AM3590 2021-10-12

- CONVERGENTIE
  - (X, τ) IS EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE
  - EEN RIJ $(x_n)_n$ IN X IS CONVERGENT, MET LIMIET x ALS
    VOOR ELKE $O \in \tau$ MET $x \in O$ EEN $N \in \mathbb{N}$ BESTAAT ZÓDAT $x_n \in O$ VOOR ALLE $n \geq N$.
  - BEKEND IN $\mathbb{R}$ EN ANDERE METRISCHE RUIMTEN EN EQUIVALENT MET
    $(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N \rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon)$

OPGAVE

a) IN $(\mathbb{N}, \tau_{cf})$ GELDT DAT DE RIJ $(n)_n$ NAAR ELK PUNT CONVERGEERT.

b) ALS $(x_n)_n$ EEN RIJ IN A IS EN CONVERGEERT NAAR x DAN $x \in \overline{A}$.

c) IN $(\mathbb{R}, \tau_{co})$ GELDT $0 \in \overline{(0,1)}$
MAAR ER IS GEEN RIJ IN $(0,1)$ DIE NAAR 0 CONVERGEERT.

CONTINUÏTEIT

GEGEVEN TWEE RUIMTEN (X, τ_1) EN (Y, τ_2).
EN $f : X \rightarrow Y$ EEN AFBEELDING
f IS CONTINU IN $x \in X$ ALS
VOOR ELKE OMGEVING V VAN $f(x)$
EEN OMGEVING U VAN x BESTAAT MET $f[U] \subseteq V$.

EQUIVALENT ZIJN

- VOOR ELKE OMGEVING V VAN $f(x)$ IS $f^{-1}[V]$ EEN OMGEVING VAN x
- VOOR ELKE OPEN OMGEVING V VAN $f(x)$ IS ER EEN OPEN OMGEVING U VAN x MET $f[U] \subseteq V$.
- ALS $\mathcal{B}$ EEN LOKALE BASIS IN x IS EN $\mathcal{C}$ EEN EEN IN $f(x)$ DAN $(\forall C \in \mathcal{C})(\exists B \in \mathcal{B})(f[B] \subseteq C)$
- ALS $x \in \overline{A}$ DAN $f(x) \in \overline{f[A]}$ VOOR ELKE $A \subseteq X$.

Scanned with CamScanner

We zeggen dat $f: X \to Y$ <u>continu op X</u> is als f continu is <u>in elk punt</u> van X

Equivalent zijn
- voor elke $O \in \mathcal{T}_2$ geldt $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_1$
- voor elke gesloten deelverzameling F van Y geldt $f^{-1}[F]$ is gesloten
- voor elke $A \subseteq X$ geldt $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$

Opgave [Bases en subbases]
Laat $\mathcal{B}$ een basis voor $\mathcal{T}_2$ zijn en
$\mathcal{S}$ een subbasis
Equivalent zijn
a) f is continu
b) voor elke $B \in \mathcal{B}$ geldt $f^{-1}[B] \in \mathcal{T}_1$
c) voor elke $S \in \mathcal{S}$ geldt $f^{-1}[S] \in \mathcal{T}_1$

Voorbeeld - Entierfunctie -- diverse topologieën
- $\chi_A : X \to S$ continu wat zegt dat

$f: X \to Y$ is
<u>open</u> als $f[O]$ open is voor elke open O
<u>gesloten</u> als $f[F]$ gesloten is voor elke gesloten F

$X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$ $f(x,y) = x$ continu, open, niet gesloten
$X = [0,1]^2$, $Y = [0,1]$ $f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$ cont, open, gesloten
$X = [0,1]$, $Y = S^1$, $f(x) = e^{2\pi i x}$ cont, niet open, gesloten
$X = \{0,1\}$ discreet, $Y = \{0,1\}$ indiscreet $f(x) = x$
f is continu, niet open, niet gesloten.

Scanned with CamScanner

HOMEOMORFISME:
BIJECTIE, CONTINU, INVERSE CONTINU.

QUOTIENTAFBEELDINGEN.

$f : X \to Y$ EEN AFBEELDING

- $\{O : O \subseteq Y$ EN $f^{-1}[O] \in \tau_X\}$ IS EEN TOPOLOGIE
  NOTATIE τ_f
- DUS f CONTINU DESDA $\tau_Y \subseteq \tau_f$

ALS $\tau_Y = \tau_f$ DAN HEET f EEN
QUOTIËNTAFBEELDING.

EQUIVALENT ZIJN
- f IS EEN QUOTIENTAFBEELDING
- $F \subseteq Y$ IS GESLOTEN DESDA $f^{-1}[F]$ IS GESLOTEN

- f CONTINU EN OPEN $\to$ f IS QUOTIËNT
- f CONTINU EN GESLOTEN $\to$ f IS QUOTIËNT

BELANGRIJK

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f \circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

ALS $q : X \to Y$ QUOTIËNT IS DAN
f IS CONTINU DESDA $f \circ q$ IS CONTINU.

Scanned with CamScanner