Verschillende soorten oneindig

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 17 april 2024

Opgave, de iets makkelijkere versie

- Lees § 14 in *Was sind und was sollen die Zahlen?*, in het bijzonder Stelling 159 en zijn bewijs.
- Loop dat bewijs zorgvuldig na en geef aan waarom het niet geheel volledig is.

Wat gebeurt hier?

159. Satz. Ist Σ ein unendliches System, so ist jedes der in 98 erklärten Zahlensysteme Z_n ähnlich abbildbar in Σ (d. h. ähnlich einem Teile von Σ), und umgekehrt.

Beweis. Wenn Σ unendlich ist, so gibt es nach 72 gewiß einen Teil T von Σ, welcher einfach unendlich, also nach 132 der Zahlenreihe N ähnlich ist, und folglich ist nach 35 jedes System Z_n als Teil von N auch einem Teile von T, also auch einem Teile von Σ ähnlich, w. z. b. w.

Der Beweis der Umkehrung — so einleuchtend dieselbe erscheinen mag — ist umständlicher. Wenn jedes System Z_n ähnlich abbildbar in Σ ist, so entspricht jeder Zahl n eine solche ähnliche Abbildung α_n

Voor elke n is er een afbeelding α_n.

von Z_n, daß $\alpha_n(Z_n)\, 3\, \Sigma$ wird. Aus der Existenz einer solchen als gegeben anzusehenden Reihe von Abbildungen α_n, über die aber weiter nichts vorausgesetzt wird, leiten wir zunächst mit Hilfe des Satzes 126 die Existenz einer neuen Reihe von ebensolchen Abbildungen ψ_n ab, welche die besondere Eigenschaft besitzt, daß jedesmal, wenn $m \leqq n$, also (nach 100) $Z_m\, 3\, Z_n$ ist, die Abbildung ψ_m

Dedekind: er is een rij van dergelijke afbeeldingen.

De vraag

Georg Cantor
(1845–1918)

Richard Dedekind
(1831–1916)

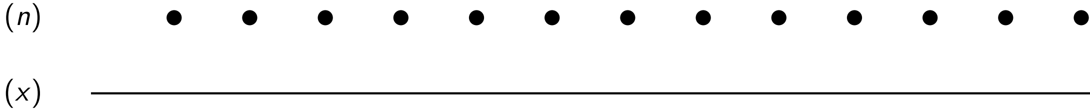
Halle, d. 29ten Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

Dat klinkt toch mooier dan: "Is er een koppeling (bijectie) tussen $\mathbb{N}$ en $(0, \infty)$?"

Opmerkingen van Cantor

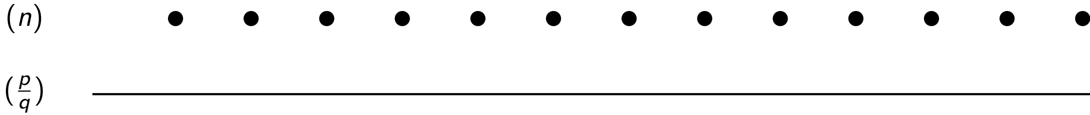
Op het eerste gezicht zou men zeggen dat het niet kan want (n) bestaat uit discrete delen en (x) is een continuum.



Maar dat zegt verder niets, en hoezeer ik ook denk dat het niet kan, ik kan de werkelijke reden niet vinden, en daar is het mij om te doen; misschien is die reden wel heel eenvoudig.

Opmerkingen van Cantor

Zou men op het eerste gezicht ook niet geneigd zijn te denken dat de (n) en het geheel $\left(\frac{p}{q}\right)$ der positieve rationale getallen zich niet één-op-één aan elkaar laten koppelen?



Maar het is echter niet moeilijk aan te tonen dat dat laatste wel kan en zelfs dat (n) één-op-één gekoppeld kan worden aan $(a_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu})$, waar n_1, n_2, $\ldots$, n_ν onbeperkte positieve gehele indices zijn van een willekeurige hoeveelheid ν.

Kennelijk $(a_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu})$ in plaats van $(n_1, n_2, \ldots, n_\nu)$

Volgende brief: Halle d. 2ten December 73.

Kennelijk had Dedekind geschreven dat hij het ook niet wist.
Cantor toonde zich gerustgesteld: het lag niet aan hem maar aan de vraag.

Verder: ik heb me er nooit ernstig mee beziggehouden omdat het voor mij geen praktisch nut heeft, en ik ben het met U eens dat het probleem ook weer niet zoveel moeite verdient.

Maar toch: het zou wel mooi zijn als het opgelost zou worden, want het als het antwoord **nee** zou zijn dan hebben we een nieuw bewijs van de Stelling van Liouville dat er transcendente getallen zijn.

Hier was meer aan de hand ...

Volgende brief: Halle d. 2^{ten} December 73.

... namelijk

Het door U gegeven bewijs dat (n) zich eenduidig aan het lichaam der algebraïsche getallen laat koppelen is ongeveer hetzelfde als het mijne voor $(a_{n_1,n_2,\ldots,n_\nu})$: schrijf $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_\nu^2 = \mathfrak{N}$ en orden de elementen daarnaar.

Intermezzo: Rationale getallen tellen

Voor de positieve rationale getallen: voor elke n hebben we eindig veel positieve breuken $\frac{p}{q}$ met $p^2 + q^2 = n$. Sorteer de breuken dus eerst naar de groep waar ze in zitten, en per groep naar de teller.

Dus:

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{2}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{5}, \underbrace{\frac{2}{2}}_{8}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{3}{1}}_{10}, \underbrace{\frac{2}{3}, \frac{3}{2}}_{13}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{4}{1}}_{17}, \ldots$$

Via $p + q = n$ ziet het er wat overzichtelijker uit:

$$\underbrace{\frac{1}{1}}_{2}, \underbrace{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}}_{3}, \underbrace{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}}_{4}, \underbrace{\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}}_{5}, \underbrace{\frac{1}{5}, \frac{2}{4}, \frac{3}{3}, \frac{4}{2}, \frac{5}{1}}_{6}, \ldots$$

Intermezzo: Rationale getallen tellen

Klein probleem: dit koppelt $\mathbb{N}$ aan de (positieve) *breuken*.

Elk positief *rationaal getal* wordt aan oneindig veel natuurlijke getallen gekoppeld.

Dit najaar in Pythagoras: een methode, die teruggaat tot Kepler, om direct een koppeling tussen $\mathbb{N}$ en de positieve rationale *getallen* te definiëren.

Volgende brief: Halle d. 2ten December 73.

Is het niet mooi dat men, zoals U heeft laten zien, van het *n*-de algebraïsche getal kan spreken?

[Een (reëel of complex) getal ω is *algebraïsch* als het een nulpunt is van een polynoom met *gehele* coëfficiënten. (We komen daar straks nog op terug.)]

Zoals U terecht opmerkt kan het probleem hergeformuleerd worden tot: kan (n) eenduidig worden gekoppeld aan het geheel $(a_{n_1,n_2,\ldots})$ waar de n_1, n_2, ... onbegrensde positieve gehele getallen zijn en oneindig in aantal.
[Dat is de verzameling van rijen natuurlijke getallen in vermomming.]

Dedekind zou later de aftelbaarheid van het lichaam der algebraïsche getallen gebruiken in *Über die Permutationen des Körpers aller algebraischen Zahlen* (1901).

Het antwoord

Halle d. 7ten December 73.

In den letzten Tagen habe ich die Zeit gehabt, etwas nachhaltiger meine Ihnen gegenüber ausgesprochene Vermuthung zu verfolgen; erste heute glaube ich mit der Sache fertig geworden zu sein; sollte ich mich jedoch täuschen, so finde ich gewiss keinen nachsichtigeren Beurtheiler, als Sie. Ich nehme mir also die Freiheit, Ihrem Urtheile zu unterbreiten, was soeben in der Unvollkommenheit des ersten Conceptes zu Papier gebracht is.

Dan volgt een bewijs.

En dan

So glaube ich schliesslich zum Grunde gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen früheren Briefe mit (x) bezeichnete Inbegriff **nicht** dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen lässt.

RECLAME!!!!

Het bewijs is te lezen in Pythagoras.

Zie het nummer van April 2018

Het is wat bewerkelijker dan het gepubliceerde bewijs, maar met wat doorzettingsvermogen wel te volgen, volg de link hierboven.

Twee dagen later

Halle d. 9$^{\text{ten}}$ December 73.
Ik heb een eenvoudiger bewijs gevonden, zonder splitsen in deelrijen.

Ik laat direct zien dat als ik uitga van een rij

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots \tag{$*$}$$

ik in elk voorgegeven interval $(\alpha \,..\, \beta)$ een getal η kan bepalen dat niet in de rij $(*)$ voorkomt.

Daaruit volgt zonder meer dat (n) en (x) niet één op één gekoppeld kunnen worden, en ik concludeer dat er tussen deze verzamelingen verschillen bestaan die ik tot nu toe niet doorgronden kon.

Berlin d. 25ten December 73.

Cantor schrijft:

hoewel ik het resultaat, hetwelk ik recentelijk met U besproken heb niet wilde publiceren, ben ik daartoe toch aangespoord.
Ik had de heer Weierstrass het resultaat op de de 22ste verteld en hem op de 23ste het bewijs laten zien.
Hij vond dat ik het moest publiceren.
Ik heb een kort artikel geschreven met de titel

Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen

De algebraïsche getallen

Eerst het bewijs (van Dedekind) dat er een koppeling is tussen $\mathbb{N}$ en de verzameling reële algebraïsche getallen.

Definitie

Een getal, ω, is *algebraïsch* als het oplossing is van een veeltermvergelijking

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

met $n \geqslant 1$, en elke a_i geheel.

De algebraïsche getallen

Voorbeelden:

- Elk rationaal getal $\frac{t}{n}$: $nx - t = 0$
- $\sqrt{2}$: $x^2 - 2 = 0$
- $\sqrt[3]{2}$: $x^3 - 2 = 0$
- $\cos\frac{2\pi}{5}$: $16x^5 - 20x^3 + 5x - 1 = 0$
- $\sin\frac{2\pi}{5}$: $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$
- e: niet (Hermite, 1873)
- π: niet (Lindemann, 1882)

Niet-algebraïsche getallen heten *transcendent*.
Euler: "deze overschrijden de kracht van algebraïsche methoden"

De algebraïsche getallen

Neem zo'n vergelijking:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

We noemen het getal

$$N = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

de *hoogte* van de vergelijking.

Elk natuurlijk getal N is hoogte van eindig veel vergelijkingen.

Het aantal vergelijkingen van hoogte N is geteld, zie rij A005409 in de OEIS (met een recursieve formule, en de bijbehorende expliciete uitdrukking).

De algebraïsche getallen

Nu koppelen.

Elke N is hoogte van eindig veel vergelijkingen.
Elke vergelijking $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ heeft ten hoogste n oplossingen.

Conclusie: bij elk natuurlijk getal N vormen de oplossingen van de vergelijkingen van hoogte N een eindige verzameling A_N.

Maak die verzamelingen wat kleiner: $B_N = \{\omega : \omega \in A_N \text{ en als } i < N \text{ dan } \omega \notin A_i\}$.

Voordeel: elk algebraïsch getal behoort tot precies één B_N.

De algebraïsche getallen

De koppeling:

De B_N zijn elk netjes geordend door de ordening van $\mathbb{R}$.
Noteer hun aantallen elementen als m_N.

Koppel de elementen van B_1 aan $\{i : 0 \leqslant i < m_1\}$, netjes op volgorde
Koppel de elementen van B_2 aan $\{i : m_1 \leqslant i < m_1 + m_2\}$, netjes op volgorde

Algemeen: koppel de elementen van B_N aan
$\{i : m_1 + \cdots + m_{N-1} \leqslant i < m_1 + \cdots + m_{N-1} + m_N\}$, netjes op volgorde

De stelling

Wenn eine nach irgend einem Gesetze gegebene unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrössen:

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \tag{4.}$$

vorliegt, so lässt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4.) nicht vorkommt; dies soll nun bewiesen werden.

Het gepubliceerde bewijs

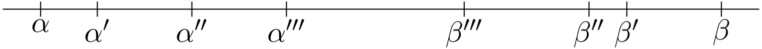
Gegeven een rij

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_\nu, \ldots$$

van positieve reële getallen en een interval $(\alpha \ldots \beta)$.

Hoe bepalen we nu zo'n getal η?

Het gepubliceerde bewijs



- Laat α' en β' de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in $(\alpha \dots \beta)$ liggen en wel zó dat $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$.
- Laat α'' en β'' de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in $(\alpha' \dots \beta')$ liggen en wel zó dat $\alpha' < \alpha'' < \beta'' < \beta'$.
- Laat α''' en β''' de *eerste* twee termen van de rij zijn (zo die er zijn) die in $(\alpha'' \dots \beta'')$ liggen en wel zó dat $\alpha'' < \alpha''' < \beta''' < \beta''$.
- enzovoort

Het gepubliceerde bewijs

Om de gedachten te bepalen: stel dat $\alpha' = \omega_{10}$ en $\beta' = \omega_5$.

Dan liggen ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_6, ω_7, ω_8, en ω_9 niet in $(\alpha \ldots \beta)$.

Als vervolgens $\alpha'' = \omega_{11}$ en $\beta'' = \omega_{13}$
dan liggen ω_5, ω_{10}, en ω_{12} niet in $(\alpha' \ldots \beta')$.

Wat er ook gebeurt, je kunt laten zien dat, op elke stap geldt:

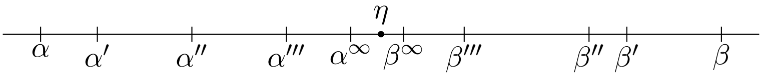
$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2\nu-1}, \omega_{2\nu} \notin (\alpha^{(\nu)}, \beta^{(\nu)})$$

Het gepubliceerde bewijs

Twee gevallen:

1. Het aantal intervallen is eindig; dan vinden we een interval $(\alpha^{(\nu)} \dots \beta^{(\nu)})$ met ten hoogste één term van de rij er in. Dan zijn we duidelijk klaar.

Het gepubliceerde bewijs



2. Het aantal intervallen is oneindig; dan vinden we een stijgende rij

$$\alpha < \alpha' < \alpha'' < \cdots$$

die naar boven begrensd is (door β) en dus convergeert, met limiet α^∞; en een dalende rij

$$\beta > \beta' > \beta'' > \cdots$$

die naar beneden begrensd is (door α) en dus convergeert, met limiet β^∞.
Dan geldt $\alpha^\infty \leqslant \beta^\infty$, en elke η met $\alpha^\infty \leqslant \eta \leqslant \beta^\infty$ is als gewenst.
Zie de aantekeningen voor de rechtvaardiging van het bestaan van α^∞ en β^∞.

Een nieuwe vraag

Halle d. 5$^{\text{ten}}$ Januar 74.

Lässt sich eine Flache (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?

Mir will es im Augenblick noch scheinen, dass die Beantwortung dieser Fragen, — obgleich man auch hier zum Nein sich so gedrängt sieht, dass man de Beweis dazu fast für überflüssig halte möchte, — grosse Schwierigkeiten hat.

Een nieuwe vraag

Halle 18. Mai 74.

... in Berlin wurde mir von meinem Freunde, dem ich dieselbe Schwierigkeit vorlegte, die Sache gewissermassen als absurd erklärt, da es sich von selbst verstünde, dass zwei unabhänginge Veränderliche sich nicht auf eine zurückführen lassen.

Een antwoord

Halle d. 20$^{\text{ten}}$ Juni 1877.

Een vrij lange brief met een bewijs, door ineenvlechten van decimale ontwikkelingen, dat elk eindig aantal onafhankelijke variabelen "mit Spielraum $\geqq 0$ und $\leqq 1$" zich tot één variabele met dezelfde grenzen laat reduceren.

Antwoord van Dedekind

Dat gaat mis wegens het bestaan van verschillende ontwikkelingen.

Een antwoord

Karte : Poststempel 23.6.77.

U hebt gelijk, maar het bezwaar geldt alleen het bewijs, gelukkig niet de stelling. Over een paar dagen komt er een uitgebreidere brief.

Een antwoord

Halle 25ten Juni 1877.

Een lange brief (ruim vijf bladzijden in het boekje): een sluitend bewijs met behulp van kettingbreuken.

$$
\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{P} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{kettingbreuken}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{vlechten}\uparrow\text{ of splitsen}\downarrow"] \\
{[0,1]^n} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbb{P}^n \arrow[r, leftrightarrow] & (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n
\end{tikzcd}
$$

Gevolgen voor dimensie

Cantor: dit heeft gevolgen voor de meetkunde; iedereen zegt dat je n onafhankelijke coördinaten nodig hebt om n-dimensionale verzamelingen te beschrijven en vindt dat vanzelfsprekend. Ik zie daar een denkfout.

Dedekind: uw bijecties zijn niet continu en ik denk dat men het in de (differentiaal)meetkunde over continue afbeeldingen moet hebben.

Cantor: zeker, maar ik bedoelde dat velen het vanzelfsprekend vinden dat men onder alle omstandigheden n onafhankelijke coördinaten nodig heeft.
Ik ben het er mee eens dat het waarschijnlijk is dat de beperking tot continue afbeeldingen wel n onafhankelijke coördinaten nodig maakt. Maar ik zie nog niet hoe dat te bewijzen, en het lijkt mij heel moeilijk.

Gevolgen voor dimensie

Brouwer (ruim dertig jaar later): jullie hadden gelijk, continue bijecties laten de dimensie invariant.

Wat Cantor deed

In de jaren ’80 (van de 19de eeuw) deed Cantor veel onderzoek aan de structuur van deelverzamelingen van de Euclidische ruimten $\mathbb{R}^n$.

Hij ontwikkelde in feite de topologie van de reële rechte.

Hij besloot een reeks van zes artikelen met de stelling dat er voor elke *oneindige, gesloten* deelverzameling G van $\mathbb{R}$ twee mogelijkheden zijn:

- G is even groot als $\mathbb{N}$, of
- G is even groot als $\mathbb{R}$.

En hij kondigde aan deze stelling voor alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ te zullen bewijzen. (Daar gaan we het volgende week over hebben.)

Een ander bewijs

Een ander bewijs van wat?
Van het bestaan van oneindige verzamelingen die groter zijn dan $\mathbb{N}$.

In 1890/91 publiceerde hij *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* (doorklikken naar pagina 75)

Doel: een veel eenvoudiger bewijs geven van het bestaan van oneindige verzamelingen die niet even groot zijn als $\mathbb{N}$, *zonder gebruik van irrationale getallen*.

Het bewijs

Hoe gaat dat bewijs?

Men neme twee verschillende letters, zeg m en w, en beschouwe de verzameling M van elementen

$$E = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots)$$

met oneindig veel coördinaten, waarbij elke coördinaat gelijk is aan m of w.

Tot M behoren bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} E^I &= (m, m, m, m, \ldots), \\ E^{II} &= (w, w, w, w, \ldots), \\ E^{III} &= (m, w, m, w, \ldots). \end{aligned}$$

Ik beweer dat M niet even groot is als $\mathbb{N}$.

Het bewijs

Dit volgt uit de volgende stelling.

Als E_1, E_2, ..., E_ν, ... één of andere enkelvoudig oneindige rij elementen van M is, dan is er altijd een element E_0 van M dat met geen enkele E_ν overeenkomt.

Ten bewijze zij

$$\begin{aligned}
&E_1 = (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots),\\
&E_2 = (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots),\\
&\ldots\ldots\\
&E_\mu = (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots),\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Hier zijn de $a_{\mu,\nu}$ gelijk aan m of w.

Het bewijs

We maken nu een rij b_1, b_2, ..., b_ν, ... en wel zó dat b_ν ook gelijk is aan m of w en *ongelijk* aan $a_{\nu,\nu}$.

Is dus $a_{\nu,\nu} = m$, dan is $b_\nu = w$, en is $a_{\nu,\nu} = w$, dan is $b_\nu = m$.

Bekijken we nu het element

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

dan zien we zonder meer dat de gelijkheid

$$E_0 = E_\mu$$

voor geen enkele positieve gehele μ op kan treden, want dan zou in het bijzonder $b_\mu = a_{\mu,\mu}$ gelden hetwelk door de definitie van b_μ uitgesloten is.

Grotere gevolgen

Cantor:

Het bewijs is niet alleen opmerkelijk door zijn eenvoud maar ook omdat het laat zien dat er geen grootste oneindigheid is.
Bij elke verzameling L kunnen we zo een verzameling M maken die echt groter is.

Laat, bijvoorbeeld, L een lineair continuum zijn, zeg het interval $[0, 1]$.
Laat M de verzameling van alle functies op L zijn die alleen de waarden 0 of 1 aannemen.

Grotere gevolgen

Dan bevat M een deelverzameling die even groot is als L.
Koppel namelijk elke x in L aan de functie f_x die voldoet aan $f_x(x) = 1$, en $f_x(t) = 0$ als $t \neq x$.
Dan is $\{f_x : x \in L\}$ dus even groot als L.

Aan de andere kant als $\{(x, \varphi_x) : x \in L\}$ een koppeling is tussen L en een deelverzameling van M, definieer dan $\psi \in M$ door $\psi(x) = 1 - \varphi_x(x)$ voor alle x.
En dus, als eerder, geldt $\psi \neq \varphi_x$ voor alle x.

We concluderen dat M strict groter is dan L.