AM 3590 2021-12-24

HET WERK VAN HAUSDORFF

DOEL VAN HAUSDORFF
"DIE UNLÖSBARKEIT DES INHALTPROBLEMS"

HET IS NIET MOGELYK AAN DE DEELVERZAMELINGEN VAN EEN BOLOPPERVLAK K (KUGELFLÄCHE) EEN "INHOUD" TOE TE KENNEN Z.O. DAT

- $f(K) > 0$
- CONGRUENTE VERZAMELINGEN KRYGEN GELYKE INHOUD
- $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ ALS $A \cap B = \emptyset$.

HET BEWYS BERUST OP HET MERKWAARDIGE FEIT DAT EEN HELFT VAN K CONGRUENT KAN ZYN AAN ÉÉN-DERDE VAN K.

WE KUNNEN K SPLITSEN IN VIER VERZAMELINGEN Q, A, B, EN C ZO DAT

- Q AFTELBAAR IS
- $A \simeq B \cup C$
- $A \cong B \cong C$

ER GELDT $f(Q) = 0$ [ALTYD]
EN ER ZOU DAN GELDEN $f(A) = \frac{1}{2} f(K)$ ÉN $f(A) = \frac{1}{3} f(K)$.

HOEZO $f(Q) = 0$! (WE EISEN GEEN AFTELBARE ADDITIVITEIT.)

NEEM EEN LYN DOOR HET MIDDEN VAN K DIE GEEN PUNTEN VAN Q BEVAT EN MAAK VAN DIE LYN DE Z-AS EN VAN HET MIDDELPUNT DE OORSPRONG

GEBRUIK BOLCOÖRDINATEN

ELK PUNT q VAN Q HEEFT COÖRDINATEN $(1, \alpha_q, \beta_q)$

MET α_q DE HOEK MET DE POS x-AS [LENGTE]

β_q DE HOEK MET DE POS z-AS [BREEDTE]

DE VERZAMELING $H = \{\alpha_p - \alpha_q : p, q \in Q\}$ IS AFTELBAAR

- NEEM α BUITEN DIE VERZAMELING

  DRAAI K OVER α OM DE z-AS (ROTATIE R_α)

  DAN $Q \cap R_\alpha[Q] = \emptyset$

  DUS $f(Q) + f(R_\alpha[Q]) \leq f(K)$

  EN DUS $2f(Q) \leq f(K)$ ∴ $f(Q) \leq \frac{1}{2} f(K)$

- VOOR $m \in \mathbb{N}$ NEEM α_m ZÓ DAT

  $\{\alpha_m, 2\alpha_m, \ldots, m\alpha_m\} \cap H = \emptyset$

  DAN ZIJN $Q, R_{\alpha_m}[Q], R^2_{\alpha_m}[Q], \ldots, R^m_{\alpha_m}[Q]$

  ALLEMAAL DISJUNCT

  EN DUS VOLGT $f(Q) \leq \frac{1}{m+1} f(K)$.

HOE MAKEN WE A, B, EN C? (Q BLIJFT DAN OVER)

WE NEMEN $K = \{x : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

WE NEMEN TWEE ROTATIES φ EN ψ

- ψ IS DE ROTATIE OM DE z-AS OVER $\frac{2\pi}{3}$
- φ IS DE ROTATIE OM EEN ANDERE AS OVER π

DIE ANDERE AS MOETEN WE ZORGVULDIG KIEZEN.

WE WILLEN DAT ALLE MOGELIJKE SAMENSTELLINGEN VAN φ EN ψ VERSCHILLEND ZIJN.

OMDAT $\varphi^2 = \mathrm{ID}$ EN $\psi^3 = \mathrm{ID}$ KUNNEN WE VIER TYPEN PRODUCTEN ONDERSCHEIDEN:

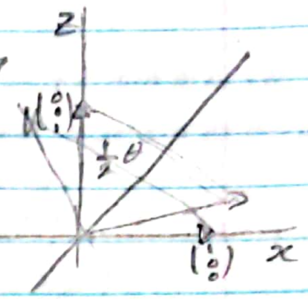
$\alpha = \varphi\psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\ldots\varphi\psi^{m_k}$ $\qquad m_i = 1$ OF $m_i = 2$

$\beta = \psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\varphi\ldots\psi^{m_k}\varphi$

$\gamma = \varphi\psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\ldots\varphi\psi^{m_k}\varphi$ $\qquad$ "$\gamma = \alpha\varphi$" EN "$\alpha = \gamma\varphi$"

$\delta = \psi^{m_1}\varphi\psi^{m_2}\varphi\ldots\psi^{m_k}$ $\qquad$ "$\beta = \delta\varphi$" EN "$\delta = \beta\varphi$"

WE MOETEN ZORGEN DAT GEEN PRODUCT GELIJK IS AAN ID.
NEEM DE TWEEDE AS IN HET x-z-VLAK
NOEM DE HOEK TUSSEN DIE TWEE DAN $\frac{1}{2}\theta$ [GEEFT MOOIERE FORMULES]



BEELD VAN $(1,0,0)$: $(-\cos\theta, 0, \sin\theta)$
BEELD VAN $(0,1,0)$: $(0, -1, 0)$
BEELD VAN $(0,0,1)$: $(\sin\theta, 0, \cos\theta)$

MATRIX VAN φ : $\begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

MATRIX VAN ψ : $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu & 0 \\ \mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\lambda = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, $\mu = \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ψ^2 : $\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ HAUSDORFF DRAAIT MET DE KLOK MEE

MATRIX VAN $\varphi\psi$: $\begin{pmatrix} -\lambda\cos\theta & \mu & \lambda\sin\theta \\ -\mu\cos\theta & -\lambda & \mu\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ ($= M_\psi \cdot M_\varphi$ WAAROM? GEEN IDEE)

$\varphi\psi^2$: $\begin{pmatrix} -\lambda\cos\theta & -\mu & \lambda\sin\theta \\ \mu\cos\theta & -\lambda & -\mu\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$.

HET VOLSTAAT NAAR PRODUCTEN VAN TYPE α TE KIJKEN
IMMERS – "$\varphi\beta\varphi = \alpha$"
ELKE β IS GECONJUGEERD MET EEN α
DUS ALS GEEN α EEN ID OPLEVERT DAN OOK GEEN β
– "$\varphi\gamma\varphi = \delta$" EN "$\bar{\varphi}^{m_1}\delta\varphi^{m_1} = \gamma$"
OF "$\bar{\varphi}^{m_1}\delta\varphi^{m_1} = \alpha$"

IN HET TWEEDE GEVAL : KLAAR
IN HET EERSTE: INDUCTIE

$$\varphi\gamma\varphi = \psi^{m_1}\varphi \cdots \varphi\psi^{m_k}$$

$$\psi^{-m_1}\varphi\gamma\varphi\psi^{m_1} = \varphi\psi^{m_2}\varphi \cdots \varphi\psi^{m_k+m_1}$$

$\to \alpha$ OF
$\to \gamma$ MAAR KORTER

WE KYKEN WAT EEN PRODUCT VAN TYPE α MET $(0,0,1)^T$ DOET:

ÉÉN FACTOR: $\begin{pmatrix} \lambda \sin\theta \\ \pm\mu \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

TWEE FACTOREN: $\begin{pmatrix} -\lambda^2 \sin\theta\cos\theta \pm \mu^2 \sin\theta + \lambda \sin\theta\cos\theta \\ \pm\lambda\mu \sin\theta\cos\theta \pm \lambda\mu \sin\theta \pm \mu \sin\theta\cos\theta \\ \lambda \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \sin\theta\,[(-\lambda^2+\lambda)\cos\theta \pm \mu^2] \\ \sin\theta\,[(\pm\lambda\mu \pm \mu)\cos\theta \pm \lambda\mu] \\ (1-\lambda)\cos^2\theta + \lambda \end{pmatrix}$$

n FACTOREN $\begin{pmatrix} \sin\theta\,(a_n \cos^{n-1}\theta + \cdots) \\ \sin\theta\,(b_n \cos^{n-1}\theta + \cdots) \\ c_n \cos^n\theta + \cdots \end{pmatrix}$ POLYNOOM IN $\cos\theta$

$n+1$ FACTOREN $\begin{pmatrix} \sin\theta\,(\lambda(c_n - a_n)\cos^n\theta + \cdots) \\ \sin\theta\,(\pm\mu(c_n - a_n)\cos^n\theta + \cdots) \\ (c_n - a_n)\cos^{n+1}\theta + \cdots \end{pmatrix}$ POLYNOOM IN $\cos\theta$

DUS $a_{n+1} = \lambda(c_n - a_n)$ $\quad b_{n+1} = \pm\mu(c_n - a_n)$

$c_{n+1} = c_n - a_n$

$(c_{n+1} - a_{n+1}) = (1-\lambda)(c_n - c_n) = \frac{3}{2}(c_n - a_n) = \cdots = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

WANT $c_1 - a_1 = \frac{3}{2}$

DUS $z_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cos^n\theta + \cdots$ POLYNOOM IN $\cos\theta$

WE WILLEN θ ZÓ KIEZEN DAT $z_n \neq 1$ VOOR ALLE $n \geq 1$

ELKE n SLUIT ZO EINDIG VEEL WAARDEN VAN $\cos\theta$ UIT

IN TOTAAL AFTELBAAR VEEL WAARDEN OM TE VERMYDEN.

ER ZYN DUS OVERAFTELBAAR VEEL θS TE VINDEN DIE WERKEN.

ZELFS ELKE θ MET $\cos\theta$ TRANSCENDENT WERKT WANT DE COËFFICIËNTEN ZYN OPGEBOUWD UIT λ EN μ DOOR ALGEBRAÏSCHE OPERATIES.

NEEM ZO'N σ

DAN BRENGEN φ EN ψ EEN ONDERGROEP VAN DE ROTATIEGROEP VAN $\mathbb{R}^3$ VOORT

DIE GROEP, G, IS ISOMORF MET $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$

WE VERDELEN G IN DRIE VERZAMELINGEN A_G, B_G, EN C_G EN WEL ZÓ DAT

(*) VOOR ELKE ξ ZIT ξ IN A_G EN $\xi\varphi$ IN $B_G \cup C_G$ OF ANDERSOM

(**) VOOR ELKE ξ ZIJN $\xi, \xi\psi$ EN $\xi\psi^2$ EERLIJK OVER A_G, B_G EN C_G VERDEELD: ELK EENTJE.

RECURSIE NAAR HET AANTAL FACTOREN

NB IN $\varphi\psi^2\varphi\psi$ HEBBEN WE VIER FACTOREN φ, ψ^2, φ, EN ψ (ZO TELLEN WE DUS)

0 FACTOREN: $\mathrm{id} \in A_G$

1 FACTOR $\varphi, \psi \in B_G$ $\quad \psi^2 \in C_G$

$n \to n+1$:

- $\xi \cdot \varphi$ $\quad$ ξ EINDIGT IN ψ OF ψ^2

ALS	$\xi \in A_G$	$\xi \in B_G$	$\xi \in C_G$
DAN	$\xi\varphi \in B_G$	$\xi\varphi \in A_G$	$\xi\varphi \in A_G$

(*) DUS ALS $\xi \in A_G$ EN $\xi = \sigma\varphi$ DAN $\xi\varphi = \sigma \in B_G \cup C_G$ EN ANDERS $\xi\varphi \in B_G$

(**) ALS $\xi = \sigma\varphi$ $\longrightarrow$

- $\xi\psi$ OF $\xi\psi^2$ $\quad$ ξ EINDIGT OP φ

ALS	$\xi \in A_G$	$\xi \in B_G$	$\xi \in C_G$
DAN	$\xi\psi \in B_G$	$\xi\psi \in C_G$	$\xi\psi \in A_G$
	$\xi\psi^2 \in C_G$	$\xi\psi^2 \in A_G$	$\xi\psi^2 \in B_G$

ALS $\xi = \sigma\psi$ DAN $(\xi, \xi\psi, \xi\psi^2) = (\sigma\psi, \sigma\psi^2, \sigma)$

ALS $\xi = \sigma\psi^2$ DAN $(\xi, \xi\psi, \xi\psi^2) = (\sigma\psi^2, \sigma, \sigma\psi)$

Voor ELKE $\xi \in G \setminus \{\mathrm{id}\}$ ZIJN ER TWEE PUNTEN OP K DIE INVARIANT ZIJN ONDER ξ: DE PUNTEN OP DE DRAAIAS [EIGENVECTOREN BIJ EIGENWAARDE 1]

BIJ ELKAAR VORMEN DIE EEN AFTELBARE VERZAMELING Q

Voor $x \in P = K \setminus Q$ GELDT ALS $\xi \neq \mathrm{id}$ DAN $x\xi \neq x$

NB HAUSDORFF SCHREEF DE HELE TIJD $x\xi$ ETC

DUS ALS $\xi \neq \sigma$ IN G DAN $x\xi \neq x\sigma$

Voor elke $x \in P$ is P_x de baan van x onder de werking van G:

$$P_x = \{x\xi : \xi \in G\}$$

We weten $P_x = P_y$ of $P_x \cap P_y = \emptyset$

Keuzeaxioma: neem een verzameling $M \subseteq P$ zo dat voor elke x de doorsnede $M \cap P_x$ uit één punt bestaat

Dan geldt

$$P = \bigcup\{M\xi : \xi \in G\}$$

en: als $\xi \neq \sigma$ dan $M\xi \cap M\sigma = \emptyset$

Nu maken we A, B, en C:

$$A = \bigcup\{M\xi : \xi \in A_G\}$$
$$B = \bigcup\{M\xi : \xi \in B_G\}$$
$$C = \bigcup\{M\xi : \xi \in C_G\}$$

Uit ⊛ volgt als $m \in M$ en $\xi \in G$

dan $m\xi \in A \to m\xi\varphi \in B \cup C$

$m\xi \in B \cup C \to m\xi\varphi \in A$

dus $A\varphi = B \cup C$ en $(B \cup C)\varphi = A$

Uit de constructie volgt: als $m \in M$ en $\xi \in G$

dan $m\xi \in A \to m\xi\psi \in B \to m\xi\psi^2 \in C \to m\xi\psi^3 \in A$

$m\xi\psi \in A \to m\xi\psi^2 \in B \to m\xi\psi^3 \in C \to m\xi\psi^4 \in A$

$m\xi\psi^2 \in A \to m\xi\psi^3 \in B \to m\xi\psi^4 \in C \to m\xi\psi^5 \in A$

En dus $A\psi = B$, $B\psi = C$, en $C\psi = A$.

<u>**Klaar**</u>

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ werkt ook

$$\psi = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \psi^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zie Brightspace.