$\begin{aligned}(t,s) &\mapsto \bigl(f^{-1}(t), f^{-1}(s)\bigr)\\ &\mapsto g\bigl(f^{-1}(t), f^{-1}(s)\bigr)\\ &\mapsto f\Bigl(g\bigl(f^{-1}(t), f^{-1}(s)\bigr)\Bigr)\end{aligned}$$

Delft University of Technology

Cantor’s reactie

Cantor was zo verbaasd over zijn eigen ontdekking dat hij aan Dedekind schreef

Cantor's reactie

Cantor was zo verbaasd over zijn eigen ontdekking dat hij aan Dedekind schreef

Halle d. 29ten Juni 1877.

Je le vois, mais je ne le crois pas.

Overzicht

Delft University of Technology

Gelijkmachtigheid

De volgende definitie staat ook in *Wiskundige Structuren*

Gelijkmachtigheid

De volgende definitie staat ook in *Wiskundige Structuren*

Definitie

We zeggen dat twee verzamelingen X en Y *gelijkmachtig* zijn als er een bijectie $f : X \to Y$ bestaat. Notatie: $X \sim Y$.

Gelijkmachtigheid

De volgende definitie staat ook in *Wiskundige Structuren*

Definitie

We zeggen dat twee verzamelingen X en Y *gelijkmachtig* zijn als er een bijectie $f : X \to Y$ bestaat. Notatie: $X \sim Y$.

Daar hoort nog een definitie bij:

Gelijkmachtigheid

De volgende definitie staat ook in *Wiskundige Structuren*

Definitie

We zeggen dat twee verzamelingen X en Y *gelijkmachtig* zijn als er een bijectie $f : X \to Y$ bestaat. Notatie: $X \sim Y$.

Daar hoort nog een definitie bij:

Definitie

We zeggen dat X niet meer elementen heeft als Y als er een injectie $f : X \to Y$ bestaat. Notatie: $X \preccurlyeq Y$.

Een nuttige stelling

Stelling

Als $X \preccurlyeq Y$ *en* $Y \preccurlyeq X$ *dan* $X \sim Y$.

Een nuttige stelling

Stelling

Als $X \preccurlyeq Y$ en $Y \preccurlyeq X$ dan $X \sim Y$.

Dus: uit een injectie $f : X \to Y$ en een injectie $g : Y \to X$ kun je een bijectie $b : X \to Y$ maken.

Een nuttige stelling

Stelling

Als $X \preccurlyeq Y$ en $Y \preccurlyeq X$ dan $X \sim Y$.

Dus: uit een injectie $f : X \to Y$ en een injectie $g : Y \to X$ kun je een bijectie $b : X \to Y$ maken.
Een mooi bewijs, van Dedekind, staat in het dictaat *Verzamelingenleer*.

Het diagonaalargument

Stelling

Er is geen bijectie van X naar $\mathcal{P}(X)$.

Het diagonaalargument

Stelling

Er is geen bijectie van X naar $\mathcal{P}(X)$.

Bewijs

Zij $f : X \to \mathcal{P}(X)$ een (willekeurige) afbeelding.

Het diagonaalargument

Stelling

Er is geen bijectie van X naar $\mathcal{P}(X)$.

Bewijs

Zij $f : X \to \mathcal{P}(X)$ een (willekeurige) afbeelding.
Maak $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.

Delft University of Technology

Het diagonaalargument

Stelling

Er is geen bijectie van X naar $\mathcal{P}(X)$.

Bewijs

Zij $f : X \to \mathcal{P}(X)$ een (willekeurige) afbeelding.
Maak $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
Er is geen x met $A = f(x)$

TU Delft
Delft University of Technology

Het diagonaalargument

Stelling

Er is geen bijectie van X naar $\mathcal{P}(X)$.

Bewijs

Zij $f : X \to \mathcal{P}(X)$ een (willekeurige) afbeelding.
Maak $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
Er is geen x met $A = f(x)$:
als $x \in A$ dan $x \notin f(x)$, dus $x \in A \setminus f(x)$

TU Delft
Delft University of Technology

Het diagonaalargument

Stelling

Er is geen bijectie van X naar $\mathcal{P}(X)$.

Bewijs

Zij $f : X \to \mathcal{P}(X)$ een (willekeurige) afbeelding.
Maak $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
Er is geen x met $A = f(x)$:
als $x \in A$ dan $x \notin f(x)$, dus $x \in A \setminus f(x)$;
als $x \notin A$ dan $x \in f(x)$, dus $x \in f(x) \setminus A$.

TU Delft
Delft University of Technology

Het diagonaalargument

Stelling

Er is geen bijectie van X naar $\mathcal{P}(X)$.

Bewijs

Zij $f : X \to \mathcal{P}(X)$ een (willekeurige) afbeelding.
Maak $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$.
Er is geen x met $A = f(x)$:
als $x \in A$ dan $x \notin f(x)$, dus $x \in A \setminus f(x)$;
als $x \notin A$ dan $x \in f(x)$, dus $x \in f(x) \setminus A$.
Dus: f is niet surjectief.

TU Delft
Delft University of Technology

Meer en meer en meer en . . .

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$:

Meer en meer en meer en ...

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en . . .

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en . . .

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Meer en meer en meer en ...

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.
Dus

Meer en meer en meer en ...

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.
Dus

$\mathbb{N}$

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en ...

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.
Dus

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en . . .

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.
Dus

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$$

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en . . .

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.
Dus

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))$$

Meer en meer en meer en ...

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.
Dus

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))))$$

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en . . .

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.
Dus

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))) \prec \cdots$$

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en ...

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.
Dus

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))) \prec \cdots$$

Dan

Meer en meer en meer en ...

Er is wel een injectie van X naar $\mathcal{P}(X)$: doe $x \mapsto \{x\}$.
Dus $\mathcal{P}(X)$ heeft *echt meer* elementen dan X.
We schrijven $X \prec \mathcal{P}(X)$.
Dus

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})))) \prec \cdots$$

Dan

$$\mathbb{N}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\mathbb{N})$$

Meer en meer en meer en . . .

We gaan weer verder

Meer en meer en meer en . . .

We gaan weer verder

$$\mathbb{N}_\infty$$

Meer en meer en meer en . . .

We gaan weer verder

$$\mathbb{N}_\infty \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty)$$

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en . . .

We gaan weer verder

$$\mathbb{N}_\infty \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty))$$

Meer en meer en meer en . . .

We gaan weer verder

$$\mathbb{N}_\infty \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty)))$$

Meer en meer en meer en ...

We gaan weer verder

$$\mathbb{N}_\infty \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty))) \prec \cdots$$

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en . . .

We gaan weer verder

$$\mathbb{N}_\infty \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty))) \prec \cdots$$

Dan

Delft University of Technology

Meer en meer en meer en . . .

We gaan weer verder

$$\mathbb{N}_\infty \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty))) \prec \cdots$$

Dan

$$\mathbb{N}_{\infty\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\mathbb{N}_\infty)$$

Meer en meer en meer en . . .

We gaan weer verder

$$\mathbb{N}_\infty \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}_\infty))) \prec \cdots$$

Dan

$$\mathbb{N}_{\infty\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}^n(\mathbb{N}_\infty)$$

enzovoort, enzovoort, . . .

Overzicht

TU Delft
Delft University of Technology

Uit: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. 1895

Definitie

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.
In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}$$

Een problematische verzameling

Met de definitie van Cantor in de hand maken we V, de verzameling van *alle* verzamelingen.

Een problematische verzameling

Met de definitie van Cantor in de hand maken we V, de verzameling van *alle* verzamelingen.
En daarmee de verzameling $R = \{x \in V : x \notin x\}$.

Een problematische verzameling

Met de definitie van Cantor in de hand maken we V, de verzameling van *alle* verzamelingen.
En daarmee de verzameling $R = \{x \in V : x \notin x\}$.
Denk aan het diagonaalargument:

Delft University of Technology

Een problematische verzameling

Met de definitie van Cantor in de hand maken we V, de verzameling van *alle* verzamelingen.
En daarmee de verzameling $R = \{x \in V : x \notin x\}$.
Denk aan het diagonaalargument: er volgt

TU Delft
Delft University of Technology

Een problematische verzameling

Met de definitie van Cantor in de hand maken we V, de verzameling van *alle* verzamelingen.
En daarmee de verzameling $R = \{x \in V : x \notin x\}$.
Denk aan het diagonaalargument: er volgt

$$R \in R \text{ dan en slechts dan als } R \notin R$$

Een problematische verzameling

Met de definitie van Cantor in de hand maken we V, de verzameling van *alle* verzamelingen.
En daarmee de verzameling $R = \{x \in V : x \notin x\}$.
Denk aan het diagonaalargument: er volgt

$$R \in R \text{ dan en slechts dan als } R \notin R$$

Dit is de paradox van Russell.

Wat nu?

De verzamelingenleer was in relatief korte tijd voor de Wiskunde zeer belangrijk geworden.

Delft University of Technology

Wat nu?

De verzamelingenleer was in relatief korte tijd voor de Wiskunde zeer belangrijk geworden. Denk aan *Wiskundige Structuren*:

Wat nu?

De verzamelingenleer was in relatief korte tijd voor de Wiskunde zeer belangrijk geworden. Denk aan *Wiskundige Structuren*:

- $\mathbb{N}$ is een verzameling met ...

Delft University of Technology

Wat nu?

De verzamelingenleer was in relatief korte tijd voor de Wiskunde zeer belangrijk geworden. Denk aan *Wiskundige Structuren*:

- $\mathbb{N}$ is een verzameling met ...
- $\mathbb{Z}$ is een verzameling met ...

Delft University of Technology

Wat nu?

De verzamelingenleer was in relatief korte tijd voor de Wiskunde zeer belangrijk geworden. Denk aan *Wiskundige Structuren*:

- $\mathbb{N}$ is een verzameling met ...
- $\mathbb{Z}$ is een verzameling met ...
- $\mathbb{Q}$ is een verzameling met ...

Wat nu?

De verzamelingenleer was in relatief korte tijd voor de Wiskunde zeer belangrijk geworden. Denk aan *Wiskundige Structuren*:

- $\mathbb{N}$ is een verzameling met ...
- $\mathbb{Z}$ is een verzameling met ...
- $\mathbb{Q}$ is een verzameling met ...
- $\mathbb{R}$ is een verzameling met ...

Goede en slechte verzamelingen

Goed

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ...

Delft University of Technology

Goede en slechte verzamelingen

Goed

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ...

Slecht

V, R, ...

Delft University of Technology

Goede en slechte verzamelingen

Goed

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, ...

Slecht

V, R, ...

Hoe de goede van de slechte te scheiden?

Axioma's

Denk, weer, aan *Wiskundige Structuren*:

Axioma's

Denk, weer, aan *Wiskundige Structuren*:
uit rekenregels **R1** tot en met **R12** kunnen we alle stellingen uit de Analyse afleiden.

Delft University of Technology

Axioma's

Denk, weer, aan *Wiskundige Structuren*:
uit rekenregels **R1** tot en met **R12** kunnen we alle stellingen uit de Analyse afleiden.

- **R1–R9**: algebra

Delft University of Technology

Axioma's

Denk, weer, aan *Wiskundige Structuren*:
uit rekenregels **R1** tot en met **R12** kunnen we alle stellingen uit de Analyse afleiden.

- **R1–R9**: algebra
- **R10**: ordening

Axioma's

Denk, weer, aan *Wiskundige Structuren*:
uit rekenregels **R1** tot en met **R12** kunnen we alle stellingen uit de Analyse afleiden.

- **R1–R9**: algebra
- **R10**: ordening
- **R11** en **R12**: analyse

Axioma's

In 1908 deed Zermelo hetzelfde voor de Verzamelingenleer.

Axioma's

In 1908 deed Zermelo hetzelfde voor de Verzamelingenleer.
Hij formuleerde 'rekenregels' die, als je ze strikt toepast, helpen de paradoxen te vermijden.

Delft University of Technology

Axioma's

Axioma 0

Er bestaat een verzameling.

Axioma's

Axioma 0

Er bestaat een verzameling.

Axioma 1

Twee verzamelingen zijn gelijk als ze exact dezelfde elementen hebben.

Axioma's

Axioma 0

Er bestaat een verzameling.

Axioma 1

Twee verzamelingen zijn gelijk als ze exact dezelfde elementen hebben.

Axioma 2

Als X een verzameling is en φ een eigenschap dan is $\{x \in X : \varphi\}$ een verzameling.

Axioma's

Stelling

Er bestaat precies één lege verzameling.

Bewijs

Neem een verzameling X (Axioma 0).

Delft University of Technology

Axioma's

Stelling

Er bestaat precies één lege verzameling.

Bewijs

Neem een verzameling X (Axioma 0).
De verzameling $A = \{x \in X : x \neq x\}$ bestaat
(Axioma 2 met '$x \neq x$').

TU Delft
Delft University of Technology

Axioma's

Stelling

Er bestaat precies één lege verzameling.

Bewijs

Neem een verzameling X (Axioma 0).
De verzameling $A = \{x \in X : x \neq x\}$ bestaat (Axioma 2 met '$x \neq x$').
Er geldt: voor alle x geldt $x \notin A$ (dus A is leeg).

Axioma's

Stelling

Er bestaat precies één lege verzameling.

Bewijs

Neem een verzameling X (Axioma 0).
De verzameling $A = \{x \in X : x \neq x\}$ bestaat
(Axioma 2 met '$x \neq x$').
Er geldt: voor alle x geldt $x \notin A$ (dus A is leeg).
Als B voldoet aan 'voor alle x geldt $x \notin B$' dan $B = A$
(Axioma 1)

TUDelft
Delft University of Technology

Nog meer Axioma's

Zermelo formuleerde in totaal acht axioma's voor het werken met verzamelingen; later deed Fraenkel er nog eentje bij.

Nog meer Axioma's

Zermelo formuleerde in totaal acht axioma's voor het werken met verzamelingen; later deed Fraenkel er nog eentje bij.
Uit deze axioma's zijn, nagenoeg, alle bekende resultaten uit de Analyse, Algebra, . . . af te leiden.

Delft University of Technology

Nog meer Axioma's

Zermelo formuleerde in totaal acht axioma's voor het werken met verzamelingen; later deed Fraenkel er nog eentje bij.
Uit deze axioma's zijn, nagenoeg, alle bekende resultaten uit de Analyse, Algebra, ... af te leiden.
De hele lijst en de opbouw is te vinden in het dictaat *Verzamelingenleer*.
`http://www.math.leidenuniv.nl/~kphart`

Delft University of Technology