AM2520-H: Geschiedenis

week 3.7, Maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 23 maart 2020

TU Delft
Delft University of Technology

Outline

Delft University of Technology

Herinnering

Vorige week hebben we gezien hoe Dedekind (en Meray, Weierstrass, en Cantor) de reële getallen uit de rationale getallen heeft geconstrueerd.

Waar komen nu de rationale getallen vandaan?

Rationale getallen maken

Rationale getallen worden veelal voorgesteld door breuken en in de Algebra is dit geformaliseerd tot een proces dat *localisatie* wordt genoemd.

In ons geval nemen we het product $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ en definiëren daarop een equivalentierelatie:

$$\langle m, k \rangle \sim \langle n, l \rangle \qquad \text{als} \qquad m \cdot l = n \cdot k$$

Het idee is, natuurlijk, dat equivalente paren hetzelfde rationale *getal* voorstellen.

Rationale getallen maken

Met $\bigl[\langle m, k\rangle\bigr]$ noteren we de equivalentieklasse van $\langle m, k\rangle$.

Een geheel getal z vinden we terug als $\bigl[\langle z, 1\rangle\bigr]$.

Rationale getallen: rekenen

Het rekenen met rationale getallen gaat als verwacht:

$$[\langle m, k\rangle] \oplus [\langle n, l\rangle] = [\langle m \cdot l + k \cdot n, k \cdot l\rangle]$$

en

$$[\langle m, k\rangle] \odot [\langle n, l\rangle] = [\langle m \cdot n, k \cdot l\rangle]$$

Hier moet je dus nauwkeurig nagaan dat dit allemaal niet van de representanten afhangt.

Rationale getallen: rekenen

Vervolgens moet men natuurlijk nagaan dat deze optelling en vermenigvuldiging aan alle eisen van een lichaam (Dedekind's Zahlkörper) voldoen.

En dat er voor de gehele getallen niets verandert.

Als dat gedaan is schrijven we weer gewoon $+$ en $\cdot$.

Rationale getallen: ordenen

Omdat onze ‘noemers’ positief zijn kunnen we definiëren dat

$$\bigl[\langle m,k\rangle\bigr] < \bigl[\langle n,l\rangle\bigr] \qquad \text{als} \qquad m\cdot l < k\cdot n$$

En weer: nagaan dat alles onafhankelijk is van representanten,
aan de gewenste regels voldoet,
en niet is nieuws doet bij de gehele getallen.

Gehele getallen maken

De gehele getallen maken we uit de natuurlijke getallen op min of meer dezelfde manier als hierboven.

Begin nu met $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en definieer

$$\langle m, k \rangle \sim \langle n, l \rangle \qquad \text{als} \qquad m + l = n + k$$

de bedoeling is dat $\langle m, k \rangle$ het verschil $m - k$ voorstelt.

Weer: $\big[\langle m, k \rangle\big]$ is de equivalentieklasse van $\langle m, k \rangle$.

Delft University of Technology

Gehele getallen: rekenen en ordenen

Het rekenen gaat iets eenvoudiger dan bij de rationale getallen.

$$\bigl[\langle m,k\rangle\bigr] \oplus \bigl[\langle n,l\rangle\bigr] = \bigl[\langle m+n, k+l\rangle\bigr]$$

en

$$\bigl[\langle m,k\rangle\bigr] \odot \bigl[\langle n,l\rangle\bigr] = \bigl[\langle m\cdot n + k\cdot l, m\cdot l + k\cdot n\rangle\bigr]$$

en

$$\bigl[\langle m,k\rangle\bigr] < \bigl[\langle n,l\rangle\bigr] \qquad \text{als} \qquad m+l < n+k$$

Ten slotte: het natuurlijke getal n vinden we terug als $\bigl[\langle n+1,1\rangle\bigr]$.

Waar kun je dit lezen?

Er is een legendarisch boek: *Grundlagen der Analysis* (1929) van Edmund Landau

Hierin worden de constructies van $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, en ook $\mathbb{C}$ vanuit $\mathbb{N}$ gedetailleerd uitgewerkt. Onder andere ten behoeve van zijn dochters die, "al enige jaren scheikunde studeren op de universiteit maar nog niet weten waarom $x \cdot y = y \cdot x$".

In het boekje worden de natuurlijke getallen niet *geconstrueerd*, maar axiomatisch *ingevoerd*.
Daar is een reden voor en daar komen we later nog op terug.

Axioma's van Peano

In het boekje van Landau staan de volgende vijf axioma's voor de natuurlijke getallen.

1. 1 is een natuurlijk getal
2. bij elk natuurlijk getal x bestaat een natuurlijk getal dat we zijn opvolger noemen en met x' noteren
3. voor alle x geldt $x' \neq 1$
4. voor alle x en y geldt: als $x' = y'$ dan $x = y$
5. als M een verzameling natuurlijke getallen is met de volgende eigenschappen:
    1. $1 \in M$ en
    2. als $x \in M$ dan $x' \in M$

   dan geldt dat M *alle* natuurlijke getallen bevat

Axioma's van Peano

Die axioma's blijven over als je het werk van Peano nauwkeurig napluist en overbodige aanname omwerkt tot gevolgen van de vijf op de vorige slide.

Die axioma's zijn impliciet aanwezig in het werk van Dedekind dat we nu gaan bespreken.

TU Delft
Delft University of Technology

Dedekind: Was sind und was sollen die Zahlen?

In het voorwoord van dit geschrift schrijft Dedekind:

> Meine Hauptantwort auf die im Titel dieser Schrift gestellte Frage lautet: die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als ein Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen.

Delft University of Technology

Waarom een schepping?

Wat Dedekind zich kennelijk realiseerde is dat tellen en rekenen echt mensenwerk is.

Het is je nauwelijks voor te stellen maar: 'het aantal elementen van een verzameling' is een bedenksel, geen natuurverschijnsel.

Dat kun je zien aan de wildgroei, door de tijden heen en over de wereld, van manieren om aantallen te boekhouden.
De Indo-Arabische schrijfwijze heeft eerst Europa veroverd en daarna aan de hele wereld opgelegd.

Natuurlijke getallen maken

In zijn boekje besteedt Dedekind de eerste paragrafen aan het ontwikkelen van een stukje verzamelingenleer, in het bijzonder doorsneden, verenigingen, en afbeeldingen.

De meeste rekenregels over die noties die we uit het eerste jaar kennen komen daar aan bod.

Delft University of Technology

Natuurlijke getallen maken

Een belangrijke stelling is de volgende.

Stelling

*Stel S is een verzameling en $\varphi : N \to N$ een afbeelding.
Dan bestaat bij elke deelverzameling A van S een deelverzameling A_φ van S die voldoet aan*

- $A \subseteq A_\varphi$,
- $\varphi[A_\varphi] \subseteq A_\varphi$, *en*
- *als* $A \subseteq B$ *en* $\varphi[B] \subseteq B$ *dan* $A_\varphi \subseteq B$.

A_φ heet de φ-keten van A.

Natuurlijke getallen maken

In paragrafen 5 en 6 gebeurt het:

Eerst definieert Dedekind wat een oneindige verzameling is, en dus ook wat een eindige verzameling is.

Definitie

Een verzameling S heet *oneindig* als deze even groot is als een echte deelverzameling; in het tegenovergestelde geval heet S een *eindige* verzameling.

Twee verzamelingen zijn even groot als er een bijectie tussen bestaat.

Mooie stelling met een mooi bewijs

Stelling

Er bestaan oneindige verzamelingen.

Dedekind's bewijs.

Meine Gedankenwelt, d. h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich.

De afbeelding γ die aan elk object x de gedachte $\gamma(x)$ toevoegt is injectief maar niet surjectief.
Ikzelf zit niet in het beeld. $\square$

Delft University of Technology

Enkelvoudig oneindige verzamelingen

Een verzameling N is *enkelvoudig oneindig* als er een afbeelding $\varphi : N \to N$ en een element 1 van N zijn zó dat

- φ is injectief,
- $1 \notin \varphi[N]$, en
- N is de φ-keten van $\{1\}$.

Er zijn enkelvoudig oneindige verzamelingen

Stelling

Als S oneindig is en $\varphi : S \to S$ injectief maar niet surjectief dan is voor elke punt s van $S \setminus \varphi[S]$ de φ-keten van $\{s\}$ een enkelvoudig oneindige verzameling.

Natuurlijke getallen

Stel N is enkelvoudig oneindig, met afbeelding $\varphi : N \to N$ en speciaal punt 1.

Dan voldoet deze verzameling aan de axioma's van Peano, als we $\varphi(x)$ als opvolgerfunctie nemen, dus met $x' = \varphi(x)$.

Dit staat niet expliciet in het boekje van Dedekind (want Peano was later) maar Dedekind stelt vast dat aan juidt die regels voldaan is en leidt uit de regels alle andere eigenschappen die we van de natuurlijke getallen willen hebben af.

Natuurlijke getallen: optellen

Bijvoorbeeld: de optelling wordt *gedefinieerd* door middel van recursie.

Stelling

Er is één afbeelding $o : N \times N \to N$ *die voldoet aan*

- $o(x, 1) = x'$, *en*
- $o(x, y') = o(x, y)'$.

Delft University of Technology

Natuurlijke getallen: optellen

Bijvoorbeeld: de optelling wordt *gedefinieerd* door middel van recursie.

Stelling

Er is één afbeelding $o : N \times N \to N$ *die voldoet aan*

- $o(x, 1) = x'$, *en*
- $o(x, y') = o(x, y)'$.

De o is natuurlijk van optelling, en de bedoeling is dat de optelling voldoet aan:
$x + 1 = x'$ en $x + y' = (x + y) + 1$.

Natuurlijke getallen: optellen

De optelling ligt hiermee helemaal vast en voldoet aan alle gewenste eigenschappen.

De bewijzen gaan allemaal met inductie en volgens het volgende schema.

Stel $M = \{x : o(x,1) = o(1,x)\}$.
Dan geldt $1 \in M$; want $o(1,1) = o(1,1)$.
Dan geldt: als $x \in M$ dan $x' \in M$;
want $o(x',1) = (x')' = o(x,1)' = o(1,x)' = o(1,x')$.
Conclusie $M = N$, dus $o(x,1) = o(1,x)$ voor alle $x \in N$.

Natuurlijke getallen: rekenen

Het boekje van Dedekind, en Hoofdstuk 1 van het boek van Landau, staan vol met dergelijke definites en bewijzen voor optelling, vermenigvuldiging, en machtsverheffing.

Delft University of Technology

Natuurlijke getallen: bestaan ze echt?

Daarmee zijn de natuurlijke getallen

- geconstrueerd door Dedekind,
- beschreven door Landau.

Waarom dit verschil?

Wat Dedekind nog niet doorhad maar de wiskundigen ten tijde van Landau wel is dit:
Het bestaan van oneindige verzamelingen is niet te bewijzen;
het is een axioma dat aan de verzamelingenleer (de wiskunde) toegevoegd moet worden.