AM3590 2021-11-09

COMPACTHEID / CONVERGENTIE

(X, τ) IS COMPACT ALS ELKE OPEN OVERDEKKING EEN EINDIGE DEELOVERDEKKING HEEFT.

In symbolen:

ALS $\mathcal{U} \subseteq \tau$ EN $\bigcup \mathcal{U} = X$
DAN IS ER EEN EINDIGE $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ ZÓ DAT $\bigcup \mathcal{V} = X$

IN DE LITERATUUR ZIE JE HEEL VAAK DAT COMPACT OOK HAUSDORFF IN ZICH BERGT.
[OOK ENGELKING]

- $[0,1]^n$ is compact
- $\mathbb{V}$ is compact (LEX. VIERKANT)
- (X, τ_{ce}) $(X \neq \emptyset$, X ONEINDIG$)$
  NEEM $\mathcal{U} \subseteq \tau_{ce}$ MET $\bigcup \mathcal{U} = X$
  NEEM $U \in \mathcal{U}$ DIE NIET LEEG IS.
  NU IS $X \setminus U$ EINDIG: $\{x_1, \ldots, x_m\}$
  NEEM $U_i \in \mathcal{U}$ MET $x_i \in U_i$
  DAN IS $\mathcal{V} = \{U, U_1, \ldots, U_m\}$ ALS GEWENST.
- X ONEINDIG. $x_0 \in X$ VAST
  $U \in \tau$ DESDA $x_0 \notin U$ OF $X \setminus U$ EINDIG.
  (LOKALE BASES $x \neq x_0$ $\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$
  $\mathcal{B}_{x_0} = \{U : x_0 \in U, X \setminus U \text{ EINDIG}\}$)

ALS $\mathcal{U} \subseteq \tau$ OVERDEKT
NEEM $U \in \mathcal{U}$ MET $x_0 \in U$
DAN IS $X \setminus U$ EINDIG; VERVOLG
MET HET VORIGE BEWYS.
DEZE RUIMTE IS OOK HAUSDORFF

ALS X AFTELBAAR IS DAN KRYG JE
ZO HET CONVERGENTE RYTJE:
TEL $X \setminus \{x_0\}$ AF: $\langle x_n : n = 1, 2, \ldots \rangle$
DAN $x_n \to x$

NIET COMPACT: $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^n$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, ...
$\mathbb{S}$, N
$\mathbb{S}$: $\mathbb{S} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+1)$
N : $O = \{(x,y) : y > 0\}$
$x \in \mathbb{R}$: $O_x = B((x,0), 1)$
$\{O\} \cup \{O_x : x \in \mathbb{R}\}$
HEEFT GEEN EINDIGE DEELOVERD.

(X, τ) EEN RUIMTE
$A \subseteq X$: (A, τ_A) IS OOK EEN TOP RUIMTE
$\to \tau_A = \{O \cap A : O \in \tau\}$
A IS EEN DEELRUIMTE VAN X.

OPGAVE
(A, τ_A) IS COMPACT DESDA
VOOR ELKE $\mathcal{U} \subseteq \tau$ MET $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$
IS ER EEN EINDIGE $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$
MET $A \subseteq \bigcup \mathcal{V}$

- EEN GESLOTEN DEELRUIMTE VAN EEN COMPACTE RUIMTE IS COMPACT.

$\mathcal{U}$ OPENFAMILIE MET $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$

NEEM NOG $O = X \setminus A$ ERBIJ

DAN $O \cup \bigcup \mathcal{U} = X$

DUS ZIJN ER $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{U}$ MET

$$O \cup \underbrace{V_1 \cup \cdots \cup V_m}_{V_1 \cup \cdots \cup V_m \supseteq A} = X$$

- ALS $f: X \longrightarrow Y$ CONTINU IS EN X IS COMPACT DAN IS OOK $f[X]$ COMPACT

STEL $f[X] \subseteq \bigcup \mathcal{U}$.

DAN $X = \bigcup \{ f^{-1}[U] : U \in \mathcal{U} \}$

DUS $X = f^{-1}[U_1] \cup \cdots \cup f^{-1}[U_m]$ MET $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{U}$.

DAN $f[X] \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_m$.

- GEVOLG: ALS X COMPACT IS EN $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ IS CONTINU DAN NEEMT f OP X EEN MAXIMUM EN MINIMUM AAN.

$f[X]$ IS GESLOTEN EN BEGRENSD DUS $\max f[X]$ EN $\min f[X]$ BESTAAN.

DIT WORDT BIJ HET OPLOSSEN VAN MAX/MIN PROBLEMEN GEBRUIKT.

JE HEBT FUNCTIES $f:[0,1]\to\mathbb{R}$

ZEG $\mathcal{F} \subseteq C([0,1],\mathbb{R})$

GEZOCHT $f\in\mathcal{F}$ ZÓ DAT

$\int_0^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$ MINIMAAL IS

COMPACTHEID WORDT GEBRUIKT BIJ HET BEWIJS DAT ER ZO'N f IS

- KARAKTERIZERINGEN

– VOOR ELKE FAMILIE $\mathcal{F}$ VAN GESLOTEN VERZ'N MET $\bigcap\mathcal{F}=\emptyset$ ZIJN ER $F_1,\dots,F_n\in\mathcal{F}$ MET $F_1\cap\dots\cap F_n=\emptyset$.

– ALS $\mathcal{F}$ EEN FAMILIE GESL. VERZ'N IS ZÓ DAT $\bigcap\mathcal{G}\neq\emptyset$ VOOR ELKE EINDIGE $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ DAN GELDT $\bigcap\mathcal{F}\neq\emptyset$

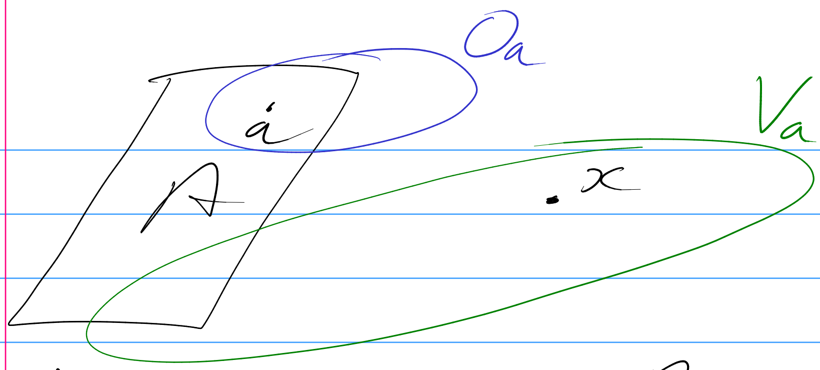
SCHEIDINGSEIGENSCHAPPEN

① ALS (X,τ) EEN HAUSDORFF-RUIMTE IS EN (A,τ_A) IS EEN COMPACTE DEELRUIMTE DAN IS A GESLOTEN.

VOORBEELD:
IN $(\mathbb{N},\tau_{CE})$ IS $\{2n: n\in\mathbb{N}\}$ NIET GESLOTEN MAAR WEL COMPACT (CO-EINDIGE TOP)

NEEM $x\in X\setminus A$ TE BEW $x\in\overline{A}$

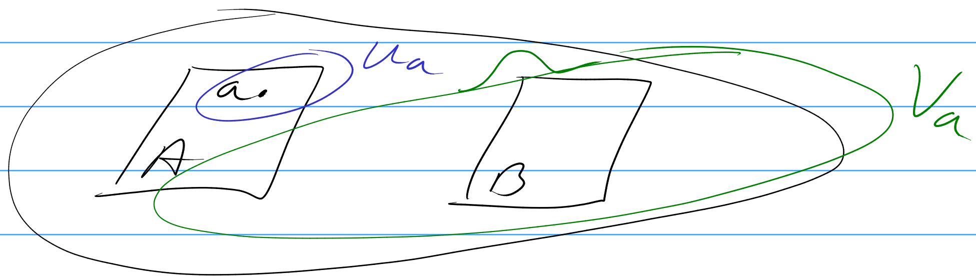
OFWEL ER IS EEN OPEN O MET $x\in O\subseteq X\setminus A$.



Voor elke $a \in A$ nemen U_a en V_a
beide open $a \in U_a$, $x \in V_a$, $U_a \cap V_a = \emptyset$
Neem $a_1, \ldots, a_n$ in A zó dat
$$A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n} =: U$$
Neem $O = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_n}$
O is open, $x \in O$, en $O \cap U = \emptyset$
Dus zelfs:
Als A compact is en $x \in X \setminus A$
dan zijn er open U en O
met $A \subseteq U$, $x \in O$, $O \cap U = \emptyset$.

DUS: Compact + Hausdorff $\Longrightarrow$ Regulier
Als A gesloten is in de compacte X
dan is A compact het bewijs
hierboven verifieert regulariteit.

Beter Compact + Hausdorff $\Longrightarrow$ Normaal



Recycle het bewijs:
vind $a_1, \ldots, a_n$ $\quad A \subseteq U_{a_1} \cup \cdots \cup U_{a_n} = U$
$\quad V = V_{a_1} \cap \cdots \cap V_{a_n}$
$A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

CONVERGENTIE.

EEN FILTER OP EEN VERZ. $X \neq \emptyset$ IS EEN NIET-LEGE FAMILIE DEELVERZ'N, $\mathcal{F}$

MET
- $\emptyset \notin \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$
- ALS $F, G \in \mathcal{F}$ DAN $F \cap G \in \mathcal{F}$
- ALS $F \in \mathcal{F}$ EN $G \supseteq F$ DAN $G \in \mathcal{F}$.

- ZEKER $X \in \mathcal{F}$
- $\{X\}$ IS EEN FILTER
- $x \in X$ $\quad \mathcal{F}_x = \{F \subseteq X : x \in F\}$

  $\{x\} \in \mathcal{F}_x$

  IDEM $A \subseteq X$ $\quad A \neq \emptyset$ $\quad \mathcal{F}_A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$
- X ONEINDIG

  $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : X \setminus F \text{ EINDIG}\}$

  FRÉCHET-FILTER
- $\mathbb{R}$ $\quad \{F \subseteq \mathbb{R} : \lambda(\mathbb{R} \setminus F) < \infty\}$
- $\mathbb{N}$: $\mathcal{J} = \{A \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} < \infty\}$

  $\mathcal{F} = \{F \subseteq \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus F \in \mathcal{J}\}$ IS EEN FILTER

  $\underbrace{\{2n : n \in \mathbb{N}\}, \{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}}_{\notin \mathcal{F}}$

Topologie

(X, τ) EEN RUIMTE, $x \in X$

$\mathcal{U}(x) = \{U \subseteq X : U \text{ IS OMGEVING VAN } x\}$

(U IS OMG VAN x : ER IS EEN $O \in \tau$ MET $x \in O \subseteq U$)

$\mathcal{U}(x)$ IS EEN FILTER

ALS $\mathcal{F}$ EEN FILTER op EEN TOPRUIMTE (X, τ) EN $x \in X$

DAN ZEGGEN WE

$\mathcal{F}$ CONVERGEERT NAAR x

ALS $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$

STEL $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ IS EEN RIJ IN X

MAAK $\mathcal{G} = \{ G \subseteq X : \exists m \, \forall n \geq m \; x_n \in G \}$

IHB $\{ x_n : n \geq m \} \in \mathcal{G}$ (ALLE m)

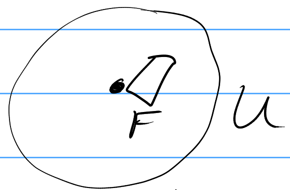
DAN GELDT

$x_n \longrightarrow x$ DESDA $\mathcal{G} \longrightarrow x$

$\forall U \in \mathcal{U}(x) \; \exists m \, \forall n \geq m \; x_n \in U$

$\forall U \in \mathcal{U}(x) \; U \in \mathcal{G}$

NB $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F} \iff (\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists F \in \mathcal{F})(F \subseteq U)$



DE FILTERCONVERGENTIE VERVANGT RIJTJESCONVERGENTIE EN DOET DAT PRIMA:

- $x \in \overline{A}$ DESDA ER IS EEN FILTER $\mathcal{F}$ MET $A \in \mathcal{F}$ EN $\mathcal{F} \longrightarrow x$

$\Rightarrow$ $\forall U \in \mathcal{U}(x) \; \underline{U \cap A \neq \emptyset}$

NEEM $\mathcal{F} = \{ F \subseteq X : \exists U \in \mathcal{U}(x) \; \underline{U \cap A} \subseteq F \}$

DIT IS EEN FILTER

EN $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$

$\Leftarrow$ IN DAT GEVAL: $\forall U \in \mathcal{U}(x) \; U \cap A \neq \emptyset$

CONTINUÏTEIT

$\mathcal{F}$ FILTER op X, $f: X \longrightarrow Y$

DAN $f(\mathcal{F}) = \{ G \subseteq Y : \exists F \in \mathcal{F}\ f[F] \subseteq G \}$

IS EEN FILTER:

$f[F_1] \subseteq G_1 \quad f[F_2] \subseteq G_2$

$f[F_1 \cap F_2] \underset{\uparrow}{\subseteq} f[F_1] \cap f[F_2] \subseteq G_1 \cap G_2$

VOOR TOP RUIMTEN EN $x \in X$:

f IS CONTINU IN x DESDA

VOOR ELK FILTER $\mathcal{F}$ GELDT

ALS $\mathcal{F} \longrightarrow x$ DAN $f(\mathcal{F}) \longrightarrow f(x)$

$\Rightarrow$ $V \in \mathcal{U}(f(x))$ DAN $f^{-1}[V] \in \mathcal{U}(x)$

DUS ER IS EEN $F \in \mathcal{F}$ MET

$F \subseteq f^{-1}[V]$ DAN $f[F] \subseteq V$

DUS $V \in f(\mathcal{F})$!

$\Leftarrow$ VERTAALOEFENING:

$\underset{\circ}{\nabla}$ $\mathcal{U}(x) \longrightarrow x$ $\underset{\circ}{\nabla}$ DUS $f(\mathcal{U}(x)) \longrightarrow f(x)$

VERTAAL DAT MAAR

- X IS HAUSDORFF DESDA ELK KONV. FILTER HEEFT EEN LIMIET.

VRIJDAG: COMPACTHEID IN TERMEN VAN FILTERS