AM3590 2021-11-23

- AFMAKEN KARAKTERISERING — —
- SPECIAAL GEVAL $\mathbb{N}$
- EEN REGULIERE RUIMTE DIE NIET VOLL. REGULIER IS //

ALS X COMPACT HAUSDORFF IS EN $Y \subseteq X$ EEN DEELRUIMTE DAN IS Y VOLLEDIG REGULIER:

ALS $F \subseteq Y$ GESLOTEN IS <u>IN Y</u>

EN $y \in X \setminus F$

DAN IS ER EEN CONTINUE FUNCTIE

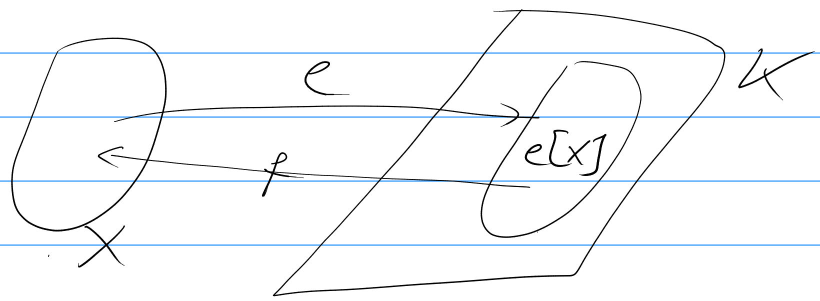
$f : Y \longrightarrow [0,1]$

MET $f(y) = 0$ $\quad f(z) = 1$ $(z \in F)$

OMGEKEERD.

ALS X VOLL. REGULIER IS DAN ZIJN ER EEN COMPACTE HAUSDORFFRUIMTE K EN EEN <u>INBEDDING</u> $e : X \longrightarrow K$

└ CONTINU BIJECTIEF EN EEN HOMEOMORFISME TUSSEN X EN $e[X]$



DE INV. $f : e[X] \longrightarrow X$ IS OOK CONTINU

ARCTAN : $\mathbb{R} \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ IS EEN INBEDDING

ARCTAN$[\mathbb{R}] = (-\pi/2, \pi/2)$

WAAR KOMEN K EN e VANDAAN?

WE NEMEN $\mathcal{C} = C(X, [0,1])$

ALLE CONTINUE FUNCTIES $X \to [0,1]$

$K = [0,1]^{\mathcal{C}}$ (TYCHONOFFKUBUS) COMPACT HAUSDORFF!

$$e : X \longrightarrow [0,1]^{\mathcal{C}}$$
$$x \longmapsto (f(x))_{f \in \mathcal{C}}$$

ELKE x BEPAALT EEN KEUZEFUNCTIE VAN $\mathcal{C}$ NAAR $[0,1]$

DUS EEN ELEMENT VAN $[0,1]^{\mathcal{C}}$

- e IS CONTINU? JA

  WANT $\pi_f \circ e$ IS CONTINU VOOR ELKE f

  $(\pi_f \circ e)(x) = f(x)$! $\pi_f \circ e = f$!

- e IS INJECTIEF? JA

  ALS $x \neq y$ DAN IS ER EEN f

  MET $f(x) = 0$ EN $f(y) = 1$

  DAN $e(x) \neq e(y)$

  WEGENS DE f-DE COÖRDINAAT

- e IS OPEN ALS AFB $e : X \to e[X]$

  STEL $O \subseteq X$ IS OPEN

  TE BEWIJZEN $e[O]$ IS OPEN IN $e[X]$

  DAT WIL ZEGGEN ER IS EEN OPEN U IN K ZÓ DAT $e[O] = e[X] \cap U$.

  WE MAKEN VOOR ELKE $x \in O$ EEN OPEN U_x IN K ZÓ DAT

  $e(x) \in U_x \cap e[X] \subseteq e[O]$

DAN WERKT $U = \bigcup_{x \in O} U_x$

NEEM $f : X \longrightarrow [0,1]$ CONTINU
ZÓ DAT $f(x) = 0$
$f(y) = 1 \quad y \in X \setminus O$

IN K KIJKEN WE NAAR DE f-DE COÖRDINAAT

$$U_x = \pi_f^{-1}\left[[0, \tfrac{1}{2}) \right]$$

- $\pi_f(e(x)) = f(x) = 0$ DUS $e(x) \in U_x$
- STEL $e(y) \in U_x$ TB $y \in O$
  ER GELDT $f(y) = \pi_f(e(y)) < \frac{1}{2}$
  DUS $y \in O$.

K IS WEL ERG GROOT TOV $e[X]$.
WE BEKIJKEN DAAROM $\overline{e[X]}$
DIE IS COMPACT
EN $e[X]$ IS DICHT IN $\overline{e[X]}$
DUS _$X = e[X]$ LIGT DICHT IN $\overline{e[X]}$

- ALS $f : X \longrightarrow [0,1]$ CONTINU IS DAN HEEFT f EEN UNIEKE CONTINUE UITBREIDING TOT $\overline{e[X]}$

ER IS EEN CONTINUE $\bar{f}$ VAN $\overline{e[X]} \longrightarrow [0,1]$
ZÓ DAT $\bar{f}(e(x)) = f(x)$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "e"] \arrow[d, "f"'] & e[X] \arrow[l, shift left, "e^{-1}"] \arrow[dl, "f \circ e^{-1}"'] & \subseteq \overline{e[X]} \arrow[dll, "\bar{f}"] \\
{[0,1]} & &
\end{tikzcd}$$

DIE $\bar{f}$ IS GEWOON π_f BEPERKT TOT $\overline{e[X]}$

WE NOEMEN $\overline{e[X]}$ DE ČECH-STONE COMPACTIFICATIE VAN X.

NOTATIE βX

KARAKTERISERING:

- X LIGT DICHT IN βX
- ELKE CONTINUE $f : X \to [0,1]$ HEEFT CONTINUE UITBR $\beta f : \beta X \to [0,1]$

IHA Y IS EEN COMPACTIFICATIE VAN X ALS Y COMPACT HAUSDORFF IS EN X DICHT LIGT IN Y

$[-\pi/2, \pi/2]$ HIERBOVEN IS NIET $\beta \mathbb{R}$

$\sin^2 x$ IS NIET UIT TE BREIDEN

DAN ZOU JE

$$\sin^2(\tan x) : (-\pi/2, \pi/2) \to [0,1]$$

UIT KUNNEN BREIDEN.

STRAKS KIJKEN WE NAAR $\beta \mathbb{N}$

IN $\beta \mathbb{N}$ ZIT GEEN ENKEL NIET-FLAUW CONVERGENT RIJTJE.

FLAUW: $x_n \to x$

OMDAT $\exists m \ \forall n \geq m \ x_n = x$

VRAAG VAN ALEXANDROFF EN URYSOHN

$\beta \mathbb{N}$: $A \subseteq \mathbb{N}$

$$\chi_A : \mathbb{N} \to [0,1]$$

$$\chi_A(n) = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

GEEFT $\beta\chi_A : \beta\mathbb{N} \to [0,1]$

- NEEMT ALLEEN 0 EN 1 AAN
- ALS $x \in \overline{A}$ / $\overline{\mathbb{N} \setminus A}$ DAN $\beta\chi_A(x) = 1$ / 0

$\overline{A} \cap \overline{\mathbb{N}\setminus A} = \emptyset \qquad \beta\mathbb{N} = \overline{A} \cup \overline{\mathbb{N}\setminus A}$

NB ALS $x_n \longrightarrow x$ NIET-FLAUW
DAN $x \in \overline{\{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}} \cap \overline{\{x_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}}$

$S = \{x\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ NIET-FLAUW CONV.

- S IS COMPACT
- $\{x\} \cup \{x_n : n \geq m\}$ ALTIJD COMPACT.

WE VINDEN U_n OPEN MET
$x_n \in U_n$: $m \neq n \to U_m \cap U_n = \emptyset$

GEVOLG VAN $\left\{ \begin{array}{l} \overline{A} \cap \overline{\mathbb{N}\setminus A} = \emptyset \quad \longleftarrow \\ \overline{A} \cup \overline{\mathbb{N}\setminus A} = \beta\mathbb{N} \end{array} \right.$

- $\overline{A}$ EN $\overline{\mathbb{N}\setminus A}$ ZIJN OPEN (EN GESLOTEN)
  CLOPEN
- STEL O OPEN IN $\beta\mathbb{N}$ NIET LEEG
  $O \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$
  EN $\overline{O} = \overline{O \cap \mathbb{N}}$

[OPGAVE ALS D DICHT IS IN X
EN O OPEN DAN $\overline{O} = \overline{O \cap D}$]

DUS ALS O OPEN IN $\beta\mathbb{N}$
DAN $\overline{O}$ OOK OPEN

EN OOK ALS U EN V OPEN EN DISJ.
ZIJN DAN $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$

$\overline{U} = \overline{U \cap \mathbb{N}} \qquad A = U \cap \mathbb{N}$

$\overline{V} = \overline{V \cap \mathbb{N}} \qquad \mathbb{N}\setminus A \supseteq V \cap \mathbb{N}$

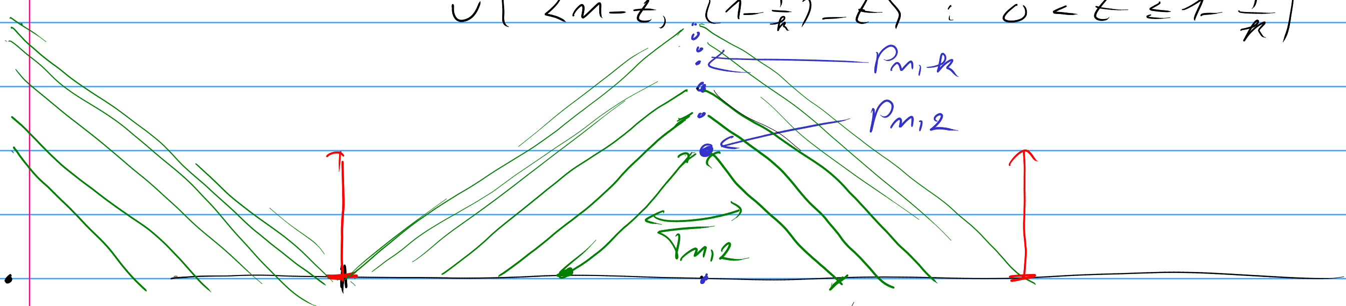
DIT HEET EXTREEM ONSAMENHANGEND

STEL WE HEBBEN EEN
NIET-FLAUW CONV RYTJE $x_n \to x$
DAT GEEFT ONS DISJ. $U_n \ni x_n$
$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{2n}$
$V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{2n+1}$
U EN V OPEN DISJUNCT
DUS $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$
$x \in \overline{\{x_{2n} : n \in \mathbb{N}\}} \cap \overline{\{x_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}}$
$\subseteq \overline{U} \cap \overline{V}$
TEGENSPRAAK!

REGULIERE RUIMTE NIET
VOLLEDIG REGULIER [THOMAS]

(1) DEELVERZAMELING X VAN $\mathbb{R}^2$
- $n \in \mathbb{Z}$ EVEN
  $L_n = \{\langle n, y\rangle : 0 \leq y < \frac{1}{2}\}$

- $n \in \mathbb{Z}$ ONEVEN $\quad k \geq 2$
  - $p_{n,k} = \langle n, 1 - \frac{1}{k}\rangle$
  - $T_{n,k} = \{\langle n+t, (1-\frac{1}{k}) - t\rangle : 0 < t \leq 1 - \frac{1}{k}\}$
    $\cup \{\langle n-t, (1-\frac{1}{k}) - t\rangle : 0 < t \leq 1 - \frac{1}{k}\}$



$S_1 = \bigcup \{L_n : n \text{ EVEN}\}$
$S_2 = \{p_{n,k} : n \text{ ONEVEN } k \geq 2\}$
$S_3 = \bigcup \{T_{n,k} : n \text{ ONEVEN } k \geq 2\}$

$X = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

- PUNTEN IN S_3 GEÏSOLEERD

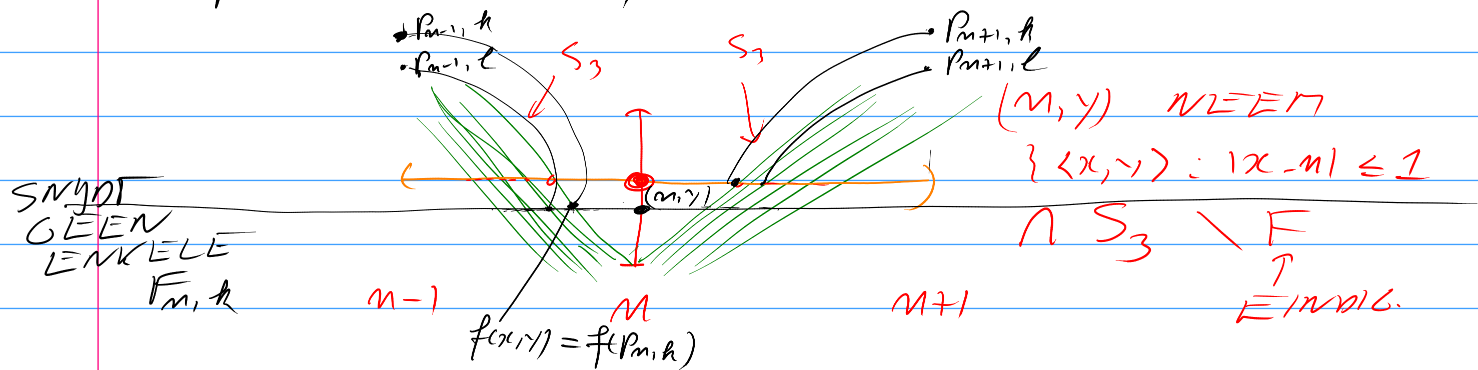
$$\mathcal{B}_{\langle x,y\rangle} = \{ \{\langle x,y\rangle\}\}$$

- PUNTEN IN S_2

$$B(m,k,F) = \{p_{m,k}\} \cup T_{m,k} \setminus F \qquad F \text{ EINDIG}$$

$$\mathcal{B}_{p_{m,k}} = \{ B(m,k,F) : F \text{ EINDIG}\}$$

- PUNTEN IN S_1



STEL $f : X \longrightarrow [0,1]$ IS CONTINU

KIJK IN $p_{m,k}$

VOOR ELKE m IS ER EEN EINDIGE F_m

ZO DAT : $\langle x,y\rangle \in T_{m,k} \setminus F_m$

$$\Longrightarrow |f(x,y) - f(p_{m,k})| < 2^{-m}$$

$F_{m,k} = \bigcup_m F_m$ IS AFTELBAAR

ZELFS

$A = \bigcup\{F_{m,k} : n \text{ ONEVEN}, k \geq 2\}$ IS AFT.

$B = \{ y : 0 \leq y < \frac{1}{2}$

$y \in B$ $\qquad \{\langle x,y\rangle : x \in \mathbb{R}\} \cap A = \emptyset \}$

n EVEN: $f(n,y) = \lim_{k\to\infty} f(p_{n+1,k}) = f(n+2,y)$

$$= \lim_{k\to\infty} f(p_{n-1,k}) = f(n-2,y)$$

[f IS CONSTANT OP

$\{\langle n,y\rangle : n \text{ ONEVEN}, y \in B\}$

$X \cup \{-\infty, \infty\}$

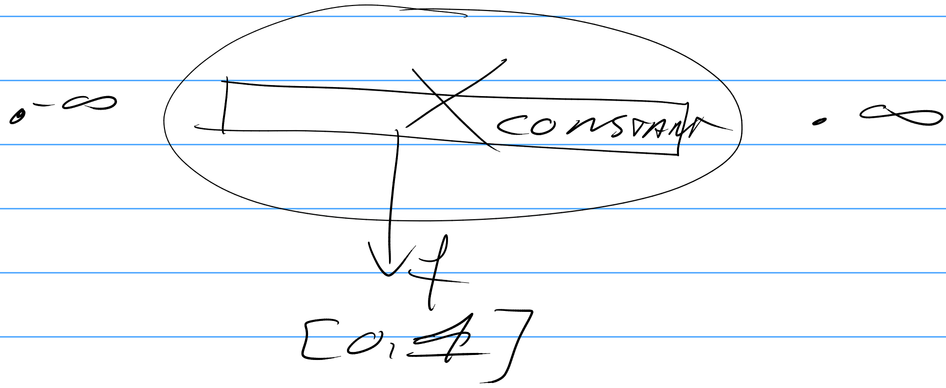
$U(-\infty, n) = \{\langle x,y\rangle \in X : x < n\} \cup \{-\infty\}$
$n \in \mathbb{Z}$

$U(\infty, n) = \{\langle x,y\rangle \in X : x > n\} \cup \{\infty\}$
$n \in \mathbb{Z}$

AFSLUITING: $\{\langle x,y\rangle \in X : x \le n\} \cup \{-\infty\}$

OF $\{\langle x,y\rangle \in X : x \ge n\} \cup \{\infty\}$

DIT IS REGULIER



DAN $f(-\infty) = f(\infty)$.