AM2520-H: Geschiedenis

week 3.8, Donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 2 april 2020

Delft University of Technology

Outline

1. Bernhard Riemann (1826–1866)
   - Complexe Analyse
   - De integraal
   - Meetkunde
   - Priemgetallen

Delft University of Technology

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Geboren: 1826 in Breselenz (Hannover)
Gestorven: 1866 in Selasca (Italië)
Middelbare school: Hannover en Lüneburg
Universiteit: Göttingen en Berlijn.
Eerst Theologie, later Wiskunde
1851: Promotie bij Gauss
1854: Habilitation
(Tweede proefschrift waarmee men het recht verwerft onderwijs te mogen geven aan de universiteit)
1856: Betaalde positie in Göttingen

Wat weten we?

Riemann was een perfectionist.

Hij publiceerde (relatief) niet veel omdat het allemaal perfect moest zijn.

Ook op school: huiswerk te laat, proefwerken maar half af omdat hij niet tevreden was met zijn eigen werk, . . .

Hij zat het liefst gewoon te werken.

Maar wat hij publiceerde was meteen raak.

Complexe functies

Het begon met zijn dissertatie: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen compexen Grösse* (zeg maar: AM2040)

Over differentieerbare functies van (een open deelverzameling van) $\mathbb{C}$ naar $\mathbb{C}$.

Differentieerbaar

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

bestaat overal.

Dat is (veel) sterker dan differentieerbaarheid bij Analyse 2.

TUDelft
Delft University of Technology

Complexe functies

Het meeste van wat Riemann in zijn dissertatie deed gaat boven het college AM2040 uit.

Wat je wel terug zult zien zijn de Cauchy-Riemannvergelijkingen en harmonische functies.

Een functie functie $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kun je schrijven als $u + \mathrm{i}v$, waar u en v functies van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}$ zijn.

De complexe differentieerbaarheid van f komt dan neer op de differentieerbaarheid van u en v en

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{en} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

dit zijn de Cauchy-Riemannvergelijkingen.

Complexe functies

Zowel u als v voldoet aan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dus u en v zijn *harmonische* functies.

En omgekeerd als u harmonisch is dan is er een v zó dat $f = u + \mathrm{i}v$ complex differentieerbaar is.

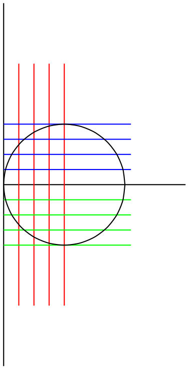
Complexe functies en meetkunde

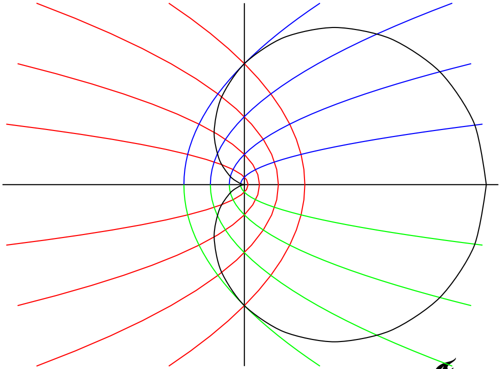
Differentieerbare functies zijn ook gekarakteriseerd door het feit dat ze hoeken bewaren.

Dat wil zeggen als twee krommen K en L elkaar snijden in α en f is differentieerbaar met $f'(\alpha) \neq 0$ dan snijden $f(K)$ en $f(L)$ elkaar in $f(\alpha)$ onder dezelfde hoek als K en L in α.

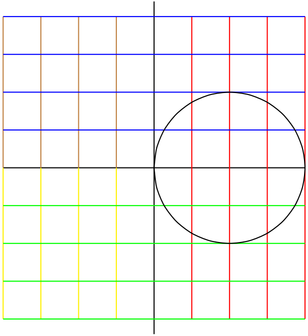
Delft University of Technology

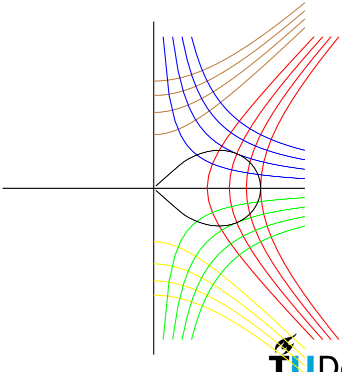
Kwadrateren





Worteltrekken





Complexe functies en meetkunde

Riemann gebruikte deze dingen om diepe resultaten over het afbeeldingsgedrag van differentieerbare functies af te leiden.

Bijvoorbeeld:
het is niet goed mogelijk een vierkantswortel, of een logaritme op $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ te definiëren.

Riemann liet zien hoe dat toch te doen op een soort uitbreiding van $\mathbb{C}$.
(Riemannoppervlakken)

De integraal

De habilitation heette: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*

Hier hebben we het eerder over gehad: Fourierreeksen.

Wanneer is een functie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ te schrijven als

$$\begin{aligned} f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \end{aligned}$$

De integraal

Zoals we gezien hebben dacht Fourier: altijd en

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad \text{en} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

Zo ongeveer de eerste die een positief resultaat bewees was Dirichlet:
Het klopt voor functies met eindig veel discontinuïteiten en extremen.

De integraal

Na wat geschiedenis ging Riemann aan het werk met

$$\text{Aso zuerst: Was hat man unter } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ zu verstehen?}$$

Het oude, meetkundige, integraalbegrip voldeed niet.

Hier zien we de definitie met Riemann-sommen.

De integraal

En een karakterisering:

Bij gegeven $A > 0$ en $\varepsilon > 0$ is er altijd een $\delta > 0$ zó dat bij elke verdeling van $[a, b]$ met maaswijdte ten hoogste δ de som van de lengten van de intervallen waarin f meer dan A varieert kleiner dan ε is.

Dit kun je het makkelijkst via onder- en bovensommen bewijzen.

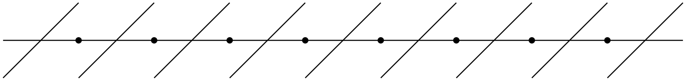
De voorwaarde is equivalent met het kunnen vinden van boven- en ondersommen met willekeurig klein verschil.

De integraal

Toepassing

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}$$

is integreerbaar op $[0,1]$ (op elk gesloten en begrensd interval).
Herinner $(x) = x - n$ als $n - \frac{1}{2} < x < x + \frac{1}{2}$ en $f(n + \frac{1}{2}) = 0$ $(n \in \mathbb{Z})$.



De integraal

Riemann bewees ook: als f integreerbaar is dan convergeren de a_n en b_n naar 0.
(Dit heet nu het Riemann-Lebesguelemma; het geldt ook voor Lebesgue-integralen)

Riemann bewees een nogal ingewikkelde (voor ons) voorwaarde onder welke $f(x)$ inderdaad som van de Fourierreeks is.

Meetkunde

Een voordracht bij zijn Habiltationscolloquium:
Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen

Riemann had drie titels opgegeven en Gauss koos deze.

Het stuk is niet lang maar het legde de basis voor wat nu Differentiaalmeetkunde heet.

Het beschrijft hoe men na kan denken over hoger-dimensionale gekromde ruimten.
In het Duits: *n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit*
Nederlands: variëteit; Engels: Manifold

Meetkunde

We hebben daar een klein beetje van gezien op dinsdag bij de niet-Euclidische meetkunde.

Daar werd booglengte, en dus afstand, gedefineerd door middel van een differentiaalvorm.

Riemann liet zien hoe dat in hogere dimensies ook gedaan kon worden.

Hij creëerde de dingen die Einstein later nodig zou hebben bij de ontwikkeling van de relativiteitstheorie.

Priemgetallen

En, natuurlijk, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*

Het startpunt, een formule van Euler

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_n \frac{1}{n^s}$$

"Die Function … bezeichne ich $\zeta(s)$"

Priemgetallen

Via

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx} x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} u^{s-1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n^s}\Gamma(s-1)$$

zie we dat

$$\Gamma(s-1)\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx} x^{s-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$$

Priemgetallen

Waarom al dit gemanipuleer?

De oorspronkelijke uitdrukking $\zeta(s)$ bestaat alleen voor complexe s met $\operatorname{Re} s > 1$.

De formules die Riemann maakte golden voor *alle* complexe getallen s, behalve $s = 1$.

Daarmee was $\zeta(s)$ voor alle (op één na) complexe getallen gedefinieerd.

En dat stelde hem in staat iets te zeggen over $\pi(x)$, 'het aantal priemgetallen onder x'.

Priemgetallen

Hij definieerde

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$

en kreeg hier een uitdrukking voor:

$$f(x) = \mathrm{Li}(x) + \sum_{\alpha}\left(\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}) + \mathrm{Li}(x^{\frac{1}{2}-\alpha i})\right) + \int_x^\infty \frac{1}{x^2-1}\frac{\mathrm{d}x}{x\log x} + \log\frac{1}{2}$$

NB $\mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$ (de logaritmische integraal).

Belangrijk hier is de som $\sum_\alpha$.

Priemgetallen

Die som is over de nulpunten met positief reëel deel van

$$\xi(t) = \Gamma(\tfrac{s}{2})(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)$$

Hierbij is de relatie tussen s en t gegeven door $s = \frac{1}{2} + ti$.

De Riemann-hypothese

Over die nulpunten van $\xi(t)$ staat in het artikel:

> . . . es ist sehr wahrscheinlig, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien.

En hier staat dan de beroemde Riemann-hypothese.

Priemgetallen

Als α een nulpunt van ξ is dan is $\frac{1}{2} + \alpha\mathrm{i}$ een nulpunt van ζ

Tegenwoordig gaat het om de nulpunten van ζ; die moeten op de verticale lijn $\{\frac{1}{2} + t\mathrm{i} : t \in \mathbb{R}\}$ liggen.

Als die nulpunten echt op de lijn liggen betekent dat dat de benadering die we van $\pi(x)$ krijgen optimaal is.

Er geldt namelijk ook

$$\pi(x) = \sum_m (-1)^\mu \frac{1}{m} f(x^{\frac{1}{m}})$$

waar m door de kwadraatvrije getallen loopt en μ telkens het aantal priemfactoren van m is.

Ten slotte

Bij een zoektocht naar afbeeldingen van Riemann zag ik ook een T-shirt me de formule voor de functie $f(x)$. Toen ik doorklikte vond ik dit:

(`redbubble.com`, ze hebben meer)