AM2520-H: Geschiedenis

week 3.7, Donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 26 maart 2020

TU Delft
Delft University of Technology

Outline

Bolzano

Menge

Einen Inbegriff, den wir einem solchen Begriffe unterstellen, bei dem die Anordnung seiner Teile gleichgultig ist (an dem sich also nichts für uns Wesentliches ändert, wenn sich bloss diese ändert), nenne ich eine Menge;

Cantor

Menge

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.
In Zeichen drücken wir dies so aus:

$$M = \{m\}$$

Dedekind

Meine gedankenwelt, d. h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, is undendlich.
Denn wenn s ein Element von S bedeutet, so ist der gedanke s', daß s Gegenstand meines Denkens sein kann, selbst ein Element von S.

Delft University of Technology

Resultaten van Cantor

We hebben al wat resultaten van Cantor gezien.

Stelling

Er is geen bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$.

Stelling

Er is een bijectie tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, zelfs tussen $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Resultaten van Cantor

Cantor breidde het getalidee op twee manieren uit.

- Kardinaalgetal: om over 'het aantal elementen' te kunnen spreken
- Ordinaalgetal: om over ordeningen, rangschikkingen te kunnen spreken

Delft University of Technology

Resultaten van Cantor

Daarnaast:

Ontwikkeling van het begin van de topologie van de $\mathbb{R}^n$:

- gesloten en open verzamelingen
- verdichtingspunten
- de Cantorverzameling en de Cantorfunctie

Resultaten van Cantor

De Cantorfunctie:

een continue functie $f : [0,1] \to [0,1]$ met de volgende eigenschappen

- $f(0) = 0$
- $f(1) = 1$
- $\{x : f'(x) = 0\}$ heeft maat 1

Resultaten van Cantor

Een belangrijke stelling.

Stelling

Als X een verzameling is dan is er geen bijectie $f : X \to \mathcal{P}(X)$.

Bewijs.

Als $f : X \to \mathcal{P}(X)$ dan zit $R = \{x : x \notin f(x)\}$ niet in het beeld van f. $\square$

Gevolg: er is geen grootste kardinaalgetal.

Problemen

De verzameling, V, van alle verzamelingen is problematisch.

Immers: $\mathcal{P}(V) \subseteq V$, dus $|\mathcal{P}(V)| \leqslant |V|$.

Tegenspraak!

Problemen

De verzameling, K, van alle kardinaalgetallen is problematisch.

Immers: neem een verzameling, X, en maak $Y = \bigcup X$.

Dan geldt voor elke $A \in X$ dat $|A| \leqslant |Y|$.

Maar $|Y| < |\mathcal{P}(Y)|$

Er is geen verzameling waar alle kardinaalgetallen in zitten.

Welordening

Een *welordening* van een verzameling X is een lineaire ordening $\prec$ van X met de eigenschap dat

elke niet-lege deelverzameling heeft een minimum.

Cantor had dit nodig bij zijn onderzoek naar de structuur van gesloten verzamelingen in $\mathbb{R}^n$.

Dankzij welordeningen kun je inductie en recursie doen.

TU Delft
Delft University of Technology

Ordinaalgetallen

Ordinaalgetallen zijn 'orde-typen' van welgeordende verzamelingen.

Dit is precies te maken en je kunt met die getallen rekenen.

Twee problemen ...

Probleem 1

Kun je elke verzameling welordenen?

Dat zou lekker praktisch zijn wegens die inductie en recursie.

Cantor dacht van wel.

Probleem 2

De verzameling van alle ordinaalgetallen is problematisch.

Deze heeft ook een orde-type, een ordinaalgetal dat groter is dan elk ordinaalgetal . . .

Paradox van Burali-Forti

Paradox van Russell

Bertrand Russell vond nog een probleem.

Je kunt Cantor's definitie van 'verzameling' wat exacter maken door formules te gebruiken.

Als φ een verzameltheoretische formule is dan zou

$$\{x : \varphi(x)\}$$

een verzameling moeten zijn.

Dat sluit de gedachtenwereld van Dedekind uit en klinkt goed, maar ...

Paradox van Russell

Geïnspireerd door de stelling van Cantor.

Bekijk $R = \{x : x \notin x\}$ (veel simpeler kan het niet).

Maar voor R geldt: $R \in R$ dan en slechts dan als $R \notin R$.

Dat was niet zo mooi ...

De Welordeningsstelling

Ernst Zermelo bewees in een brief aan Hilbert dat elke verzameling te welordenen is.

Stelling (Zermelo, 1904)

Elke verzameling, M, kan welgeordend worden.

Eerste stap in het bewijs:
neem een functie γ die aan elke niet-lege deelverzameling N van M een 'uitgekozen' element $\gamma(N)$ van N toekent.

De welordeningsstelling

Rechtvaardiging:

het aantal van dergelijke toekenningen is gelijk aan het product $\prod \mathfrak{n}$ van de kardinaalgetallen van die verzamelingen N
en dus ongelijk aan 0.

Delft University of Technology

De welordeningsstelling

Het probleem met die rechtvaardiging?

Het 'dus' is circulair: de uitspraak
"het product van kardinaalgetallen die ongelijk zijn aan 0 is ongelijk aan 0"
is een herformulering van
"er is zo'n toekenning γ"

Keuzeaxioma

Die aanname bleek een nieuw axioma.

Keuzeaxioma

Als $\{X_i : i \in I\}$ een familie niet-lege verzamelingen is dan is er een functie $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ zó dat $f(i) \in X_i$ voor alle i.

Keuzeaxioma

Veel mensen geloven het Keuzeaxioma zonder meer als je het formuleert als

Keuzeaxioma

Het cartesisch product van niet-lege verzamelingen is niet-leeg.

Maar, dat is letterlijk dezelfde uitspraak als op de vorige slide.

Het cartesisch product $\prod_{i\in I} X_i$ is namelijk gedefinieerd als
de verzameling van alle functies $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ met $f(i) \in X_i$ voor alle i.

Delft University of Technology

Keuzeaxioma

De discussies laaiden hoog op na dit bewijs.
Zonder expliciete constructie van zo'n functie was het bewijs niets waard vond men.

Erger nog: het Keuzeaxioma en de Welordeningsstelling zijn equivalent.

Immers: neem een welordening $\prec$ van $\bigcup_{i \in I} X_i$ en *definieer* $f(i) = \min X_i$.

OK: definieer eens een welordening van $\mathbb{R}$?

Keuzeaxioma en Dedekind

Even terug naar Dedekind.
Aan het eind van *Was sind und was sollen die Zahlen?* staat een bewijs dat elke oneindige verzameling Dedekind-oneindig is.

Dat gaat als volgt: stel X is niet eindig.
Voor elke n is er een injectie a_n van $\{1, 2, \ldots, n\}$ naar X.
Met behulp van deze rij $\langle a_n \rangle_n$ injecties maakte Dedekind een injectieve afbeelding $a : \mathbb{N} \to X$.

En je hebt het Keuzeaxioma nodig om 'deze rij' te kunnen zeggen.

Keuzeaxioma in het eerste jaar

En loop nu het bewijs uit het eerste jaar van de volgende stelling zorgvuldig na.

Stelling

Een functie $f : D \to \mathbb{R}$ is continu in $d \in D$ dan en slechts dan als voor elke rij $\langle d_n \rangle_n$ in D met $\lim_n d_n = d$ geldt $\lim_n f(d_n) = f(d)$.

En ja, zonder Keuzeaxioma is die stelling niet te bewijzen.

De Axiomatische Methode

Dit was het begin van het Axiomatische tijdperk.

Men definieerde niet meer wat de dingen waren, maar hoe ze zich moesten gedragen.

Zermelo deed dit voor de Verzamelingenleer.

Hilbert wilde dit voor de hele wiskunde en het liefst allemaal zo eenvoudig mogelijk.

Zijn eerste doel was de rekenkunde.

Russell en Whitehead

Een van de eerste pogingen was van Russell en Whitehead.
Die gingen iets anders te werk als Dedekind.

0 is de lege verzameling

1 is de klasse van alle verzamelingen met precies één element
α behoort tot 1 als $(\exists x)(x \in \alpha) \wedge (\forall x)(\forall y)\big((x \in \alpha \wedge y \in \alpha) \to x = y\big)$

2 is de klasse van alle verzamelingen met precies twee elementen
α behoort tot 2 als $(\exists x)(\exists y)\big(x \in \alpha \wedge y \in \alpha \wedge x \neq y \wedge (\forall z)(z \in \alpha \to (z = x \vee z = y))\big)$

Russell en Whitehead

Optellen: disjuncte vereniging nemen.

Stelling 54.43 (pagina 362)

$\vdash (\alpha, \beta \in 1 \wedge \alpha \cap \beta = \emptyset) \rightarrow \alpha \cup \beta \in 2$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Russell en Whitehead

In drie dikke boeken, *Principia Mathematica* geheten, probeerden Russell en Whitehead de hele Wiskunde te grondvesten.

Gödel

In 1931:
Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I.

De titel zegt het al: de aanpak van Russell en Whitehead werkt niet zoals ze misschien wilden.

Onvolledigheidsstelling

Stel K is een theorie met

- De verzameling axioma's is recursief
- $\vdash_K 0 \neq 1$
- Elke recursieve functie is representeerbaar in K

Dan is er een gesloten formule φ zó dat

- Als K consistent is dan geldt niet $\vdash_K \varphi$
- Als K ω-consistent is dan geldt niet $\vdash_K \neg\varphi$.

Wat betekent dat allemaal?
Volg het college Logic (AM3520) in het derde jaar.

Gevolgen

Dit slaat alle hoop van Hilbert de bodem in.

Uit de axioma's van Peano zijn niet alle ware beweringen over $\mathbb{N}$ af te leiden.

Gödel's bewijs stelde hem ook in staat aan te tonen dat een bewijs van de consistentie van de axioma's van Peano niet alleen op basis van die axioma's gegeven kan worden.

Gevolgen

De aannamen in de Onvolledigheidsstelling zijn behoorlijk flexibel.

De stelling is ook van toepassing op Zermelo's axiomatisering van de Verzamelingenleer.

Die is dus onvolledig, en die kan zijn eigen consistentie niet bewijzen.

Delft University of Technology

Verzamelingenleer

Dat de Verzamelingenleer onvolledig is bleek later ook op een andere manier.

Gödel bewees dat het Keuzeaxioma en de Continuumhypothese niet fout zijn.

Cohen bewees dat het Keuzeaxioma en de Continuumhypothese niet bewijsbaar zijn.

Beide ten opzichte van Zermelo's axioma's.

Delft University of Technology