AM 3590 2021-11-16

PRODUCTEN VAN TOP. RUIMTEN.

1 TWEE RUIMTEN

- (X, τ) EN (Y, σ) TOP RUIMTEN
- EEN TOPOLOGIE OP $X \times Y$
  - $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ CONTINU
  - $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ CONTINU
  - ALS $f : Z \longrightarrow X \times Y$ (Z RUIMTE)

    DAN WILLEN WE

    f CONTINU DESDA $\pi_X \circ f$ EN $\pi_Y \circ f$ CONTINU

ER IS PRECIES ÉÉN TOP. DIE DIT ALLEMAAL DOET.

VOOR ELKE $T \in \tau$ MOET $\pi_X^{-1}[T]$ OPEN ZIJN

——— $S \in \sigma$ ——— $\pi_Y^{-1}[S]$ ———

NEEM

$$\mathcal{S} = \{T \times Y : T \in \tau\} \cup \{X \times S : S \in \sigma\}$$

ALS SUBBASIS

BIJBEH. BASIS: $(T \times Y) \cap (X \times S) = T \times S$

$$\mathcal{B} = \{T \times S : T \in \tau, S \in \sigma\}$$

$(X \times Y \in \mathcal{B})$

$\mathbb{R}^2$: BASIS $\{O \times U : O, U \text{ open}\}$

DE PRODUCTTOPOLOGIE IS DUS DE KLEINSTE TOPOLOGIE $\mathcal{T}$ DIE $\mathcal{S}$ BEVAT EN DIE DUS $\mathcal{B}$ ALS BASIS HEEFT.

DE DERDE EIS KRIJGEN WE OOK:

NEEM $f : Z \longrightarrow X \times Y$ (Z EEN RUIMTE)

- ALS f CONTINU IS DAN ZIJN $\pi_X \circ f$ EN $\pi_Y \circ f$ CONTINU: SAMENSTELLINGEN
- STEL $\pi_X \circ f$ EN $\pi_Y \circ f$ ZIJN CONTINU

"LANG GELEDEN"

f IS CONTINU DESDA $f^{-1}[S]$ IS OPEN VOOR ALLE $S \in \mathcal{S}$

DWZ WE MOETEN LATEN ZIEN

$f^{-1}[T \times Y]$ EN $f^{-1}[X \times S]$ ALTIJD OPEN

$T \times Y = \pi_X^{-1}[T]$ $\qquad$ $X \times S = \pi_Y^{-1}[S]$

DUS

$$f^{-1}[T \times Y] = f^{-1}[\pi_X^{-1}[T]]$$
$$= (\underline{\pi_X \circ f})^{-1}[T] \quad \text{IS OPEN}$$
$$f^{-1}[X \times S] = (\underline{\pi_Y \circ f})^{-1}[S] \quad \text{IS OPEN}$$

ELKE TOPOLOGIE DIE π_X EN π_Y CONTINU MAAKT MOET $\mathcal{J}$ OMVATTEN

STEL υ (UPSILON) IS EEN TOPOLOGIE DIE OOK GOED IS

DUS $\mathcal{J} \subseteq \upsilon$

NOG BEWIJZEN $\upsilon \subseteq \mathcal{J}$

SPECIALE Z

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
(X \times Y, \mathcal{J}) \arrow[r, "ID"] & (X \times Y, \upsilon) \arrow[ur, "\pi_X"] \arrow[dr, "\pi_Y"'] & \\
 & & Y
\end{tikzcd}$$

ID IS CONTINU DESDA $\upsilon \subseteq \mathcal{J}$

IS ID CONTINU?

JA $\quad \pi_X \circ ID = \pi_X$ $\qquad$ $\pi_Y \circ ID = \pi_Y$

CONTINU T.O.V. $\mathcal{J}$ $\qquad$ CONTINU T.O.V. $\mathcal{J}$

υ WAS GOED DUS ID IS CONTINU

• Als $\mathcal{F}$ een filter op $X \times Y$ is
dan $\mathcal{F} \to (x,y)$ desda $\pi_X(\mathcal{F}) \to x$
$\pi_Y(\mathcal{F}) \to y$

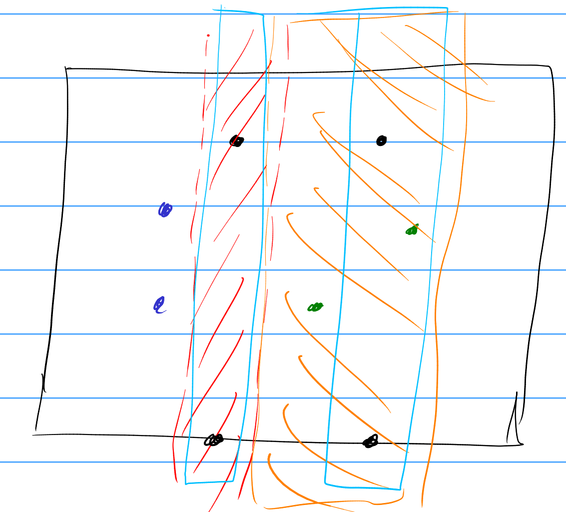
$\Rightarrow$ duidelijk: continuïteit

$\Leftarrow$ stel $\pi_X(\mathcal{F}) \to x$ en $\pi_Y(\mathcal{F}) \to y$
als $T \in \mathcal{U}(x)$ dan $T \in \pi_X(\mathcal{F})$: er is een $F \in \mathcal{F}$ $\pi_X[F] \subseteq T$
dan ook $T \times Y \in \mathcal{F}$ $(F \subseteq T \times Y)$
idem $S \in \mathcal{U}(y) \Rightarrow X \times S \in \mathcal{F}$
conclusie als $T \times S$ open is
en $(x,y) \in T \times S$ dan $T \times S \in \mathcal{F}$
nu: $\mathcal{U}(x,y) \subseteq \mathcal{F}$

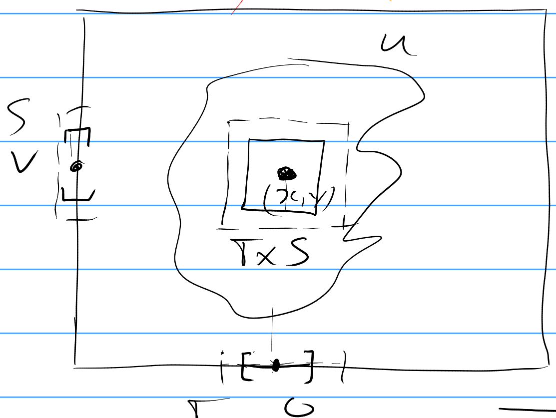
$X \times Y$ is T_0, T_1, T_2, T_3 desda X en Y zijn T_0, T_1, T_2, T_3

$\Leftarrow$

T_0
T_1
T_2



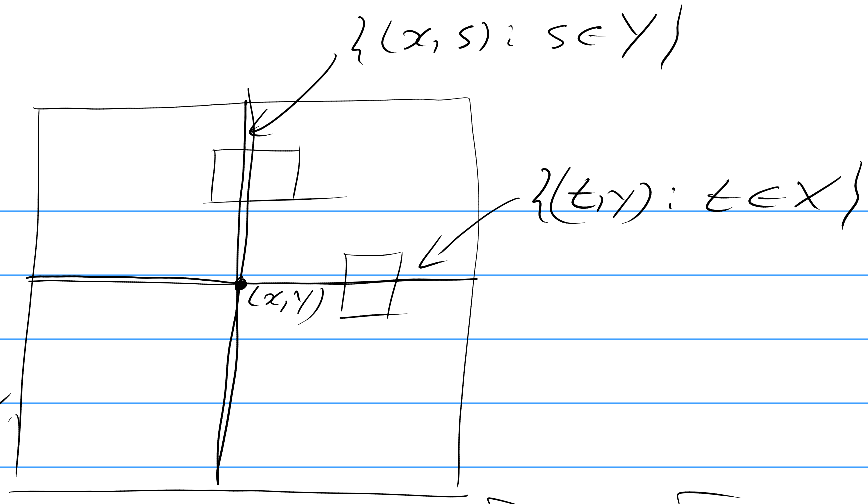
T_3



– $(x,y) \in U$
– $(x,y) \in T \times S \subseteq U$
– $x \in O \subseteq \overline{O} \subseteq T$
– $y \in V \subseteq \overline{V} \subseteq S$

Opgave: toon aan $\overline{O \times V} = \overline{O} \times \overline{V}$
dan klaar $(x,y) \in O \times V \subseteq \overline{O \times V} \subseteq T \times S \subseteq U$

$\Longrightarrow$ X en Y zijn homeomorf met deelruimten van $X \times Y$

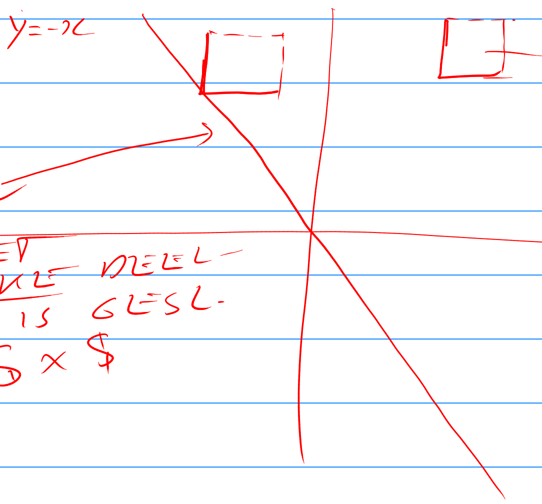


— dus T_0, T_1, T_2, of T_3 als $X \times Y$ dat is.

T_4 gaat mis — bij deelruimten / — bij producten

$\mathbb{S}$ is normaal

$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ is T_0, T_1, T_2, T_3 maar niet normaal.



$[a,b) \times [c,d)$ $\quad \mathbb{S} \times \mathbb{S}$

Gesloten en discreet dus elke deelverz. is gesl. in $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$

Gebruik het bewijs voor $\mathbb{N}$ met $P = \{(p,-p) : p \notin \mathbb{Q}\}$
$Q = \{(q,-q) : q \in \mathbb{Q}\}$

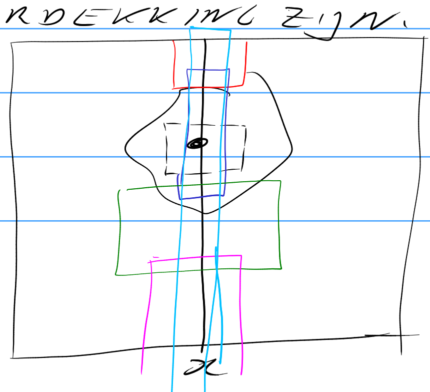
$X \times Y$ is compact desda X en Y compact

$\Longrightarrow$ π_X en π_Y zijn continu

$\Longleftarrow$ Laat $\mathcal{U}$ een open overdekking zijn.

① $x \in X$ vast

voor elke $y \in Y$ zijn er $U_y \in \mathcal{U}$, $T_y \in \tau$, $S_y \in \sigma$ met $(x,y) \in T_y \times S_y \subseteq U_y$



ER ZIJN $y_1, \ldots, y_k$ IN Y ZÓDAT

$$Y = S_{y_1} \cup \cdots \cup S_{y_n}$$

$T(x) = \bigcap_{i=1}^{k} T_{y_i}$ (DE LICHTBLAUWE STROOK)

MERK OP

$$T(x) \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} T_{y_i} \times S_{y_i}$$

(a, b) : $b \in S_{y_i}$ EN $a \in \bigcap_{j=1}^{k} T_{y_j}$

DUS $a \in T_{y_i}$

! IK HEB EEN OPEN $T(x)$ WAAR x IN ZIT
ÈN EEN EINDIGE DEELFAMILIE $\mathcal{U}_x$
VAN $\mathcal{U}$ MET $T(x) \times Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$

(2) ER ZIJN $x_1, \ldots, x_l$ IN X
ZÓDAT $X = \bigcup_{j=1}^{l} T(x_j)$

NEEM NU

$$\mathcal{U}' = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{U}_{x_j}$$

DAN GELDT

$$X \times Y = \bigcup \mathcal{U}'$$

WANT $X \times Y = \bigcup_{j=1}^{l} (T(x_j) \times Y)$

$$\subseteq \bigcup_{j=1}^{l} \left(\bigcup \mathcal{U}_{x_j}\right)$$

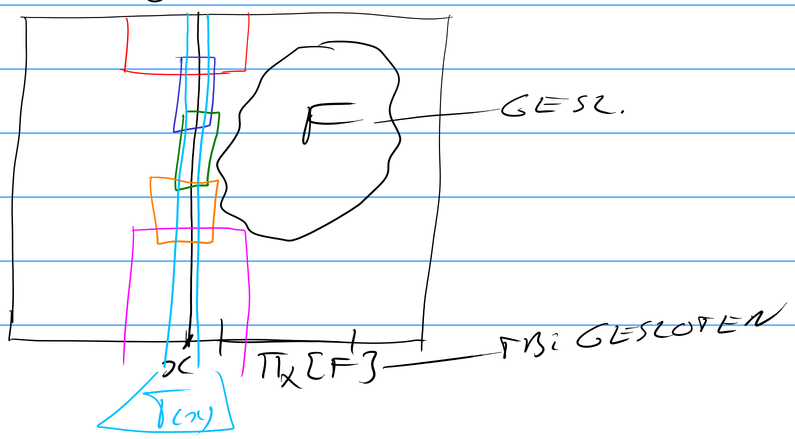
$$= \bigcup \mathcal{U}'$$

[PROBEER HET EENS MET (ULTRA) FILTERS]

STEL DAT (ALLEEN) Y COMPACT IS
DAN IS $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ EEN
GESLOTEN AFBEELDING.

NU $T(x) \times Y \cap F = \emptyset$

DUS $T(x) \cap \pi_X[F] = \emptyset$



WILLEKEURIGE PRODUCTEN

WE HEBBEN $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ TOP. RUIMTEN

WE HEBBEN

$$\prod_{i \in I} X_i$$

PROJECTIE: $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$

$$(x_i)_i \longmapsto x_j$$

IPV $f(i)$ SCHRIJVEN WE x_i.

WE WILLEN EEN TOPOLOGIE

- DIE DE π_j CONTINU MAAKT
- $f : Z \longrightarrow \prod_{i\in I} X_i$ CONTINU DESDA ELKE $\pi_i \circ f$ CONTINU

NEEM

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i \in I} \{\pi_i^{-1}[O] : O \in \tau_i\}$$

ALS SUBBASIS.

BIJBEH BASIS $\mathcal{B}$: BESTAAT UIT

$$\prod_{i\in I} O_i \quad \text{MET } O_i \in \tau_i \text{ EN } \{i : O_i \neq X_i\} \text{ EINDIG}$$

$$\pi_{i_1}[\underbrace{O_1}_{\tau_{i_1}}] \cap \pi_{i_2}[\underbrace{O_2}_{\tau_{i_2}}] \cap \dots \cap \pi_{i_k}[\underbrace{O_k}_{\tau_{i_k}}]$$

$$= \prod_{i\in I} O_i \quad \text{MET } O_i = X_i \quad i \notin \{i_1, \dots, i_k\}, \quad O_{i_j} = O_j$$

$$\pi_j^{-1}[O] = \prod_{i\in I} O_i \quad \text{MET } O_j = O, \quad O_i = X_i \quad i \neq j$$

ZO'N PRODUCT NOEM IK EEN "EINDIG OPEN BLOK"

$\prod_{i \in I} X_i$ IS T_0, T_1, T_2, T_3 DESDA ELKE X_i IS T_0, T_1, T_2, T_3

$\Leftarrow$ T_0, T_1, T_2 NET ALS VOOR TWEE RUIMTEN

ALS $(x_i)_i \neq (y_i)_i$ DAN

$x_{i_0} \neq y_{i_0}$

VOOR (TEN MINSTE) EEN i_0

T_3 BIJNA NET ALS VOOR TWEERUIMTEN

ALS $(x_i)_i \in O$

DAN $(x_i)_i \in \prod_i O_i \subseteq O$

$O_i \neq X_i \quad i = i_1, \dots, i_k$

IN i_j NEEM U_{i_j} MET

$x_{i_j} \in U_{i_j} \subseteq \overline{U_{i_j}} \subseteq O_{i_j}$

EN BEKIJK $\quad U_i = X_i \quad i \neq i_1, \dots, i_k$

$U = \prod_i U_i \qquad U_{i_j}$

DAN

$(x_i)_i \in U \subseteq \overline{U} = \prod_i \overline{U_i} \subseteq \prod_i O_i \subseteq O$

$\Rightarrow$ ELKE X_i IS HOMEOMORF MET EEN DEELRUIMTE:

$(p_i)_i \in \prod_{i \in I} X_i$ VAST

j VAST $\quad x \longmapsto p_x \qquad (p_x)_i = \begin{cases} p_i & i \neq j \\ x & i = j \end{cases}$

IS EEN HOMEOMORFISME VAN

X NAAR $\{p_x : x \in X\} = L_j$

$S \in \mathcal{S} \qquad S = \pi_i^{-1}[O]$

$i \neq j \qquad S \cap L_x = \emptyset$ ALS $p_i \notin O$

$= L_x$ ALS $p_i \in O$

$i = j \qquad S \cap L_x = \{p_x : x \in O\}$

STELLING VAN TYCHONOFF

$\prod_i X_i$ is compact $\iff$ elke X_i is compact

$\Rightarrow$ duidelijk π_i continu

$\Leftarrow$ Neem een ultrafilter $\mathcal{U}$ op $\prod_i X_i$

- $\pi_i(\mathcal{U})$ is een ultrafilter op X_i
- dus convergent

Kies $(x_i)_i$ zo dat $\pi_i(\mathcal{U}) \longrightarrow x_i$

- dan $\mathcal{U} \longrightarrow (x_i)_i$

- Ultrafilter stelling gebruikt
- Keuzeaxioma gebruikt want limieten hoeven niet uniek te zijn

- Stelling van Tychonoff impliceert het keuzeaxioma