1 AFTELBAARHEID
IK HEB HET WOORD AL VAAK IN DE MOND GENOMEN.
AFTELBAAR BETEKENT (VOOR MIJ):
EINDIG OF EVEN GROOT ALS $\mathbb{N}$.
AFTELBAAR ONEINDIG BETEKENT DAN EVEN GROOT ALS $\mathbb{N}$.
IN HET ENGELS: COUNTABLE OF DENUMERABLE.
SOMS IS AFTELBAAR IMPLICIET ONEINDIG
RAADPLEEG BIJ TWIJFEL DE INDEX VAN HET BOEK.

2 KEUZEAXIOMA.
DIT KOMT VOORT UIT, BIJVOORBEELD, NAÏEVE POGINGEN TE BEWIJZEN DAT
- ONEINDIGE VERZAMELINGEN DEDEKIND-ONEINDIG ZIJN
- DAT ELKE VERZAMELING EEN WELORDENING HEEFT.

ZO'N BEWIJS VERLOOPT ONGEVEER ALS VOLGT:
NEEM AAN X IS ONEINDIG.
NEEM $x_0 \in X$ DAT KAN WANT $X \neq \emptyset$
NEEM $x_1 \in X$ MET $x_1 \neq x_0$
DAT KAN WANT $X \neq \{x_0\}$
NEEM $x_2 \in X$ MET $x_2 \neq x_1$ EN $x_2 \neq x_0$
DAT KAN WANT $X \neq \{x_0, x_1\}$
⋮
NEEM $x_n \in X \setminus \{x_i : 0 \leq i < n\}$
DAT KAN WANT X IS ONEINDIG
⋮

--- DIT GEEFT ONS EEN INJECTIEVE AFBEELDING VAN $\mathbb{N}$ NAAR X.

ZERMELO'S BEWYS VAN DE WELORDENINGSSTELLING ZIET ER OOK ZO UIT MET ÉÉN VERSCHIL: BEKYK DE FAMILIE $\mathcal{A}$ VAN ALLE NIET-LEGE DEELVERZAMELINGEN VAN X. ER IS EEN FUNCTIE DIE VOOR ELKE $A \in \mathcal{A}$ EEN UITGELEZEN ELEMENT $\gamma(A)$ AANWYST.

DIT NU IS EEN INSTANTIE VAN HET KEUZEAXIOMA
ZERMELO HAD EEN RECHTVAARDIGING DIE, ACHTERAF, NEERKWAM OP DIT AXIOMA ZELF.

SOMS KUN JE ZO'N FUNCTIE DEFINIËREN BYVOORBEELD ALS $X = \mathbb{N}$, DAN VOLDOET $\gamma(A) = \min A$.
SOMS NIET, ALS $X = \mathbb{R}$ BYVOORBEELD.
ER IS EEN NIET-TRIVIALE STELLING DIE (IETWAT VEREENVOUDIGD) DAT ER GEEN FORMULE VOOR ZO'N FUNCTIE IS.
DAT LAATSTE MAAKT VOOR SOMMIGEN HET KEUZEAXIOMA DUBIEUS.
VOOR VELEN IS HET EEN NUTTIG INSTRUMENT, ZO NUTTIG DAT MEN HET AAN DE LYST VAN AXIOMA'S VOOR DE VERZAMELINGENLEER TOEVOEGT.

HET BOVENSTAANDE 'BEWYS' IS IN FEITE ONEINDIG LANG, VOOR ELKE n MOET ER EEN NIEUWE BESLISSING GENOMEN WORDEN, AFHANKELYK VAN DE EERDERE STAPPEN

MET BEHULP VAN DE FUNCTIE γ WORDT HET HEEL KORT:

DEFINIEER $x_n = \gamma(X \setminus \{x_i : 0 \le i < n\})$

DUS $x_0 = \gamma(X)$

$x_1 = \gamma(X \setminus \{x_0\})$

$x_2 = \gamma(X \setminus \{x_0, x_1\})$

DE RY $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ LIGT ONDUBBELZINNIG VAST.

STATUS: - GÖDEL (1940) HET KEUZEAXIOMA LEIDT NIET TOT TEGENSPRAKEN

- COHEN (1963) HET KEUZEAXIOMA IS NIET AF TE LEIDEN UIT DE ANDERE AXIOMA'S VOOR DE VERZAMELINGENLEER.

MYN MENING: HET LEVEN IS AL MOEILYK GENOEG MET HET KEUZEAXIOMA.

3 WELORDENINGEN.

BEDACHT DOOR CANTOR:

EEN RELATIE $\lhd$ OP EEN VERZAMELING X IS EEN WELORDENING ALS

- UIT $x \lhd y$ EN $y \lhd z$ VOLGT ALTYD $x \lhd z$
- NOOIT GELDT $x \lhd x$
- ALTYD GELDT $x \lhd y$ OF $x = y$ OF $y \lhd x$
- ALS $A \subseteq X$ EN $A \neq \emptyset$ DAN BESTAAT $\min A$: ER IS EEN $a \in A$ ZŌ DAT VOOR ALLE $b \in A$ GELDT $a = b$ OF $a \lhd b$.

VOORBEELDEN

- DE GEWONE ORDENING "KLEINER DAN" op $\mathbb{N}$ IS EEN WELORDENING.
- ALS WE $m \lhd n$ "GROTER DAN" LATEN BETEKENEN DAN IS ER <u>GEEN</u> $m \in \mathbb{N}$ ZODAT VOOR ALLE n GELDT

  $m = n$ OF $m \lhd n$.

  (WANT $m+1 \lhd m$ VOOR ELKE m)
- DE GEWONE ORDENING VAN $\mathbb{R}$ IS GEEN WELORDENING: MIN $(0,1)$ IS ER NIET.
- DEFINIEER op $\mathbb{N}$:

  $m \lhd n$ ALS
  - m IS EVEN ÈN n IS ONEVEN, OF
  - $m < n$ ALS m EN n BEIDE EVEN ZIJN OF BEIDE ONEVEN

  PLAATJE: 0 2 4 6 ---- 1 3 5 7 ----

  DIT IS EEN WELORDENING.

WELORDININGEN ZIJN GEWILD EN NUTTIG OMDAT ZE INDUCTIE EN RECURSIE MOGELIJK MAKEN OVER VERZAMELINGEN DIE NIET NOODZAKELIJK AFTELBAAR ZIJN.

4 EQUIVALENTEN VAN HET KEUZEAXIOMA

- DE WELORDININGSSTELLING
- LEMMA VAN ZORN
- MAXIMALITEITSPRINCIPE VAN HAUSDORFF
- TEICHMÜLLER-TUKEY-LEMMA

} VEELGEBRUIKT BIJ CONSTRUCTIES

- VOOR ELK TWEETAL VERZAMELINGEN A EN B GELDT: ER IS EEN INJECTIEVE AFBEELDING VAN A NAAR B, OF VAN B NAAR A.

5 DEDEKIND: DAS WESEN DER STETIGKEIT

[ENGELSE VERTALING: THE ESSENCE OF CONTINUITY
BLADZYDE 5, VOLG DE LINK OP BRIGHTSPACE]

"ALS DE PUNTEN VAN EEN RECHTE LYN IN TWEE VERZAMELINGEN WORDEN VERDEELD EN WEL ZO DAT ELK PUNT UIT DE EERSTE VERZAMELING LINKS VAN ELK PUNT UIT DE TWEEDE VERZAMELING LIGT DAN IS ER PRECIES ÉÉN PUNT DAT DEZE VERDELING TEWEEGBRENGT, DEZE SPLITSING VAN DE LYN IN TWEE DELEN."

IN MODERNERE TERMEN:

STEL DE RECHTE LYN L IS DE VERENIGING VAN TWEE (NIET-LEGE) DEELVERZAMELINGEN A EN B EN WEL ZÓ DAT VOOR ALLE $a \in A$ EN $b \in B$ GELDT <u>a LIGT LINKS VAN b</u>

DAN IS ER ÉÉN PUNT p OP L ZÓ DAT

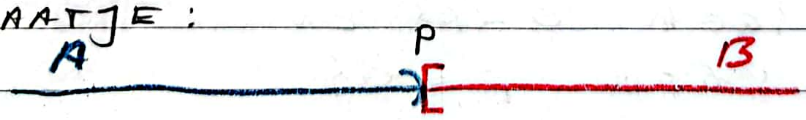
$A = \{a : a$ LIGT LINKS VAN $p\}$ EN

$B = \{b : b = p$ OF p LIGT LINKS VAN $b\}$ <u>OF</u>

$A = \{a : a = p$ OF a LIGT LINKS VAN $p\}$ EN

$B = \{b : p$ LIGT LINKS VAN $b\}$

PLAATJE:



OF

DIT ONDERSCHEIDT DE VERZAMELING $\mathbb{R}$ DER REËLE GETALLEN VAN DIE DER RATIONALE GETALLEN, $\mathbb{Q}$.

VOORBEELD

$$A = \{a \in \mathbb{Q} : a \leq 0 \text{ OF } a^2 < 2\}$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} : b > 0 \text{ EN } b^2 > 2\}$$

$\sqrt{2}$ BEPAALT EEN GAT IN $\mathbb{Q}$

6: TOEPASSING

IN CANTOR'S BEWIJS HADDEN WE RIJEN

$$\alpha' < \alpha'' < \alpha''' < \dots\dots < \beta''' < \beta'' < \beta'$$

IN MODERNE NOTATIE

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \alpha_m < \dots\dots < \beta_m < \dots < \beta_3 < \beta_2 < \beta_1$$

MERK OP: ALS x EEN REËEL GETAL IS DAN GELDT: ÒF ER IS EEN m MET $x < \alpha_m$

ÒF ER IS GEEN m MET $x < \alpha_m$

DUS MET $A = \{a : \text{ER IS EEN } m \text{ MET } a < \alpha_m\}$

EN $B = \{b : \text{ER IS GEEN } m \text{ MET } b < \alpha_m\}$

VERDELEN WE $\mathbb{R}$ IN TWEE DELEN

VERDER: ALS $b \in B$ DAN GELDT DAT

$\alpha_m < b$ VOOR ALLE m.

DAN VOLGT: ALS $a \in A$ EN $b \in B$ DAN $a < b$.

ER IS DUS EEN $p \in \mathbb{R}$ DIE DE SPLITSING TEWEEG BRENGT.

DAN GELDT DAT $p \notin A$ [ALS $p \in A$ DAN IS ER EEN m MET $p < \alpha_m$ DAN VOLGT $\alpha_m \in B$ EN $\alpha_m \in A$]

DUS $A = \{a \in \mathbb{R} : a < p\}$ EN

$B = \{b \in \mathbb{R} : p \leq b\}$.

DE RIJ $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$ CONVERGEERT NAAR p.