OPGAVEN TOPOLOGIE (15)

AM3590

Opgave 1. Laat (X,τ) een topologische ruimte zijn en $\langle f_n\rangle_n$ een rij continue functies van X naar $\mathbb{R}$. Bewijs: als de rij uniform naar een fuctie $f : X \to \mathbb{R}$ convergeert dan is de functie f ook continu.
Hint: Bewijs dat f continu is in elk punt; je kunt het bewijs uit eerdere Analysevakken kopiëren: vervang $\delta > 0$ door een omgeving van het punt.

Opgave 2. Een verzameling G wordt een G_δ-verzameling genoemd als deze de doorsnede is van aftelbaar veel open verzamelingen, dus $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, met elke n open. Bewijs dat in een T_4-ruimte (X,τ) geldt: een verzameling G is een *gesloten* G_δ-verzameling dan en slechts dan als er een continue functie $g : X \to \mathbb{R}$ is zó dat $G = \{x : f(x) = 0\}$.

Opgave 3. Bewijs: een metrische ruimte is separabel dan en slechts dan als deze een aftelbare basis heeft.
Hint: voor de moeilijke kant: bewijs dat als E een dichte deelverzameling is de familie $\{B(e, 2^{-n}) : e \in E$ en $n \in \mathbb{N}\}$ een basis voor de topologie is.

Opgave 4. Laat zien dat het Niemytzki-vlak en de Sorgenfreylijn wel separabel zijn maar geen aftelbare basis hebben. Hun topologieën worden dus niet door een metriek bepaald.