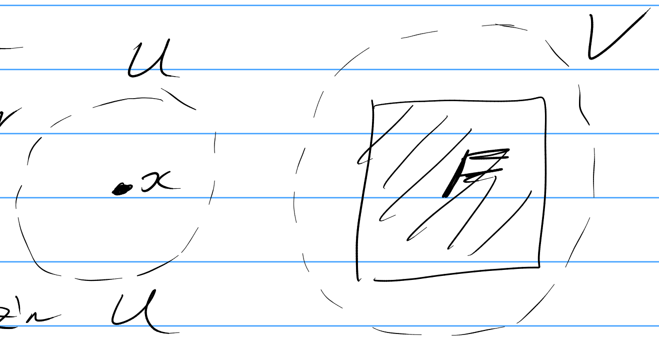
AM 3590 2012-10-19

NOG MEER SCHEIDING $T_{3\frac{1}{2}}$

T_0 , T_1 , T_2 : T_3 , T_4 (T_5, T_6)

T_3 (X, τ) ONZE RUIMTE
VOOR ELKE GESLOTEN
VERZ F EN ELK
PUNT $x \in X \setminus F$
ZIJN ER OPEN VERZ'N U
EN V ZÓ DAT $x \in U$, $F \subseteq V$ EN
$U \cap V = \emptyset$



NB $P = X \setminus (U \cup V)$ IS DAN EEN
PARTITIE TUSSEN $\{x\}$ EN F

T_3 DESDA VOOR ELKE GESL. F EN
ELKE $x \in X \setminus F$ IS ER EEN
PARTITIE TUSSEN $\{x\}$ EN F

REGULIER $= T_3 + T_0$

- τ_i IS ALTIJD EEN T_3-TOPOLOGIE
  OMDAT DE SITUATIE F GESLOTEN
  EN $x \in X \setminus F$ ZICH NIET VOORDOET.
  "DE EIS IS LEEG VERVULD"
  " VOOR ELK VAN DE LEGE VERZ.
  IS ALLES WAAR"
- METRISCHE RUIMTEN ZIJN REGULIER
  NEEM $\varepsilon > 0$ ZÓ DAT $B(x, \varepsilon) \cap F = \emptyset$
  DAN $U = B(x, \varepsilon/3)$
  $V = \{y : d(x,y) > 2\varepsilon/3\}$

REGULIER + AFT. BASIS IMPLICEERT METRISCH!

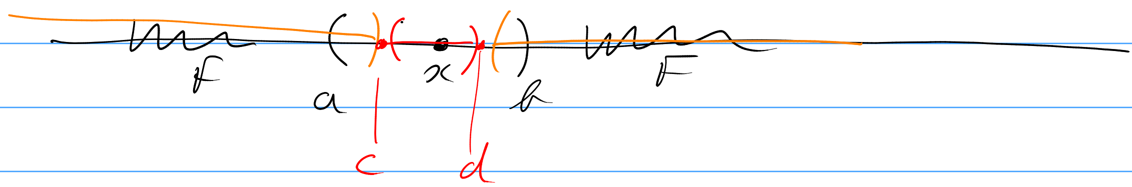
- $\mathbb{S}$ IS REGULIER

NEEM $r > 0$ MET $[x, x+r) \cap F = \emptyset$

KLAAR! $U = [x, x+r)$ $\longleftarrow$ OPEN ÈN GESLOTEN

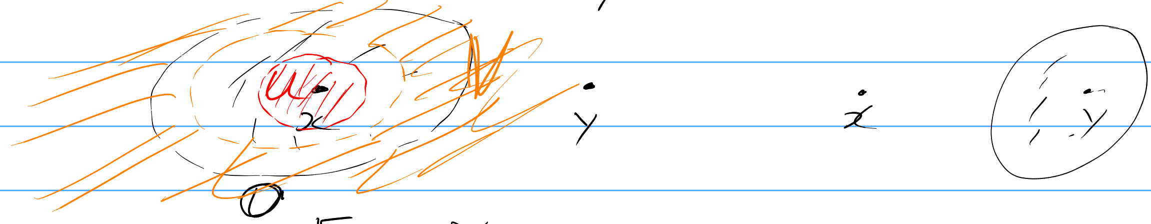
$V = \mathbb{S} \setminus [x, x+r)$

- $\mathbb{N}$ IS REGULIER [OPGAVE]
- $\mathbb{W}$ IS REGULIER [OPGAVE, DIT GELDT VOOR ALLE LINEAIR GEORDENDE RUIMTEN]



WAT ALS ER GEEN c OF d IS?

STELLING: REGULIER IMPLICEERT HAUSDORFF



NU $F = X \setminus O$ IS GESLOTEN

T_3: ER ZIJN U EN V DISJ. OPEN MET $x \in U$, $F \subseteq V$

DAN $y \in V$

LET OP: SOMMIGE BOEKEN DOEN HET MET ANDERSOM:

REGULIER IS WAT WIJ T_3 NOEMEN

EN T_3 = REGULIER + T_0

DAN $T_3 \to T_2 \to T_1 \to T_0$

BIJ ONS $T_3 \not\to T_2$

REGULIER $\to T_2 \to T_1 \to T_0$

KARAKTERISERING:

(a) ALS U OPEN IS EN $x \in U$

DAN IS ER EEN OPEN V ZÓ DAT

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

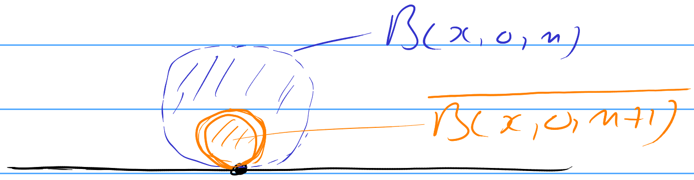
(METRISCH $\overline{B(x, \frac{1}{2}\varepsilon)} \subseteq B(x, \varepsilon)$)

$\subseteq \{y : d(x,y) \leq \frac{1}{2}\varepsilon\}$

($\mathcal{S}$: $\overline{[x, x+\varepsilon)} = [x, x+\varepsilon)$)

(NIEMYTZKI-VLAK

$$\overline{B(x,0,n+1)} \subseteq B(x,0,n)$$



)

(b) ALS F GESLOTEN IS DAN

$$F = \bigcap \{\overline{U} : U \in \tau, F \subseteq U\}$$ [SOMMETJE]

$T_3 \Rightarrow$ (a) ALS $x \in U$

NEEM O EN V OPEN DISJUNCT

MET $x \in V$, EN $X \setminus U \subseteq O$

MAAR DAN $\overline{V} \subseteq X \setminus O \subseteq U$

(a) $\Rightarrow T_3$ ALS $x \in X \setminus F$ — $x \in V$

NEEM V MET $\overline{V} \subseteq X \setminus F$

EN $O = X \setminus \overline{V}$ DAN

$V \cap O = \emptyset$, $x \in V$, $F \subseteq O$

VOORBEELDEN

- $\mathbb{R}$ MET DE GEWONE TOPOLOGIE τ

  MAAK EEN GROTERE TOPOLOGIE τ_a

  DOOR $C = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ ALS EXTRA

  GESLOTEN VERZ. TOE TE VOEGEN

  $\mathcal{S} = \tau \cup \{\mathbb{R} \setminus C\}$ IS EEN SUBBASIS VOOR τ_a

LOKALE BASES:

$x \neq 0$ $\quad \{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$

$x = 0$ $\quad \{(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C : \varepsilon > 0\}$

- τ_a IS T_2 WANT $\tau \subseteq \tau_a$!!!
- $0 \notin C$ OF $0 \in \mathbb{R} \setminus C$

  MERK OP $\overline{(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C} = [-\varepsilon, \varepsilon]$ IN τ_a

  MAAR VOOR ALLE $\varepsilon > 0$ GELDT

  $$[-\varepsilon, \varepsilon] \not\subseteq \mathbb{R} \setminus C$$

  DUS KARAKT. (a) GELDT NIET

  $(\mathbb{R}, \tau_a)$ IS NIET REGULIER.

- $\mathbb{R}$ MET GEWONE TOPOLOGIE τ

  NIEUWE TOPOLOGIE τ_e: $\mathbb{Q}$ ALS EXTRA GESLOTEN VERZ.

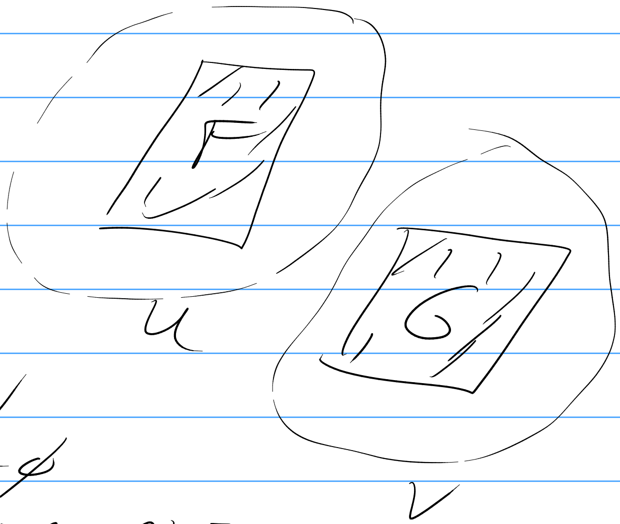
  DWZ $\tau \cup \{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$ ALS SUBBASIS.

  π EN $\mathbb{Q}$ HEBBEN GEEN DISJ. OPEN OMGEVINGEN IN τ_e

- RADIALE TOPOLOGIE τ_R OP $\mathbb{R}^2$.
  - τ_R IS HAUSDORFF WANT ELKE 'GEWONE' OPEN VERZ ZIT IN τ_R
  - τ_R IS NIET REGULIER

    BEWIJS IS NIET TRIVIAAL (KOMT NOG)

T_4 ALS F EN G DISJUNCT EN GESLOTEN ZIJN DAN ZIJN ER OPEN U EN V MET $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ EN $U \cap V = \emptyset$



TUSSEN ELK TWEETAL DISJUNCTE GESLOTEN VERZ'N IS ER EEN PARTITIE

METRISCHE RUIMTEN ZYN T_4

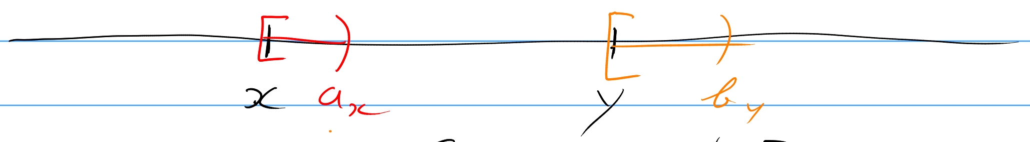
$$U = \{x : d(x,F) < d(x,G)\}$$
$$V = \{x : d(x,F) > d(x,G)\}$$

DE RUIMTE $\mathbb{S}$ IS T_4

STEL $F \cap G = \emptyset$; F EN G GESLOTEN

ALS $x \in F$ DAN IS ER $a_x > x$
ZO DAT $[x, a_x) \cap G = \emptyset$

ALS $y \in G$ DAN IS ER $b_y > y$
ZO DAT $[y, b_y) \cap F = \emptyset$



$y \in G$ DUS $y \notin [x, a_x)$ DUS $y > a_x$

NEEM a_x EN b_y VOOR ALLE $x \in F$
EN $y \in G$

<u>ALTIJD</u> GELDT $[x, a_x) \cap [y, b_y) = \emptyset$

MAAR DAN

$$\underbrace{\left(\bigcup_{x \in F} [x, a_x)\right)}_{U} \cap \underbrace{\left(\bigcup_{y \in G} [y, b_y)\right)}_{V} = \emptyset$$

NORMAAL $= T_4 + T_1$

NORMAAL IMPLICEERT REGULIER

NIEMYTZKI-VLAK IS <u>NIET</u> NORMAAL

WAT ZYN DIE DISJUNCTE GESLOTEN VERZ'N F EN G WAAR HET MIS GAAT DAN?

<u>ELKE</u> DEELVERZ. VAN $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ IS GESLOTEN!

NEEM 'INGEWIKKELDE' F, G IN DE x-AS

- $F = \{(x,0) : x \leq 0\}$ $G = \{(x,0) : x > 0\}$
  WERKEN NIET
- WAT WERKT IS
  $F = \{(q,0) : q \in \mathbb{Q}\}$
  $G = \{(x,0) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$
  ALS U EN V OPEN ZIJN MET
  $F \subseteq U$ EN $G \subseteq V$ DAN $U \cap V \neq \emptyset$
  BEWIJS: NIET TRIVIAAL, KOMT LATER

DUS REGULIER $\not\Longrightarrow$ NORMAAL

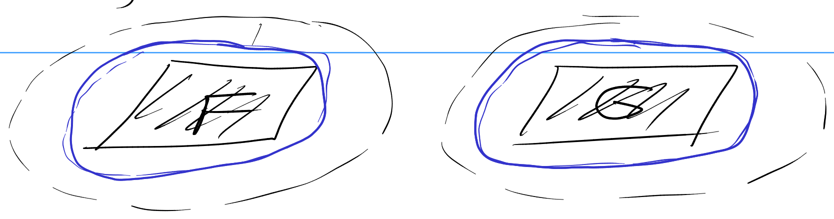
WEL:
REGULIER + AFT BASIS $\Longrightarrow$ NORMAAL
IS EEN TUSSENSTAP OP WEG NAAR
REGULIER + AFT BASIS $\Longrightarrow$ METRISCH

IV (ELKE LINEAIR GEORDENDE RUIMTE)
IS NORMAAL
BEWIJS OOK NIET MAKKELIJK.

KARAKTERISERINGEN

(a) ALS F GESLOTEN IS EN U OPEN
MET $F \subseteq U$ DAN IS ER EEN
OPEN V ZÓ DAT
$$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$
[BEWIJS ZIE T_3 MET $\{x\}$ IPV F]

(b) ALS F EN G GESLOTEN EN DISJ. ZIJN
DAN ZIJN ER OPEN U EN V MET
$F \subseteq U$, $G \subseteq V$ EN $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$



(c) ALS U EN V OPEN ZYN
EN $U \cup V = X$
DAN ZYN ER GESLOTEN F EN G
MET $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ EN
$F \cup G = X$.
DIT IS DE DEFINITIE MAAR MET
BEHULP VAN COMPLEMENTEN

$A = X \setminus U$ $\quad B = X \setminus V$

- A EN B: GESL. DISJ.
- $O_A \supseteq A$, $O_B \supseteq B$ MET $O_A \cap O_B = \emptyset$

NEEM $F = X \setminus O_B$ $\quad G = X \setminus O_A$