AM2520-H: Van Euler tot Fourier

week 2.2, Dinsdag

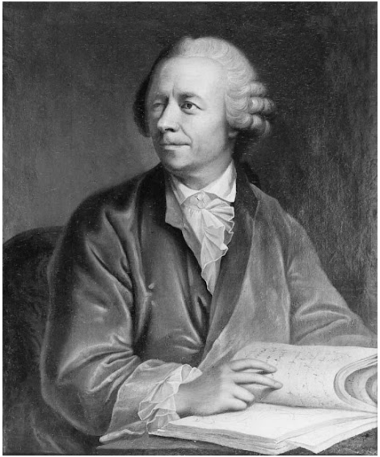
K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 17 november, 2020

Outline

Leonhard Euler (1707-1783)



- geboren in Basel, Zwitzerland
- student van Johann Bernoulli (tot 1726)
- 1726 sollicitatie in Basel (genegeerd)
- 1727 naar St. Petersburg (Akademie der Wetenschappen), 1733 hoogleraar
- 1741 naar Berlijn (Akademie der Wetenschappen)
- 1766 terug naar St. Petersburg
- twee keer getrouwd, 13 kinderen, diep religieus, vanaf 1771 bijna totaal blind

Leonhard Euler (1707-1783)

Zijn werk beslaat zo'n 12000 bladzijden.

Drie invloedrijke leerboeken.

1. Introductio in Analysin Infinitorum (1748)
2. Institutiones Calculi Differentialis (1755)
3. Institutiones Calculi Integralis (1768)

De Analyse wordt een wiskundige discipline; bestudeert functies.
Geen plaatjes (zie de on-line versies); geen meetkunde maar 'algebra'.

Leonhard Euler (1707-1783)

Een bekende formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

met een mooi bewijs.

En ook:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

en

$$1 - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + \cdots = 0.596347362123\ldots$$

Heh, wat?

Introductio in Analysin Infinitorum

Dit boek legde de basis voor onze Analyse/Calculus.

Hoe wij met e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln x$, ... omgaan staat hier allemaal in.

Logaritmen zijn de omkeerfuncties van exponentiële functies.

Introductio in Analysin Infinitorum

Exponentiële functies, als ω oneindig klein is dan:

$$a^\omega = 1 + k\omega \text{ of } \omega = \log_a(1 + k\omega)$$

en dus

$$a^{j\omega} = (1 + k\omega)^j = 1 + \frac{j}{1}k\omega + \frac{j(j-1)}{1\cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{j(j-1)(j-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^3\omega^3 + \cdots$$

Neem nu $j = z/\omega$ (en dus $\omega = z/j$) met z 'eindig', dan is j oneindig groot en dus

$$a^z = 1 + kz\frac{1(j-1)}{1\cdot 2\cdot j}k^2z^2 + \frac{1(j-1)(j-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot j^2}k^3z^3 + \cdots$$

nu wegstrepen en . . .

Introductio in Analysin Infinitorum

We vinden

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1}{1 \cdot 2}k^2z^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3z^3 + \cdots$$

Introductio in Analysin Infinitorum

Omgekeerd: met behulp van $\omega = \log_a(1+k\omega)$ vinden we, als $(1+k\omega)^j = 1+x$ dan

$$\log_a(1+x) = j\omega$$

Maar $k\omega = (1+x)^{\frac{1}{j}} - 1$ en dus

$$\log_a(1+x) = \frac{j}{k}(1+x)^{\frac{1}{j}} - \frac{j}{k}$$

Pas hier Newton's binomiaalformule op toe:

$$\log_a(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)$$

Introductio in Analysin Infinitorum

Machtreeksen voor cosinus en sinus: Via De Moivre:

$$\cos nz = \cos^n z - \binom{n}{2} \cos^{n-2} z \sin^2 z + \binom{n}{4} \cos^{n-4} z \sin^2 z + \cdots$$

Neem n oneindig groot, z oneindig klein, zó dat $v = nz$ 'eindig' is.

Dan geldt $\cos z = 1$ en $\sin z = z$, en dus

$$\cos v = 1 - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

Idem voor de sinus

Bishop George Berkeley (1685–1753)

Schreef *The Analyst* (1734)

De ondertitel:
A DISCOURSE Addressed to an Infidel MATHEMATICIAN.
WHEREIN It is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith

Uit *The Analyst*

It must, indeed, be acknowledged, that [Newton] used Fluxions, like the Scaffold of a building, as things to be laid aside or got rid of, as soon as finite Lines were found proportional to them.
But then these finite Exponents are found by the help of Fluxions.
Whatever therefore is got by such Exponents and Proportions is to be ascribed to Fluxions: which must therefore be previously understood.
And what are these Fluxions?
The Velocities of evanescent Increments?
And what are these same evanescent Increments?
They are neither finite Quantities nor Quantities infinitely small, nor yet nothing.
May we not call them the Ghosts of departed Quantities?

Reacties

Euler: Institutiones Calculi Differentialis

Therefore, there exist an infinite number of orders of infinitely small quantities. Although all of them are equal to 0, still they must be carefully distinguished one from the other if we are to pay attention to their mutual relationships, which has been explained through a geometric ratio.

Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783)

We have seen above that in the differential calculus there are really no infinitely small quantities of the first order; that actually those quantities [the differentials] are supposed to be divided by other supposedly infinitely small quantities; in this state they do not denote either infinitely small quantities nor ratios of infinitely small quantities; they are the limits of the ratios of two finite quantities.

Wat is een functie?

Van Dale:

- wiskunde: veranderlijke grootheid die als zodanig van een of meer andere afhangt
- wiskunde: afbeelding (5) van een verzameling in een andere
- (afbeelding) wiskunde: betrekking tussen twee verzamelingen of figuren waarbij aan ieder punt van de ene verzameling één punt van de andere verzameling is toegevoegd = **correspondentie** (8), **verwantschap** (2a)

Latijn: functio (fungi, functus: uitvoeren)

Wat is een functie?

Lang geen onderwerp van beschouwing.

Wel:

- variabele grootheden (Descartes)
- fluents (Newton)
- vergelijkingen (algebraïsche betrekkingen tussen grootheden)
- krommen

Leibniz: een raaklijn is een functie van een kromme

Wat is een functie?

Euler

Een functie van een variabele grootheid is een analytische uitdrukking samengesteld op enigerlei wijze uit de variabele grootheid and getallen of constante grootheden.

Sinds Euler bestuderen we functies.

De trillende snaar

d'Alembert (1747)

De golfvergelijking

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

heeft als oplossing(en)

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\big)$$

waarbij φ een willekeurige functie is.

Hierbij moet φ door een analytische uitdruking gegeven zijn (anders gelden de regels van de Calculus niet).

De trillende snaar

Euler: je mag ook ‘functies’ gebruiken die stuksgewijs door analytische uitdrukkingen gegeven zijn, of met de ‘vrije hand te tekenen’.
(Euler noemde de eerste soort *discontinu* of *gemengd*).

d’Alembert: dat gaat tegen de regels van de analyse in

De trillende snaar

Daniel Bernoulli (1754)

De oplossing is

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} b_n \sin(\tfrac{n\pi x}{l}) \cos(\tfrac{n\pi at}{l})$$

dus $\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi x}{l})$.

Euler: dat kan niet de meest algemene oplossing zijn
(Want: als twee functies op een interval gelijk zijn dan zijn ze overal gelijk)

Bernoulli aan Euler en d'Alembert: "Mooie wiskunde maar wat heeft het met trillende snaren te maken?"

Het functiebegrip was aan uitbreiding toe.

Fourier

Het functiebegrip rond 1800

Euler (1755):

"If, however, some quantities depend on others in such a way that if the latter are changed the former undergo changes themselves, then the former quantities are called functions of the latter quantities. This is a very comprehensive notion and comprises in itself all the modes through which one quantity can be determined by others. If, therefore, x denotes a variable quantity then all the quantities which depend on X in any manner whatever or are determined by it are called its functions...."

(modern, maar bij Euler zelf zonder gevolgen)

Joseph Fourier (1768-1830)

Théorie analytique de la chaleur (1807)

"Fourier reeks" $\varphi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_m \cos(n\pi x/l) + b_n \sin(n\pi x/l)$

bewert: "elke functie op $(-l, l)$ kan op die manier worden geschreven" (juist?)

$\longrightarrow$ domein van en functie belangrijk, Eulers begrip van "continu" onzin