① TOPOLOGIE IN $\mathbb{R}^n$.

② ALGEMENE TOPOLOGIE
OPEN VERZAMELINGEN
IN HET ALGEMEEN
(ZELFS ZONDER METRIEKEN)

① TOPOLOGIE VAN $\mathbb{R}^n$

VRAAG: ALS $n \neq m$
ZIJN $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$, DAN ECHT.
VERSCHILLEND?

LINALG: DIMENSIE
AANTAL ELEM. IN BASIS
$\dim \mathbb{R}^n = n$.

19e EEUW: DIMENSIE
"HET AANTAL GETALLEN
NODIG OM PUNTEN
TE BESCHRIJVEN"

1878: GEORG CANTOR:
IK KAN n COÖRDINATEN
SAMENVATTEN TOT ÉÉN.

ER IS EEN BIJECTIE TUSSEN

$[0,1]$ EN $[0,1]^n$ $n=2,3,4$

- — - -

EERSTE POGING.

$x \in (0,1)$ $\quad 0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \text{------}$ (DECIMAAL)

$0, x_1 x_3 x_5 x_7 \cdots \qquad 0, x_2 x_4 x_6 x_8 \text{------}$

SOMMIGE x-EN HEBBEN TWEE RIJTJES DECIMALEN

$\frac{1}{2}$: $0.5000000 \qquad 0.499999 \text{----}$

TWEEDE POGING.

$\mathbb{P} = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ IRR. GETALLEN IN $[0,1]$

(a) $[0,1] \longleftrightarrow \mathbb{P}$

(b) $\mathbb{P} \longleftrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (ALLE RIJEN NATUURLIJKE GETALLEN) $0 \notin \mathbb{N}$

(c) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n$

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, leftrightarrow, "g"] \arrow[d, dash] & \mathbb{P} \arrow[r, leftrightarrow, "f"] \arrow[d, dash] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[d, leftrightarrow, "h"] \\
{[0,1]^n} \arrow[r, leftrightarrow, "g^n"] & \mathbb{P}^n \arrow[r, leftrightarrow, "f^n"] & (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n
\end{tikzcd}$$

(a) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ IS AFTELBAAR

TEL AF : $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$

NEEM EEN RIJ IN $\mathbb{P}$ ZEG

$$\left\langle \frac{1}{n\sqrt{2}} : n \in \mathbb{N} \right\rangle$$

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}$$

$$f : \begin{cases} {}^{1}/_{n\sqrt{2}} \longmapsto {}^{1}/_{2n\sqrt{2}} \\ q_n \longmapsto \dfrac{1}{(2n-1)\sqrt{2}} \\ x \longmapsto x \quad \text{ANDERS} \end{cases}$$

DIT IS EEN BIJECTIE

(c) $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots \rangle \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$n=3 \begin{cases} \langle a_1, a_4, a_7, \ldots a_{3k+1}, \ldots \rangle \\ \langle a_2, a_5, a_8, \ldots a_{3k+2}, \ldots \rangle \\ \langle a_3, a_6, a_9, \ldots a_{3k} \ldots \rangle \end{cases} \rangle \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^3$$

(b) $\langle a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots \rangle$

$[a_1]$ $[a_1, a_2]$ $[a_1, a_2, a_3]$ $[a_1, a_2, a_3, a_4]$

$$\frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}}, \quad \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}}, \quad \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}}, \ldots$$

KETTINGBREUKEN (CONTINUED FRACTIONS)

DEZE RIJ CONVERGEERT NAAR EEN GETAL IN $\mathbb{R}$.

NOTATIE
$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots]$

DEZE AFB: RIJ NAAR WAARDE VAN KETTING BR IS BIJECTIEF.

BEWYS: BY ELKE $x \in \mathbb{P}$ HOORT EEN RY $\langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle$ ZÓ DAT $x = [a_1, a_2, a_3, \dots]$

DE TWEE BEWERKINGEN ZYN ELKAARS INVERSE.

HOE ZIET $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_k]$ ER UIT?

$p_0 = 0 \quad p_1 = 1 \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$

$q_0 = 1 \quad q_1 = a_1 \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}$

DAN $[a_1, \dots, a_k] = \dfrac{p_k}{q_k}$

- $p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1}$

  $(-(p_{k-1} q_{k-2} - p_{k-2} q_{k-1}))$

- $\dfrac{p_k}{q_k} - \dfrac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$

(NAT. $a_k \geq 1$

$q_k \geq F_k \leftarrow$ k-DE FIB. GETAL)

NEEM $a \in (0,1)$ PAS EUCLIDES TOE op 1 EN a

$1 = a_1 \cdot a + r_1$ — $a_1 \in \mathbb{N}$, $0 \leq r_1 < a$

$a = a_2 \cdot r_1 + r_2$ — $r_2 < r_1$

$r_1 = a_3 \cdot r_2 + r_3$ — $r_3 < r_2$

$\vdots$

$a \in \mathbb{Q}$: DIT STOPT

$a \notin \mathbb{Q}$ DIT STOPT NIET

DAN $a = [a_1, a_2, a_3, \dots]$

$1 = a_1 \cdot a + r_1 \qquad \dfrac{1}{a} = a_1 + \dfrac{r_1}{a}$ ξ_1 $\quad 0 \leq \xi_1 < 1$

DAT GEEFT $\quad a = \dfrac{1}{a_1 + \xi_1} \leftarrow 0 < \xi_1 < 1$

$a = a_2 \cdot r_1 + r_2 \quad : \quad \dfrac{a}{r_1} = a_2 + \dfrac{r_2}{r_1} \; \xi_2$

$\dfrac{1}{\xi_1} \nearrow$

$$\xi_1 = \frac{1}{a_2 + \xi_2}$$

$$a = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \xi_2}} \qquad \xi_2 = \frac{1}{a_3 + \xi_3}$$

$$\frac{1}{a_1 + 1} < a < \frac{1}{a_1}$$

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + 1}} > a > \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + 1}}} < a < \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

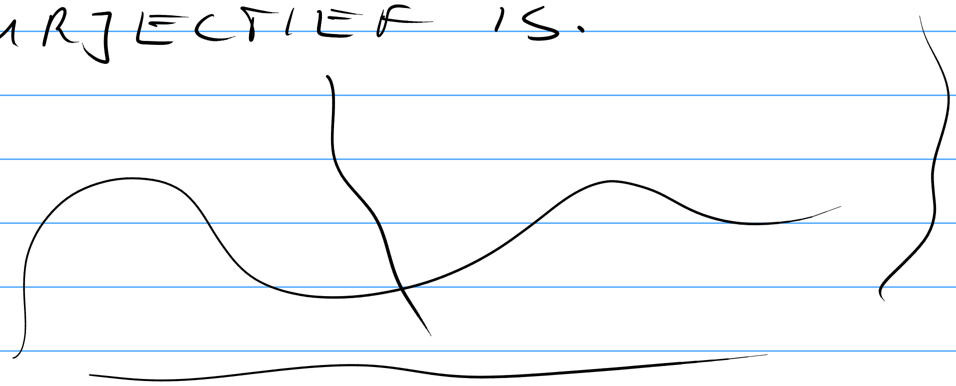
$$\begin{array}{ccccc}
[0,1] & \longleftrightarrow & \mathbb{P} & \overset{?}{\longleftrightarrow} & (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \\
t \updownarrow & & & & \updownarrow \\
(x_1, \ldots, x_n) & & & & \\
{[0,1]^n} & \longleftrightarrow & \mathbb{P}^n & \longleftrightarrow & (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n
\end{array}$$

CANTOR: "DIMENSIE BETEKENT NIETS MEER"

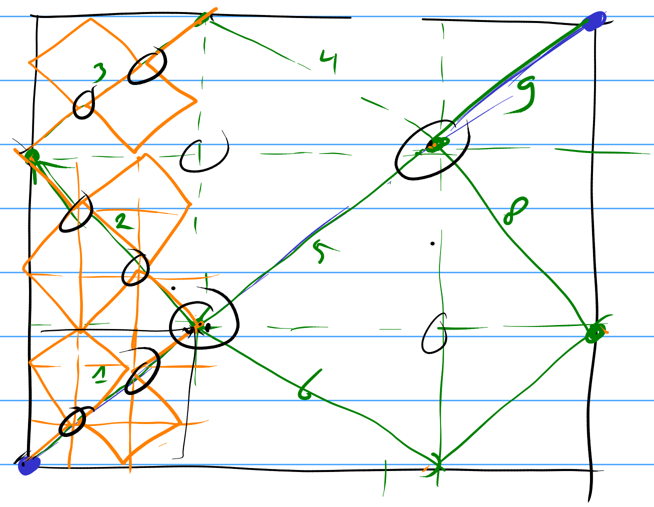
DEDEKIND: "HO, HO, JE BIJECTIE IS NIET CONTINU"

PEANO: WIL JE CONTINUÏTEIT? KUN JE KRIJGEN.

ER IS EEN CONTINUE FUNCTIE $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$ DIE SURJECTIEF IS.



WE PLANNEN EEN REIS DOOR $[0,1]^2$



- $f(0) = (0,0)$ $\quad f(1) = (1,1)$
- $f(\frac{1}{9}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ $\quad f(\frac{4}{9}) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

  $f(\frac{2}{9}) = (0, \frac{2}{3})$ $\quad f(\frac{5}{9}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

  $f(\frac{3}{9}) = (\frac{1}{3}, 1)$ $\quad f(\frac{6}{9}) = (\frac{2}{3}, 0)$

  $f(\frac{7}{9}) = (1, \frac{1}{3})$

  $f(\frac{8}{9}) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

WE KRIJGEN f ALS LIMIET VAN EEN RIJ FUNCTIES $\langle f_n : 0 \le n < \infty \rangle$

$$f_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$$

$$x_0(t) = t = y_0(t)$$

$$x_{n+1}(t) = \tfrac{1}{3} x_n(9t) \qquad 0 \le t \le \tfrac{1}{9} \qquad y_{n+1}(t) = \tfrac{1}{3} y_n(9t)$$

$$= \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} x_n(9t-1) \qquad \tfrac{1}{9} \le t \le \tfrac{2}{9} \qquad = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} y_n(9t-1)$$

$$\tfrac{1}{3} x_n(9t-2) \qquad \tfrac{2}{9} \le t \le \tfrac{3}{9} \qquad \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} y_n(9t-2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$\|f_1 - f_0\| \leq \sqrt{2}$

$\|f_2(t) - f_1(t)\| = \frac{1}{3}\|f_1(t) - f_0(t)\| \leq \sqrt{2}/3$

$\|f_3(t) - f_2(t)\| = \frac{1}{3}\|f_2(t) - f_1(t)\| \leq \sqrt{2}/3^2$

$\|f_{n+1} - f_n\| \leq \sqrt{2}/3^n$

$\langle f_n : n \rangle$ IS CAUCHY

$\lim f_n$ BESTAAT EN IS CONT.

$f(\frac{1}{9}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

f IS SURJECTIEF

f IS NIET INJECTIEF

$f(\frac{1}{9}) = f(\frac{5}{9}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

ONS DOEL

ALS $n \neq m$

DAN IS ER GEEN

CONTINUE BIJECTIE

TUSSEN $[0,1]^n$ EN $[0,1]^m$

L. E. J. BROUWER