# OPGAVEN TOPOLOGIE (11)

AM3590

**Opgave 1**. Zij $X$ de volgende deelverzameling van het vlak (teken een plaatje):

$$\{(0,0)\} \cup \{(2^{-m},0) : m \in \mathbb{N}\} \cup \{(2^{-m},2^{-n}) : m,n \in \mathbb{N}\}$$

Definieer lokale bases als volgt:

- $\mathcal{B}_{(2^{-m},2^{-n})} = \big\{\{(2^{-m},2^{-n})\}\big\}$
- $\mathcal{B}_{(2^{-m},0)} = \{B(m,k) : k \in \mathbb{N}\}$, waarbij $B(m,0),k) = \{(2^{-m},0)\} \cup \{(2^{-m},2^{-n}) : n \geqslant k\}$.
- $\mathcal{B}_{(0,0)} = \{B(f,k) : f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, k \in \mathbb{N}\}$, waarbij

$$B(f,k) = \{(0,0)\} \cup \{(2^{-m},0) : m \geqslant k\} \cup \{(2^{-m},2^{-n}) : m \geqslant k, n \geqslant f(m)\}$$

(teken een plaatje).

a. Bewijs dat dit een legale toekenning van lokale bases is.
b. Zij $A = \{(2^{-m},2^{-n}) : m,n \in \mathbb{N}\}$. Laat zien dat $(0,0) \in \operatorname{cl} A$ maar dat er *geen* rij in $A$ is die naar $(0,0)$ convergeert.

**Opgave 2**.

a. Zij $X$ een verzameling, met de discrete topologie $\tau_d$. Bewijs elke afbeelding van $X$ naar elke topologische ruimte is continu.
b. Zij $X$ een verzameling, met de indiscrete topologie $\tau_i$. Bewijs elke afbeelding van elke topologische ruimte naar $X$ is continu.

**Opgave 3**. Neem de functie $\mathbb{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door $\mathbb{E}(x) = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leqslant x\}$, de *Entier-functie*. Onderzoek de continuïteit van deze functie tussen allerlei topologieën op $\mathbb{R}$: de discrete, de indiscrete, de gewone, de co-eindige, de Sorgenfreytopologie, ...

**Opgave 4**. Zij $X$ een oneindige verzameling en laat $f : (X, \tau_{CE}) \to \mathbb{R}$ continu zijn. Bewijs dat $f$ constant is.

**Opgave 5**. Laat $(X,\tau_1)$ en $(Y,\tau_2)$ topologische ruimten zijn. Definieer $\tau_f = \{O \subseteq Y : f^{-1}[O] \in \tau_1\}$.

a. Toon aan dat $\tau_f$ een topologie is.
b. Toon aan: $f$ is continu dan en slechts dan als $\tau_2 \subseteq \tau_f$.
c. Zij $\mathcal{S}$ een subbasis voor $\tau_2$. Bewijs: $f$ is continu dan en slechts dan als $f^{-1}[S] \in \tau_1$ voor alle $S \in \mathcal{S}$.