AANVULLINGEN HOVO-COLLEGE 1

1 FUNCTIES EN AFBEELDINGEN

ACHTER DE WOORDEN 'KOPPELING' EN 'BIJECTIE' ZIT HET BEGRIP DAT MET DE SYNONIEMEN 'FUNCTIE' EN 'AFBEELDING' WORDT AANGEDUID.
DIT ZIJN SPECIALE RELATIES
WISKUNDIG BESCHRIJVEN WE RELATIES ALS VERZAMELINGEN GEORDENDE PAREN.
BIJVOORBEELD

$M = \{(m, k) : m$ IS DE MOEDER*) VAN $k\}$

- NIET ELKE PERSOON IS DE EERSTE COÖRDINAAT VAN EEN PAAR IN M
- ELKE PERSOON KOMT (VOORZOVER WE WETEN) VOOR ALS TWEEDE COÖRDINAAT.

BEKIJK DE INVERSE RELATIE:

$K = \{(k, m) : m$ IS DE MOEDER VAN $k\}$

- ELKE PERSOON KOMT ÉÉN KEER VOOR ALS EERSTE COÖRDINAAT VAN EEN PAAR IN K.

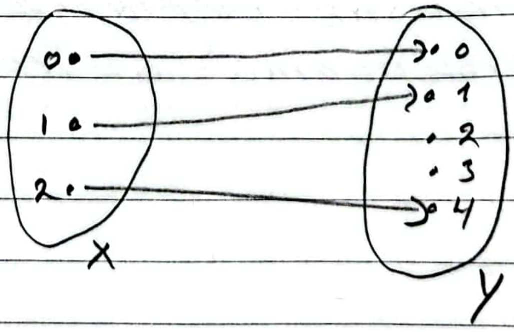
DIT IS NU DE DEFINITIE VAN 'FUNCTIE' EN 'AFBEELDING' GEWORDEN

*) SOMMIGE VOORBEELDEN KUNNEN DUBBELZINNIG WORDEN; WAT IS 'DE MOEDER'? WIJ HANTEREN DE DEFINITIE "DE PERSOON DIE HET KIND GEDRAGEN EN GEBAARD HEEFT".

- EEN FUNCTIE / AFBEELDING VAN EEN VERZAMELING X NAAR EEN VERZAMELING Y IS EEN VERZAMELING f VAN GEORDENDE PAREN (x, y) MET $x \in X$ EN $y \in Y$ ZO DAT ELKE $x \in X$ PRECIES EEN KEER VOORKOMT ALS EERSTE COÖRDINAAT VAN EEN PAAR IN f.
- BIJ ELKE $x \in X$ HOORT EEN UNIEKE $y \in Y$ DIE NOTEREN WE (= ALLE WISKUNDIGEN) ALS $f(x)$.

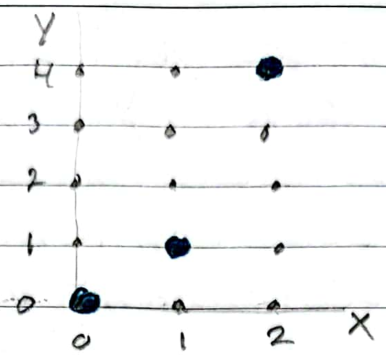
WAAROM DEZE MANIER VAN DEFINIËREN?
OMDAT DIT ZO WEINIG MOGELIJKE ONGEDEFINIEERDE TERMEN BEVAT, ALS FORMULE, WET, VOORSCHRIFT, BETREKKING, ...

WEERGAVE VAN FUNCTIES
ZEG $X = \{0, 1, 2\}$ EN
$Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
TABELLETJE: $f = \{(0,0), (1,1), (2,4)\}$
PLAATJE



FORMULE [LUKT NIET ALTIJD] $f(x) = x^2$
OF $f = \{(x, x^2) : x \in X\}$

GRAFIEK



• ← ALLE MOGELIJKE PAREN (x,y) MET $x \in X$ EN $y \in Y$

• ← DE PAREN IN f

ONZE DEFINITIE KOMT NEER OP:
EEN FUNCTIE IS GELIJK AAN ZIJN GRAFIEK.

EEN PAAR FUNCTIES [OF NIET!]
VAN $\mathbb{N}$ NAAR $\mathbb{N}$.

- $\{(n,1) : n \in \mathbb{N}\}$ JA (CONSTANT, WAARDE 1)
- $\{(n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ JA (IDENTIEKE FUNCTIE: $f(n)=n$)
- $\{(n,n^2) : n \in \mathbb{N}\}$ JA
- $\{(n^2,n) : n \in \mathbb{N}\}$ NEE ALS VAN $\mathbb{N}$ NAAR $\mathbb{N}$
  JA ALS VAN Q NAAR $\mathbb{N}$
  Q DE VERZAMELING VAN QUADRATEN.

DEFINITIE ZONDER DE TERM "PRECIES ÉÉN"
f IS EEN FUNCTIE VAN X NAAR Y
ALS
- VOOR ELKE $x \in X$ IS ER EEN $y \in Y$ MET $(x,y) \in f$
- VOOR ELKE $x \in X$ EN $y_1, y_2 \in Y$ GELDT ALS $(x,y_1) \in f$ ÈN $(x,y_2) \in f$ DAN $y_1 = y_2$.

NOTATIE: $f : X \to Y$.

DATE
10/04/2024

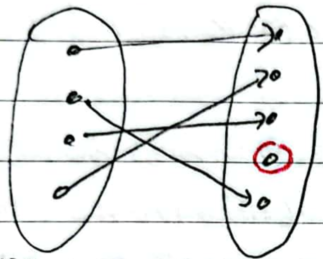
DRIE BELANGRIJKE NOTIES VOOR ONS.

EEN FUNCTIE $f: X \to Y$ IS

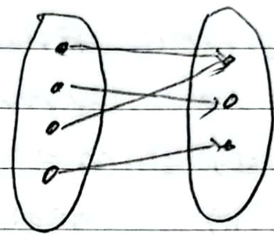
- INJECTIEF ALS ELKE y TEN HOOGSTE ÉÉN KEER VOORKOMT ALS TWEEDE COÖRDINAAT IN f

  FORMEEL ALS $y \in Y$ EN $x_1, x_2 \in X$ ZÓ ZIJN DAT $(x_1, y) \in f$ ÉN $(x_2, y) \in f$ DAN $x_1 = x_2$.

PLAATJE

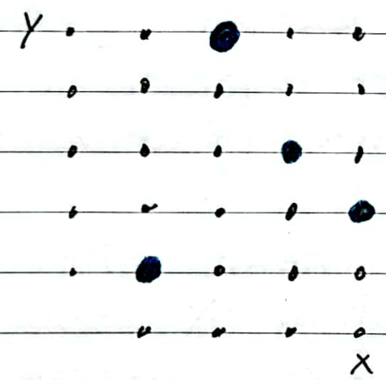


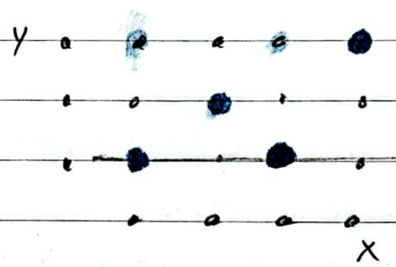
WEL INJECTIEF



NIET INJECTIEF

GRAFIEK





TWEE (OF MEER) PUNTEN OP EEN HOR. LIJN

- SURJECTIEF ALS ELKE $y \in Y$ TEN MINSTE ÉÉN KEER VOORKOMT ALS TWEEDE COÖRDINAAT IN f

  FORMEEL VOOR ELKE $y \in Y$ IS ER EEN $x \in X$ ZÓ DAT $(x, y) \in f$

PLAATJE LINKS NIET SURJECTIEF
ZIE ⊙
RECHTS WEL SURJECTIEF

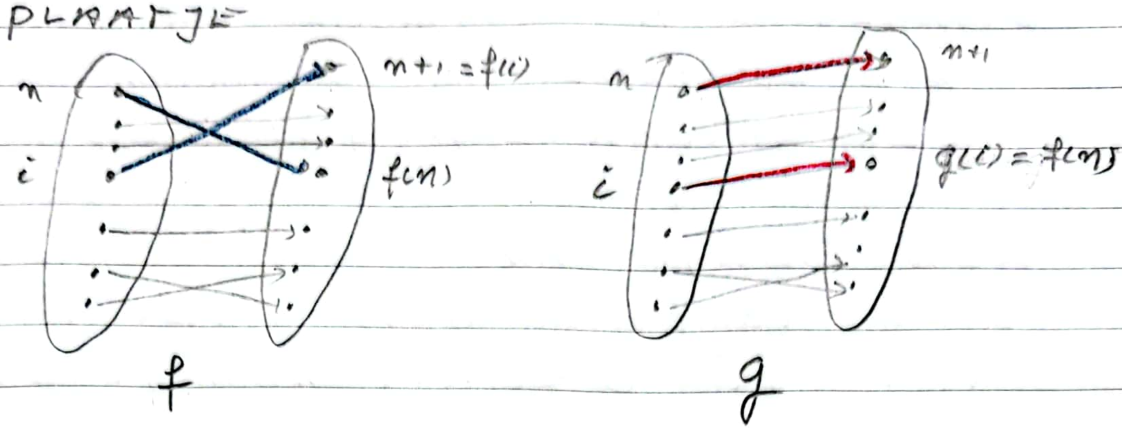
- BIJECTIE ALS f INJECTIEF ÈN SURJECTIEF IS
  ZIE DE SLIDES BIJ 'KOPPELING'
  EN DE VAKTERM 'BIJECTIE'.

2 EEN BEWIJS VAN:
ER IS, VOOR ELKE $n \in \mathbb{N}$, GEEN BIJECTIE
VAN $\{i : 0 \leq i < n\}$ NAAR $\{i : 0 \leq i \leq n\}$
$(= \{i : 0 \leq i < n+1\})$

DIT GAAT MET <u>VOLLEDIGE</u> <u>INDUCTIE</u>
(STELLING 80 BIJ DEDEKIND)

- DE STELLING GELDT VOOR $n = 0$
  IMMERS(!): $\{i : 0 \leq i < 0\} = \emptyset$ (LEGE VERZ.)
  $\{i : 0 \leq i \leq 0\} = \{0\}$ (NIET LEEG)
  DE ENIGE FUNCTIE VAN $\emptyset$ NAAR $\{0\}$
  IS DE LEGE VERZAMELING EN DIE IS
  NIET SURJECTIEF.
- INDUCTIESTAP NEEM AAN DE BEWERING
  GELDT VOOR <u>EEN</u> NATUURLIJK GETAL n.
  WE BEWIJZEN DAT DE BEWERING OOK
  GELDT VOOR $n+1$.
  STEL $f : \{i : 0 \leq i < n+1\} \rightarrow \{i : 0 \leq i \leq n+1\}$
  IS EEN AFBEELDING. TE BEWIJZEN:
  f IS NIET BIJECTIEF.
  ALS f NIET INJECTIEF IS ZIJN WE KLAAR.
  STEL DUS f IS INJECTIEF, DAN TE BEWIJZEN
  DAT f <u>NIET</u> SURJECTIEF IS.
  NEEM EEN $i < n+1$ MET $f(i) = n+1$
  (ALS DIE ER NIET IS, IS f NIET SURJECTIEF).
  MAAK EEN NIEUWE FUNCTIE g:
  ALS $j \neq i, n$ DAN $g(j) = f(j)$
  VERDER $g(i) = f(n)$ EN $g(n) = f(i) = n+1$.

PLAATJE



DAN IS g OOK INJECTIEF

ALS $k \neq f(n), n+1$ EN $(j,k) \in f$

DAN OOK $(j,k) \in g$ EN ALLEEN $(j,k) \in g$

ALS $k = f(n)$ DAN ALLEEN $(i, f(n)) \in g$

ALS $k = n+1$ DAN ALLEEN $(n, n+1) \in g$

VERDER: ALS $j < n$ DAN $g(j) < n+1$

DUS g GEEFT ONS EEN INJECTIEVE FUNCTIE VAN $\{j : 0 \leq j < n\}$ NAAR $\{j : 0 \leq j \leq n\}$

DE INDUCTIE AANNAME ZEGT DAN DAT DIE FUNCTIE NIET SURJECTIEF IS

ER IS EEN $k \leq n$ ZONDER $j < n$ DIE VOLDOET AAN $(j,k) \in g$

MAAR DAN IS ER OOK GEEN j MET $(j,k) \in f$.

3 BEWYS VAN PROPOSITIE 20 UIT BOEK IX
VAN DE ELEMENTEN
[IN MODERNE NOTATIE]

LAAT $f : \{i : 0 \leq i < n\} \to E$ EEN BIJECTIE ZYN, WAAR E EEN EINDIGE VERZAMELING PRIEMGETALLEN IS.

IK ZEG DAT ER EEN PRIEMGETAL IS, ONGELYK AAN ALLE $f(i)$

NEEM HET PRODUCT VAN DE PRIEMGETALLEN IN E : $m = f(0) \cdot f(1) \cdot \cdots \cdot f(n-1)$

BEKYK $m+1$.

ALS $m+1$ ZELF EEN PRIEMGETAL IS ZYN WE KLAAR WANT $f(i) \leq m < m+1$ VOOR ALLE i

ZO NIET DAN IS ER EEN PRIEMGETAL p DAT EEN DELER IS VAN $m+1$ (VII, 31)

IK ZEG DAT $p \neq f(i)$ VOOR ALLE i

IMMERS ALS $p = f(i)$ VOOR EEN i DAN IS p EEN DELER VAN m, MAAR DAN IS p OOK EEN DELER VAN $(m+1) - m$ EN DUS VAN 1, WAT ONMOGELYK IS.

DUS $p \neq f(i)$ VOOR ALLE i EN DUS DE PRIEMGETALLEN $f(0), \ldots, f(n-1), p$ ZYN MEER DAN DE VOORGEGEVEN HOEVEELHEID E.

BEWIJS VAN SATZ 159 UIT
WAS SIND UND WAS SOLLEN DIE ZAHLEN?

ZIE SLIDE 27

WE HEBBEN VOOR ELKE $n \in \mathbb{N}$
EEN DEELVERZAMELING E_n VAN O
EN EEN BIJECTIE $f_n : \{i : 0 \le i < n\} \to E_n$.
[NB $f_0 = \emptyset$, DE LEGE FUNCTIE]

WE MAKEN NIEUWE VERZAMELINGEN F_n
EN BIJECTIES $g_n : \{i : 0 \le i < n\} \to F_n$
EN ZO DAT VOOR ELKE n EN
ELKE $i < n$ GELDT DAT $g_{n+1}(i) = g_n(i)$.

WE LATEN ZIEN HOE g_{n+1} UIT EEN
REEDS GECONSTRUEERDE g_n EN UIT f_{n+1}
GEDEFINIEERD WORDT.

$n = 0$; $g_0 = f_0 = \emptyset$

$n = 1$ $g_1(0) = f_1(0)$.

ALGEMEEN: NEEM AAN g_n IS GEVONDEN

BEWERING E_{n+1} IS <u>GEEN</u> DEELVERZAMELING
VAN F_n.

ANDERS ZOU $i \xrightarrow{f_{n+1}} x \xrightarrow{g_n}$
EEN INJECTIEVE
AFBEELDING VAN $\{i : 0 \le i \le n\}$
NAAR $\{i : 0 \le i < n\}$ ZIJN
HETGEEN NIET KAN WANT $\{i : 0 \le i \le n\}$
IS DEDEKIND-EINDIG.

NEEM i MINIMAAL MET $f_{n+1}(i) \notin F_n$
EN DEFINIEER $F_{n+1} = F_n \cup \{f_{n+1}(i)\}$
EN BREIDT g_n UIT TOT g_{n+1} DOOR
HET PAAR $(n, f_{n+1}(i))$ TOE TE VOEGEN.

DAN GEEFT $n \mapsto g_{n+1}(n)$ EEN INJECTIEVE
AFBEELDING VAN $\mathbb{N}$ NAAR O.