Wat betekent ‘oneindig’ in de Wiskunde?

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 10 april 2024

Waarschuwing

Goethe

Die Mathematiker sind eine Art Franzosen: redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache, und dann ist es alsobald ganz etwas anders.

Dat geldt, in het bijzonder, voor de termen ‘oneindig’, ‘verzameling’, ‘(natuurlijk) getal’, ‘functie’, ‘afbeelding’, ...

Notatieafspraak

$\mathbb{N}$ staat voor de verzameling der natuurlijke getallen.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

De letters in het gebied *i*–*n* staan altijd voor natuurlijke getallen.

In het bijzonder: $\{i : 0 \leqslant i < n\}$ staat voor de verzameling natuurlijke getallen die kleiner zijn dan n.

Euclides

Uit *De Elementen* van Euclides (de vertaling is van Dijksterhuis):

Boek IX, Propositie 20

De priemgetallen zijn meer dan elke voorgeschreven hoeveelheid priemgetallen.

Voor de Grieken is de collecte priemgetallen *potentieel oneindig*: je kunt steeds nieuwe objecten in de collectie maken, deze is, zogezegd, nooit af.

Zie Boek 3 van de Fysica van Aristoteles.

Galileo

Uit: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638)
Een dialoog tussen Salviati en Simplicio.

In het kort: er zijn veel meer natuurlijke getallen dan kwadraten van natuurlijke getallen.
Kijk maar: tien van de eerste honderd, honderd van de eerste tienduizend, . . .

En ook: elk natuurlijk getal is wortel van een kwadraat, dus er lijken toch evenveel kwadraten als natuurlijke getallen te zijn . . .

Conclusie?

Galileo

De noties "gelijk", "groter/meer", and "kleiner/minder", zijn niet toepasbaar op oneindige, maar alleen op eindige, hoeveelheden.

Wikipedia: *Galileo's Paradox* heeft de dialoog over de kwadraten op één pagina staan.

Bolzano

Bolzano begon met een definitie van het begrip verzameling (Menge):

Menge

Einen Inbegriff, den wir einem solchen Begriffe unterstellen, bei dem die Anordnung seiner Teile gleichgultig ist (an dem sich also nichts für uns Wesentliches ändert, wenn sich bloss diese ändert), nenne ich eine Menge;

Voorbeeld

z. B. ein ganzes und ein in Stücke zerbrochenes Glas als Trinkgefäß betrachtet.

Bolzano

Bolzano gaf ook definities van “eindige verzameling” en van “oneindige verzameling”, maar die waren eigenlijk in de vorm van beschrijvingen en van de aard: “je herkent een oneindige verzameling als je hem ziet”.

Bijvoorbeeld:

“Die Menge der Sätze und Wahrheiten an sich”

Bolzano

Volgens Bernard Bolzano kunnen we de collectie van natuurlijke getallen (of priemgetallen) best als één verzameling beschouwen.

In zijn boek *Paradoxien des Unendlichen* schreef hij: "Ik kan het over de verzameling van alle inwoners van Praag of Peking hebben zonder dat ik al die inwoners persoonlijk ken".

Dit was een antwoord op een bezwaar tegen het beschouwen van oneindige verzamelingen: als je niet alle elementen kent ken je de verzameling ook niet.

Bolzano

Bolzano gaf net als Galileo voorbeelden waar "een deel" even groot leek als "het geheel".

Bekijk de intervallen $(0, 5)$ en $(0, 12)$; de eerste is duidelijk een echte deelverzameling van de tweede.

De relatie $12x = 5y$ koppelt elk getal uit de eerste verzameling aan precies één getal uit de tweede en omgekeerd.

Hij vond $(0, 12)$ toch groter dan $(0, 5)$ omdat de koppeling dingen verstoorde: de getallen die bij 3 en 4 horen, $7\frac{1}{5}$ en $9\frac{3}{5}$, een groter verschil hadden dan 3 en 4 zelf.

Van Dale

De allereerste editie (1864):

- eindig: bn. en bijw. een einde hebbende.
- oneindig: bn. en bijw. zonder einde;
  (fig.) buitengemeen groot;
  oneindig groot: door geene maat te bepalen;
  oneindig klein: nul.

Chambers

13th Edition (2014):

finite *adj* having an end or limit; subject to limitations or conditions, opp to *infinite*. [L. *finitus*, pap of *finire* to limit]

infinite *adj* without end or limit; greater than any quantity that can be assigned [*maths*]; extending to infinity; vast; in vast numbers; inexhaustible; infinitated (*logic*)
ORIGIN: in- (2) [dat verwijst naar 'in' als negatief voorvoegsel]

finite en **infinite** zijn dus antonymen.

Chambers

Let op, bij **infinite** staat:
greater than any quantity that can be assigned [*maths*]

Dat komt bijna rechtstreeks uit Heath's vertaling van de *Elementen*.

Book IX, Proposition 20

Prime numbers are more than any assigned multitude of prime numbers.

Interessant . . .

‘eindig’ staat tegenover ‘oneindig’, en toch . . .

‘oneindig’ heeft meer woorden nodig dan ‘eindig’

ook de woordenboeken hebben meer moeite met ‘oneindig’

Van Dale (huidige versie, on-line)

De wiskunde is wel gedefinieerd als de wetenschap van het oneindige, die dit met eindige middelen tracht te beheersen.

Laten we dat dan maar eens proberen.

Eenvoudig verband

De Wiskunde houdt het simpel :

‘oneindig’ is ‘niet-eindig’

dus

‘eindig’ is ‘niet-oneindig’

een definitie van de één geeft meteen een definitie van de ander.

Chambers heeft dat dus goed opgepikt.

Eindig: een definitie

Een verzameling, E, is *eindig* als er een natuurlijk getal n is zó dat E *even groot* is als $\{i : 0 \leqslant i < n\}$.

A en B zijn even groot: we kunnen geordende paren (a, b) vormen met telkens een a uit A en b uit B, en zó dat elke a uit A en elke b uit B precies één keer voorkomt.

Dit idee is al bij Galileo en Bolzano te zien, en ook eerder.
Richard Dedekind heeft er een definitie van gemaakt.

Voorbeeld

Bijvoorbeeld: de verzameling maanden in een jaar en de verzameling provincies van Nederland zijn even groot: een koppeling is bijvoorbeeld

(januari, Groningen), (februari, Drente), (maart, Friesland), (april, Overijssel), (mei, Flevoland), (juni, Gelderland), (juli, Utrecht), (augustus, Noord-Holland), (september, Zuid-Holland), (oktober, Zeeland), (november, Noord-Brabant), (december, Limburg).

Zie ook *Alles maken met niets*, NWT Magazine, februari 2013.
Te lezen op Brightspace/mijn website.

Eindig

Hier is de definitie nog een keer, officieel.

Een verzameling, E, is eindig als er een natuurlijk getal n en een bijectie $f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to E$ zijn.

'Bijectie' is de vakterm voor 'koppeling'.

Elke $i < n$ is gekoppeld aan precies één $e \in E$, en elke $e \in E$ is gekoppeld aan precies één $i < n$.

De verzamelingen $\{i : 0 \leqslant i < n\}$ zijn de standaard-eindige verzamelingen (zie ook straks).
Daarom noteren we de e die bij i hoort als e_i, of als $f(i)$.

Eindig: tellen

De pijl in "$f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to E$" geeft aan dat we E langs de kerfstok $\{i : 0 \leqslant i < n\}$ leggen en die kerfstok gebruiken om E te tellen.

Terzijde

In de Verzamelingenleer definiëren we de natuurlijke getallen zó dat $n = \{i \in \mathbb{N} : i < n\}$.
Dus

- $0 = \emptyset$,
- $1 = \{\emptyset\} = \{0\}$,
- $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}$,
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$,
- enzovoort

Een verzameling, E, is eindig als er een natuurlijk getal n en een bijectie $f : n \to E$ zijn.

Aantal elementen

Stelling

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is er géén bijectie $f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to \{i : 0 \leqslant i \leqslant n\}$.

Bewijs.

Zie de aantekeningen op mijn website/Brightspace. $\square$

Gevolg

De n uit de definitie van 'eindig' is uniek.

Voor *eindige* verzamelingen kunnen nu we 'het aantal elementen van E' afspreken als

"die unieke n waarvoor een bijectie $f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to E$ bestaat".

Aantal elementen

Die afspraak is wel degelijk nodig.

Een verzameling heeft geen intrinsiek ‘aantal elementen’.

Onze definitie van ‘eindige verzameling’ heeft dus het meekomende voordeel dat we meteen het ‘aantal elementen’ mee hebben kunnen definieren.

Oneindig

Dus, . . . , een verzameling, O, is oneindig als er geen natuurlijk getal n is met een bijectie $f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to O$.

Dus we hebben niets?

Oneindig

Nou, . . . , er is geen koppeling met $\{i : 0 \leqslant i < 0\} = \emptyset$, dus O is niet leeg.

Er is dus een koppeling tussen $\{0\}$ en een deelverzameling van O.

Maar dat is geen koppeling met O zelf, dus er is nog een punt in O en we krijgen een koppeling tussen $\{0, 1\}$ en een deelverzameling van O.

Maar dat is geen koppeling met O zelf, dus er is nog een punt in O en we krijgen een koppeling tussen $\{0, 1, 2\}$ en een deelverzameling van O.

Enzovoort.

We krijgen voor elke n een deelverzameling E van O en een bijectie $f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to E$.

Dat is meer dan niets.

Oneindig

Terug naar Euclides en de priemgetallen.

Stelling (De Elementen, Boek IX, Propositie 20)

De priemgetallen zijn meer dan elke voorgegeven hoeveelheid priemgetallen.

Bewijs.

Laat A, B, en C de voorgegeven priemgetallen zijn. Ik zeg dat er meer priemgetallen zijn dan A, B, en C.

... $\square$

Precies wat gedaan moet worden om aan onze definitie van oneindig te voldoen.

Het bewijs is voor drie priemgetallen maar werkt voor elke n en elke bijectie $f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to E$, waar E een verzameling priemgetallen is.

Oneindig

Euclides (en Chambers) zitten dus goed met oneindigheid.

Echter ...

Eigenlijk sta je, bij een oneindige verzameling, bijna met lege handen.

Géén n, géén bijectie, voor O zelf.

Wel wat deelverzamelingen die eindig zijn, voor elke n ten minste één met n elementen.

Oneindig: een alternatieve definitie

In Chambers staat ook:

infinite set *n* (*maths*) a set that can be put into one-one correspondence with part of itself

Voor alle duidelijkheid: *proper* part.

Dit komt niet uit de lucht vallen.

We hebben dat verschijnsel bij Galileo en Bolzano gezien.

Belangrijker nog . . .

Oneindig: een alternatieve definitie

Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?* (1888)

Ein System S heißt *unendlich*, wenn es einem echten Teile ähnlich ist; im entgegengesetzen Falle heißt S ein *endliches* System.

Voorbeeld

Meine Gedankenwelt, d. h. die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können, ist unendlich.

Voorbeeld

De natuurlijke getallen: $\{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\}$ is een koppeling tussen $\mathbb{N}$ en de echte deelverzameling $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Oneindig: alternatief

In bekendere termen: Dedekind noemde een verzameling, S, *oneindig* als een deelverzameling T van S bestaat met $T \neq S$, en een bijectie $f : S \to T$.

Voorbeeld

De koppeling $\big(x, g(x)\big)$, met $g(x) =$ "de gedachte aan x", is een bijectie tussen S en een echte deelverzameling want niet elk object, bijvoorbeeld Dedekind zelf, is een gedachte aan een object.

Voorbeeld

Bolzano's koppeling: $\{(x, y) : 5x = 12y\}$ is een koppeling tussen de intervallen $(0, 12)$ en $(0, 5)$.

Wat nu?

We hebben een definitie van ‘eindig’ met een definitie van ‘oneindig’ als ‘niet-eindig’.
En we hebben een definitie van ‘oneindig’ met een definitie van ‘eindig’ als ‘niet-oneindig’.

Is er verschil?
Zo nee: mooi! Elke oneindige verzameling komt in ieder geval met iets van zichzelf.
Zo ja: wat is het verschil? En welke van de twee is nu de beste?

Voorzichtigheidshalve spreken we bij de tweede definitie over Dedekind-eindig en Dedekind-oneindig.

De voordelen van Dedekind-oneindigheid

We kennen het voordeel van onze eerste definitie: 'aantal elementen' is gedefinieerd voor eindige verzamelingen.

Dedekind-oneindigheid heeft ook zijn voordelen.

Stelling

Equivalent zijn

1. X *is Dedekind-oneindig*
2. *er is een deelverzameling* Y *van* X *met een bijectie* $f : \mathbb{N} \to Y$.
3. X *is even groot als* $X \cup \{p\}$ *voor een/elke* p *niet in* X

De voordelen van Dedekind-oneindigheid

Dat komt overeen met veel ideeën over oneindige verzamelingen.

Ten minste zo groot als $\mathbb{N}$, of ook: "$\mathbb{N}$ is de kleinste oneindige verzameling".

Met eentje meer verandert er niets.

Relatie

'Dedekind-oneindig' impliceert 'oneindig'

en dus, contrapositief:

'eindig' impliceert 'Dedekind-eindig'.

En omgekeerd?
'Oneindig' impliceert 'Dedekind-oneindig'?
'Dedekind-eindig' impliceert 'eindig'?

Opgave

Voor thuis.

- Bewijs de implicatie "oneindig $\Rightarrow$ Dedekind-oneindig".
  Hint: dat gaat het makkelijkst via item 2: maak een koppeling tussen $\mathbb{N}$ en een deelverzameling van X.
- Loop je bewijs zorgvuldig na en geef aan waarom het niet geheel volledig is.

Hier komen we volgende week op terug.

Opgave, iets makkelijker

Voor thuis.

- Lees § 14 in *Was sind und was sollen die Zahlen?*, in het bijzonder Stelling 159 en zijn bewijs.
- Loop dat bewijs zorgvuldig na en geef aan waarom het niet geheel volledig is.

Hier komen we volgende week op terug.

Welke definitie wordt het?

De beide definities zijn niet equivalent (volgende week zien we waarom).

De nuttigste van de twee, voor vele takken van de wiskunde is toch onze eerste definitie, met hulp van de ideeën van Dedekind.

Definitie

Een verzameling, E, is *eindig* als er een natuurlijk getal n is en een bijectie $f : \{i : 0 \leqslant i < n\} \to E$.

En die natuurlijke getallen dan?
Daar hebben we de ideeën van Dedekind bij nodig.

Natuurlijke getallen

Dedekind gebruikte zijn oneindige verzameling om natuurlijke getallen te construeren/definiëren. (Let op: geen bepaald lidwoord.)

Neem zo'n verzameling S, met een bijectie $f : S \to T$, waar T een *echte* deelverzameling van S is.

Neem $x \in S \setminus T$ en laat N de *kleinste* deelverzameling van S zijn met

- $x \in N$ en
- als $y \in N$ dan $f(y) \in N$.

Natuurlijke getallen

Dedekind bewees netjes dat zo'n N bestaat (§ 6).

Dedekind bewees ook nauwkeurig dat je met N precies kunt doen wat je met (de) natuurlijke getallen wilt doen (§ 7–9, § 11–13).

Waarom deed hij dat?
In die tijd was er geen echte, formele, wiskundige, definitie van natuurlijke getallen.

Natuurlijke getallen

Verder: met welke Dedekind-oneindige verzameling je ook begint:
de N-en die je maakt zijn ononderscheidbaar (isomorf) (§ 10).

Dedekind maakte dus de natuurlijke getallen. (Alsnog een bepaald lidwoord.)

Natuurlijke getallen

Ten slotte:
de bewijzen van Bolzano en Dedekind van het bestaan van oneindige verzamelingen waren echt 19de-eeuws. Daar komen we nu niet meer mee weg. Het bestaan van zo'n verzameling is een extra aanname:

Oneindigheidsaxioma

Er bestaat een verzameling S die voldoet aan $\emptyset \in S$ en

$$\text{als } x \in S \text{ dan ook } x \cup \{x\} \in S$$

Hier passen we Dedekind's constructie op toe: de kleinste deelverzameling van S die aan deze twee eisen voldoet, dat is de $\mathbb{N}$ van de verzamelingenleer.

En deze natuurlijke getallen gebruiken we dan in de definitie van eindigheid.