AM 3590 2021-11-30

COMPACTHEID IN FUNCTIERUIMTEN

1 $C(X,\mathbb{R})$ VECTORRUIMTE
VAN BEGRENSDE CONT. FUNCTIES
VAN X NAAR $\mathbb{R}$.
NORM: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$

WANNEER IS $K \subseteq C(X,\mathbb{R})$ COMPACT?
HOE KUN JE DAT ZIEN?
EIND 19e EEUW ARZELÀ-ASCOLI
CONTEXT:
WANNEER HEEFT ELKE RIJ FUNCTIES
IN K EEN CONV. DEELRIJ?

STEL $K \subseteq C(X,\mathbb{R})$ IS COMPACT

1 BIJ VASTE x IS $f \longmapsto f(x)$ CONTINU
VAN $C(X,\mathbb{R})$ NAAR $\mathbb{R}$.
CONCLUSIE $\{f(x) : f \in K\}$ IS COMPACT

2 $\mathrm{ID} : (C(X,\mathbb{R}), \|.\|) \longrightarrow (C(X,\mathbb{R}), \tau_p)$
IS CONTINU τ_p: PRODUCTTOPOLOGIE
DUS OOK $\mathrm{ID} : (K, \|.\|) \longrightarrow (K, \tau_p)$
- DOMEIN IS COMPACT BEELD DUS OOK
τ_p IS HAUSDORFF

3 DUS IS ID OOK GESLOTEN:
$F \subseteq K$ GESLOTEN T.O.V. $\|.\|$
DAN IS F COMPACT
DAN IS $\mathrm{ID}[F]$ OOK COMPACT
DUS F COMPACT IN (K, τ_p)

DUS F IS GESLOTEN IN (K, τ_p)

ID IS EEN GESLOTEN CONTINUE BIJECTIE, DUS HOMEOMORFISME

GEVOLG:

DE TOPOLOGIE VAN $\|.\|$ OP K EN DE TOPOLOGIE τ_p OP K ZIJN GELIJK.

ALS K COMPACT IS TOV $\|.\|$ DAN

- $\{f(x) : f \in K\}$ GESLOTEN EN BEGRENSD
- $(K, \|.\|) = (K, \tau_p)$
  DE TWEE TOPOLOGIEËN ZIJN GELIJK
- K IS GESLOTEN IN τ_p.
  ALS EEN RIJ IN K PUNTSGEWIJS CONVERGEERT DAN IS DE LIMIET CONTINU !!

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_n(x) = x^n.$$

$$f_n \longrightarrow g \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$\overline{\{f_n : n \in \mathbb{N}\}}$ TOV $\|.\|$ NIET COMPACT

STRATEGIE VOOR KARAKTERIZERING:

- KARAKT. COMPACTHEID IN τ_p
- KARAKTERIZEER WANNEER TOP VAN $\|.\|$ GELIJK IS AAN τ_p.

VOOR $F \subseteq \mathbb{R}^X$ (WILLEKEURIG) GELDT

F IS COMPACT IN τ_p $\iff$ ① $\underbrace{\{f(x) : f \in F\}}_{F[x]}$ IS BEGRENSD VOOR ALLE x

② F IS GESLOTEN IN τ_p

BEWYS

$\Rightarrow$ $F[x]$ IS ZELFS COMPACT

τ_p IS T_2 DUS F IS GESLOTEN

$\Leftarrow$ VOOR ELKE x IS $\overline{F[x]}$ COMPACT

DUS $P = \prod_{x \in X} \overline{F[x]}$ IS COMPACT

EN $F \subseteq P$ EN F IS GESLOTEN

DUS F IS OOK COMPACT.

OP WEG NAAR DE GELYKHEID VAN DE TOPOLOGIEËN.

NUTTIG IDEE:

$$EV: C(X, \mathbb{R}) \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, x) \longrightarrow f(x)$$

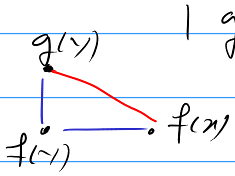
<u>EVALUATIE AFBEELDING.</u>

- EV IS CONTINU

STEL (f, x) IS GEGEVEN. ZIJ $\varepsilon > 0$.

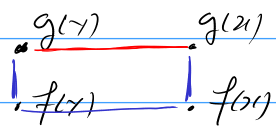
- NEEM O OPEN MET $x \in O$ EN $y \in O \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$
- NEEM $(g, y) \in B(f, \varepsilon/3) \times O$

DAN GELDT



$$|g(y) - f(x)| \leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$
$$< \varepsilon$$

- WE KIJKEN IETS VERDER



ALS $y \in O$ EN $g \in B(f, \varepsilon/3)$ DAN GELDT OOK

$$|g(y) - g(x)| \leq$$
$$|g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - g(x)|$$
$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$
$$= \varepsilon$$

DE OMGEVING O VAN x
"WERKT" VOOR $\varepsilon > 0$
VOOR ALLE g MET $\|g - f\| < \varepsilon/3$

$\forall g\ \|g-f\|<\varepsilon/3 : \forall y \in O \quad |g(y) - g(x)| < \varepsilon$

KIJK WEER NAAR K
NEEM x EN $\varepsilon > 0$ VAST
VOOR ELKE f IS ER EEN OPEN O_f
AFHANKELIJK VAN f
ZÓ DAT
ALS $\|g - f\| < \varepsilon/3$
DAN $\forall y \in O_f : |g(y) - g(x)| < \varepsilon.$

NEEM $F \subseteq K$ EINDIG ZÓ DAT
$K \subseteq \bigcup \{ B(f, \varepsilon/3) : f \in F \}$
NEEM $O = \bigcap \{ O_f : f \in F \}$

NEEM $g \in K$ WILLEKEURIG.
DAN GELDT
$\forall y \in O \quad |g(y) - g(x)| < \varepsilon$
[NEEM $f \in F$ MET $\|g - f\| < \varepsilon/3$
ALS $y \in O$ DAN $y \in O_f$ EN
DUS $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$]

CONCLUSIE ALS K COMPACT IS
DAN IS K GELIJKMATIG CONTINU
$\forall x\ \forall \varepsilon > 0\ \exists O\ \forall g \in K\ \forall y \in O$
$|g(y) - g(x)| < \varepsilon$

(DIT WORDT ONZE KARAKTERIZERING
ALS X COMPACT IS

STEL F IS GELYKMATIG CONTINU:

- AFSLUITING VAN F TOV $\|\cdot\|$
  IS OOK GELYKMATIG CONTINU

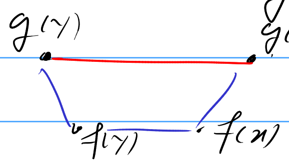
Zij $x \in X$ Zij $\varepsilon > 0$

NEEM $O \ni x$ OPEN ZÓ DAT:

VOOR ALLE $f \in F$ VOOR ALLE $y \in O$

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$$

NEEM $g \in \overline{F}$ EN $f \in F$ MET $\|f-g\| < \varepsilon/3$



$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

- DE AFSLUITING VAN F TOV τ_p
  IS OOK GELYKMATIG CONTINU

Zij $x \in X$ Zij $\varepsilon > 0$

NEEM $O \ni x$ OPEN ZÓ DAT

$\forall f \in F\ \forall y \in O \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$

NEEM $g \in \overline{F}$ EN $y \in O$

ER IS EEN $f \in F$ MET

$|f(y) - g(y)| < \varepsilon/3$ EN $|f(x) - g(x)| < \varepsilon/3$

$$U = \pi_y^{-1}\left[(g(y) - \varepsilon/3, g(y) + \varepsilon/3)\right] \cap \pi_x^{-1}\left[(g(x) - \varepsilon/3, g(x) + \varepsilon/3)\right]$$

IS EEN OMGEVING VAN g IN τ_p

DUS $U \cap F \neq \emptyset$.

NU VOLGT WEER $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$.

NEEM AAN K VOLDOET AAN

- $K[x]$ IS COMPACT [BEGRENSD]
- K IS GELYKMATIG CONTINU. EN GESLOTEN
- X COMPACT

CONCLUSIE K IS COMPACT TOV $\|\cdot\|$

[$\overline{K}$ IS COMPACT TOV $\|\cdot\|$
IEDERE RIJ IN K HEEFT
EEN DEELRIJ DIE
CONV. IN $C(X,\mathbb{R})$]

BEKIJK $\overline{K}$ TOV τ_p.

DIE $\overline{K}$ IS GELIJKMATIG CONTINU.

EN $\overline{K}$ IS COMPACT. $\overline{K} \subseteq C(X, \mathbb{R})$

$K \subseteq \prod_{x \in X} K[x]$

DAT PRODUCT IS COMPACT EN $\overline{K}$ ZIT ERIN

WE BEWIJZEN TOP VAN $\|.\|$ EN τ_p

ZIJN OP $\overline{K}$ GELIJK.

DAN KLAAR

K IS GESLOTEN TOV $\|.\|$ | WERK IN $\overline{K}$

DUS OOK TOV τ_p

DAN IS K COMPACT TOV τ_p

EN DE TOP VAN $\|.\|$

EN τ_p ZIJN GELIJK OP K

① τ_p IS DEEL VAN DE $\|.\|$-TOPOLOGIE

② NU OMGEKEERD

STEL $f \in \overline{K}$ EN $\varepsilon > 0$

WE ZOEKEN $U \in \tau_p$

MET
- $f \in U$
- $U \cap \overline{K} \subseteq B(f, \varepsilon)$

VOOR ELKE $x \in X$ IS ER EEN OPEN O_x

ZÓ DAT VOOR ALLE $g \in \overline{K}$

EN ALLE $y \in O_x$ GELDT

$|g(y) - g(x)| < \varepsilon/3$

COMPACTHEID VAN X: NEEM $E \subseteq X$ EINDIG

MET $X = \bigcup \{O_x : x \in E\}$

$$U = \bigcap_{x \in E} \pi_x^{-1}\left[\left(f(x) - \varepsilon/3,\ f(x) + \varepsilon/3\right)\right]$$

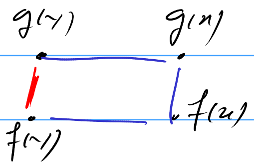
$$= \{ h \in \mathbb{R}^X : (\forall x \in E)(|h(x) - f(x)| < \varepsilon/3) \}$$

DAN WERKT DEZE $\mathcal{U}$

STEL $g \in \mathcal{U} \cap \overline{K}$ EN $y \in X$

NEEM $x \in E$ MET $y \in O_x$

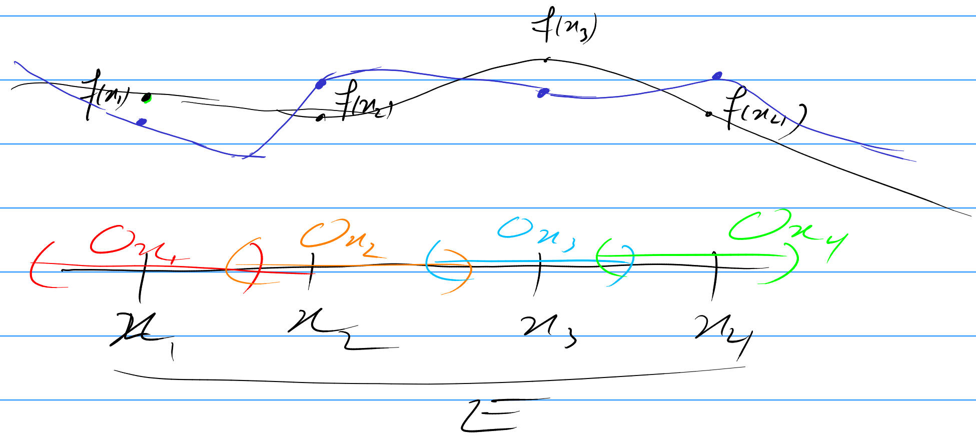
DAN VOLGT



$$
\begin{aligned}
|g(y) - f(y)| &\le |g(y) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \\
&< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

WE ZIEN: $|g(y) - f(y)| < \varepsilon$ VOOR ALLE y

DUS $\|g - f\| = \max\{|g(y) - f(y)| : y \in X\} < \varepsilon$



WAT ALS X NIET COMPACT IS?

WAT ALS DE FUNCTIES ONBEGRENSD MOGEN ZIJN?

$$f_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x + t$$

$\{f_t : 0 \le t \le 1\}$ ZOU COMPACT MOETEN ZIJN.

IN WELKE TOPOLOGIE DAN?

τ_{co} : DE COMPACT-OPEN TOPOLOGIE op $C(X, Y)$:

SUBBASIS $\{M(C, U) : C \subseteq X \text{ compact}, U \subseteq Y \text{ open}\}$

$M(C, U) = \{f : f[C] \subseteq U\}$