VERVOLG 2021-10-26.

⑤ STELLING VAN TIETZE-URYSOHN

EEN RUIMTE $(X, \mathcal{T})$ IS T_4 DESDA.
VOOR ELKE GESLOTEN $F \subseteq X$ EN
ELKE CONTINUE $f : F \to \mathbb{R}$ EEN
CONTINUE $g : X \to \mathbb{R}$ BESTAAT MET $f = g \restriction \mathbb{R}$

BEWIJS

$\Leftarrow$ LAAT F EN G GESLOTEN EN DISJUNCT ZIJN
DE FUNCTIE $f : F \cup G \to \mathbb{R}$ GEDEFINIEERD DOOR
$f(x) = 0$ $(x \in F)$ EN $f(x) = 1$ $(x \in G)$ IS CONTINU
op $F \cup G$. NEEM EEN UITBREIDING $g : X \to \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

DAN ZIJN $U = g^{-1}[(-\infty, \frac{1}{3})]$ EN $V = g^{-1}[(\frac{2}{3}, \infty)]$
OPEN EN DISJUNCT, EN $F \subseteq U$ EN $G \subseteq V$.

$\Rightarrow$ GEVAL 1: f IS BEGRENSD
EN ZODAT $f: F \to [-1, 1]$

LEMMA VAN URYSOHN:
NEEM $g_1: X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ CONTINU
ZÓ DAT ALS $f(x) \leq -\frac{1}{3}$ DAN $g_1(x) = -\frac{1}{3}$
ALS $f(x) \geq \frac{1}{3}$ DAN $g_1(x) = \frac{1}{3}$

MERK OP VOOR $x \in F$ GELDT

$$|f(x) - g_1(x)| \leq \frac{2}{3}$$

- $f(x) \leq -\frac{1}{3}$: $0 \leq f(x) \leq g_1(x) = -\frac{1}{3}$
- $-\frac{1}{3} < f(x) < \frac{1}{3}$: $-\frac{1}{3} \leq f(x), g_1(x) \leq \frac{1}{3}$
- $f(x) \geq \frac{1}{3}$: $\frac{1}{3} = g_1(x) \leq f(x) \leq 1$

NEEM $g_2: X \to [-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}]$
ZÓ DAT ALS $f(x) - g_1(x) \leq -\frac{2}{9}$ DAN $g_2(x) = -\frac{2}{9}$
ALS $f(x) - g_1(x) \geq \frac{2}{9}$ DAN $g_2(x) = \frac{2}{9}$

NU GELDT VOOR $x \in F$:

$$|f(x) - g_1(x) - g_2(x)| \leq \frac{4}{9}$$

STEL WE HEBBEN $g_1, g_2, \ldots, g_k$ ZÓ DAT

$$|f(x) - (g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x))| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad (x \in F)$$

EN $g_i: X \to [-\frac{2^{i-1}}{3^i}, \frac{2^{i-1}}{3^i}]$

NEEM $g_{k+1}: X \to [\frac{-2^k}{3^{k+1}}, \frac{2^k}{3^{k+1}}]$
ZÓ DAT
ALS $f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x) \leq \frac{-2^k}{3^{k+1}}$ DAN $g_{k+1}(x) = -\frac{2^k}{3^{k+1}}$
— " — $\geq \frac{2^k}{3^{k+1}}$ DAN $g_{k+1}(x) = \frac{2^k}{3^{k+1}}$

VOOR $x \in F$ GELDT DAN

$$|f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x) - g_{k+1}(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{k+1}$$

Scanned with CamScanner

①

⑥

ER GELDT $|g_i(x)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^i$

DUS, M-TEST, $\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)$ IS UNIFORM CONV
EN DE SOM $g(x)$ IS CONTINU
OP F GELDT
$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{k} g_i(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$
DUS $g(x) = f(x)$ OP F.

GEVAL 2 f WILLEKEURIG.
PAS GEVAL 1 TOE OP ARCTAN f
WE KRIJGEN $g : X \to \mathbb{R}$
$g(x) = \arctan f(x) \quad (x \in F)$
BEKIJK $G = \{x : |g(x)| \geq \pi/2\}$
G IS GESLOTEN EN $G \cap F = \emptyset$
NEEM $h : X \to \mathbb{R}$ CONTINU
MET $h(x) = 1$ ALS $x \in F$ EN $h(x) = 0$ ALS $x \in G$
DAN GELDT $|h(x) \cdot g(x)| < \pi/2$ VOOR ALLE x
DUS $\tan(h(x) \cdot g(x)) : X \to \mathbb{R}$ IS CONTINU
EN ALS $x \in F$ DAN
$$f(x) = \tan(\arctan f(x)) = \tan(g(x)) = \tan(h(x) \cdot g(x)).$$
DUS $\tan(h \cdot g)$ IS ALS GEWENST.

Scanned with CamScanner

AM3590 2021-10-29

De Categoriestelling van Baire

- Als (X, τ) een topologische ruimte is en $A \subseteq X$ dan heet $A \subseteq X$ nergens dicht als $\operatorname{int} \operatorname{cl} A = \emptyset$.
  Dus als U niet-leeg en open is dan is $U \setminus \operatorname{cl} A$ niet leeg.
  Dus A is nergens dicht desda voor elke niet-lege open U een niet-lege open V bestaat met $V \subseteq U$ en $V \cap A = \emptyset$.

- We noemen $A \subseteq X$ mager of van de eerste categorie als A te schrijven is als $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ met elke A_n nergens dicht.

Stelling [Categoriestelling van Baire]
Als $A \subseteq \mathbb{R}$ mager is dan is $\mathbb{R} \setminus A$ dicht in $\mathbb{R}$

Bewijs
Schrijf $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, met elke A_n nergens dicht.
Neem $a, b \in \mathbb{R}$ willekeurig met $a < b$
We moeten laten zien dat $(a,b) \cap (\mathbb{R} \setminus A) \neq \emptyset$.
Maak een rij intervallen $\{(a_n, b_n) : n \in \mathbb{N}\}$ als volgt.

- Neem $a_0, b_0 \in (a,b)$ met $(a_0, b_0) \cap A_0 = \emptyset$
- Gegeven a_n en b_n neem $a_{n+1}, b_{n+1} \in (a_n, b_n)$ met $(a_{n+1}, b_{n+1}) \cap A_{n+1} = \emptyset$
  merk op dat telkens ook $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap A_n = \emptyset$.

We hebben dus
$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots \quad \dots < b_n < \dots < b_2 < b_1 < b_0$$
en $[a_{n+1}, b_{n+1}] \cap A_n = \emptyset$.

NEEM $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ (BESTAAT WANT ....)
DAN GELDT $a_n < x < b_n$ VOOR ALLE n
EN DUS $x \notin A_n$ VOOR ALLE n.
CONCLUSIE $x \in (a,b) \cap (\mathbb{R}\setminus A)$. □

ALTERNATIEVE FORMULERINGEN
(i) ALS $\langle A_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ EEN RIJ DEELVERZAMELINGEN VAN $\mathbb{R}$ IS ZÓ DAT $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
DAN IS ER EEN n ZÓ DAT $\operatorname{int} \operatorname{cl} A_n \neq \emptyset$.
[CONTRAPOSITIE]
(ii) ALS $\langle O_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ EEN RIJ DICHTE EN OPEN VERZAMELINGEN IN $\mathbb{R}$ IS DAN
IS $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ EEN DICHTE DEELVERZAMELING.

ALGEMEEN:
DE STELLING GELDT VOOR VOLLEDIGE METRISCHE RUIMTEN.
[OPGAVE: PAS HET BEWIJS VOOR $\mathbb{R}$ AAN].

TOEPASSINGEN
① HET NIEMYTZKI-VLAK IS NIET NORMAAL
② DE RADIALE TOPOLOGIE IN $\mathbb{R}^2$ IS NIET REGULIER
③ BIJNA ELKE CONTINUE FUNCTIE VAN $[0,1]$ NAAR $\mathbb{R}$ IS NERGENS DIFFERENTIEERBAAR.

Scanned with CamScanner

HET NIEMYTZKI-VLAK IS NIET NORMAAL

NEEM $Q = \{(x,0) : x \in \mathbb{Q}\}$

$P = \{(x,0) : x \notin \mathbb{Q}\}$

P EN Q ZIJN GESLOTEN EN DISJUNCT IN N.

STEL U EN V ZIJN OPEN MET

$P \subseteq U$ EN $Q \subseteq V$.

VOOR $x \in P$ NEMEN WE $n_x \in \mathbb{N}$ ZÓ DAT

$B(x,0,n) \subseteq U$

VOOR $x \in Q$ NEMEN WE $n_x \in \mathbb{N}$ ZÓ DAT

$B(x,0,n) \subseteq V$.

DEFINIEER

$$P_n = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : n_x = n\}$$

ER GELDT

$$\mathbb{R} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$$

DUS (TENMINSTE) ÉÉN VAN DE VERZAMELINGEN IS NIET NERGENS DICHT IN $\mathbb{R}$

DAT KAN GEEN $\{q\}$ ZIJN

DUS HEBBEN WE EEN n ZÓ DAT

$\operatorname{int} \operatorname{cl} P_n \neq \emptyset$.

NEEM $a < b$ IN $\mathbb{R}$ MET $(a,b) \subseteq \operatorname{cl} P_n$.

EN NEEM $q \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$

DAN GELDT : $B(q,0,n_q) \subseteq V$

MAAR OOK $B(q,0,n) \setminus \{(q,0)\} \subseteq U$

STEL $(x,y) \in B(q,0,n)$; DUS $\|(x,y) - (q,2^{-n})\| < 2^{-n}$

NEEM $p \in P_n \cap (a,b)$ MET

$$|p-q| < 2^{-n} - \|(x,y) - (q,2^{-n})\|$$

(DAT KAN WANT $q \in \operatorname{cl} P_n$).

DAN $\|(x,y) - (p,2^{-n})\| \leq \|(x,y) - (q,2^{-n})\| + \|(q,2^{-n}) - (p,2^{-n})\|$

$= \|(x,y) - (q,2^{-n})\| + |q-p|$

$< 2^{-n}$.

DUS $U \cap V \neq \emptyset$; $B(q,0,\max(n_q,n)) \setminus \{(q,0)\} \subseteq U \cap V$.

Scanned with CamScanner

DE RADIALE TOPOLOGIE IN $\mathbb{R}^2$ IS NIET REGULIER

① ER IS EEN DEELVERZAMELING D VAN $\mathbb{R}^2$ MET DE VOLGENDE EIGENSCHAPPEN

- D IS DICHT IN DE GEWONE TOPOLOGIE
- D SNIJDT ELKE LIJN IN TEN HOOGSTE TWEE PUNTEN

DUS
- D IS DICHT TOV τ
- D IS GESLOTEN TOV τ_R

[HINT NUMMER DE BOLLEN VAN DE VORM $B((p,q), 2^{-n})$ MET $p,q \in \mathbb{Q}$ ALS $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$
NEEM TELKENS $d_n \in B_n$ ZÓ DAT d_n OP GEEN LIJN DOOR TWEE VAN DE PUNTEN d_i MET $i < n$ GAAT (WAAROM KAN DAT?)]

② ALS U OPEN IS IN τ_R DAN GELDT $\operatorname{int} \operatorname{cl} U \neq \emptyset$ TOV DE GEWONE TOP.
HIER GEBRUIK JE DE STELLING VAN BAIRE.

Scanned with CamScanner