24/04/2024

1 PROBLEMEN MET DECIMALEN

CANTOR'S CONSTRUCTIE VAN EEN BIJECTIE TUSSEN $[0,1]$ EN HET VIERKANT $[0,1]^2$ GING ALS VOLGT

NEEM x IN $[0,1]$ EN SCHRIJF x ALS <u>ONEINDIGE</u> "DECIMAALBREUK":

$$x = \alpha_1 \cdot \frac{1}{10} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{100} + \dots + \alpha_\nu \cdot \frac{1}{10^\nu} + \dots$$

MET ALLE α_ν IN $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

CANTOR KIEST DUS ALTIJD VOOR ONEINDIG VEEL NEGENS:

NIET $\frac{1}{2} = 0{,}5$ MAAR $\frac{1}{2} = 0.4999\dots$

UIT TWEE GETALLEN

$$x_1 = \alpha_{1,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{1,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{1,\nu} \cdot \frac{1}{10^\nu} + \dots$$

$$x_2 = \alpha_{2,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{2,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{2,\nu} \cdot \frac{1}{10^\nu} + \dots$$

MAKEN WE DAN

$$y = \alpha_{1,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{2,1} \cdot \frac{1}{10^2} + \alpha_{1,2} \cdot \frac{1}{10^3} + \alpha_{2,2} \cdot \frac{1}{10^4} + \dots + \alpha_{1,\nu} \cdot \frac{1}{10^{2\nu-1}} + \alpha_{2,\nu} \cdot \frac{1}{10^{2\nu}} + \dots$$

EN HIER IS DE BIJECTIE

DEDEKIND: DE AFBEELDING IS VERRE VAN SURJECTIEF.

GEEN ENKELE Y VAN DE VORM

$$0{,}5\alpha_2 0 \alpha_4 0 \alpha_5 0 \alpha_6 0 \alpha_7 \dots$$

WORDT ZO AAN EEN PAAR (x_1, x_2) GEKOPPELD.

CANTOR: DAT KLOPT EN REPAREREN ZIET ER LASTIG UIT.

2 WAT BIJECTIES OM MEE TE OEFENEN

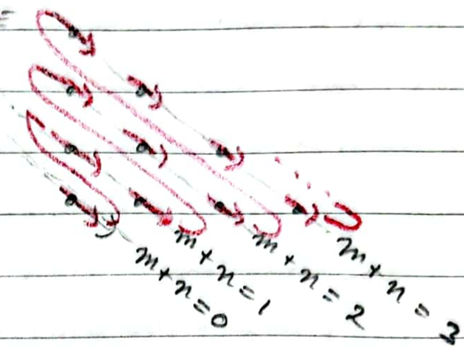
a) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(m, n) \longmapsto 2^m \cdot (2n+1) - 1$

b) $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$(m, n) \longmapsto \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + m.$

PLAATJE



c) $h: \mathbb{N} \longrightarrow \{F : F \subseteq \mathbb{N}, F \text{ IS EINDIG}\}$

$0 \longmapsto \emptyset$

$1 \longmapsto \{0\}$

$2 \longmapsto \{1\}$

$3 \longmapsto \{0, 1\}$

$4 \longmapsto \{2\}$

$5 \longmapsto \{0, 2\}$

$6 \longmapsto \{1, 2\}$

$7 \longmapsto \{0, 1, 2\}$

$8 \longmapsto \{3\}$

$h(m)$ BESTAAT UIT DE POSITIES VAN DE 1-EN IN DE BINAIRE ONTWIKKELING VAN m.

$0 = 0;\ 1 = 2^0 \quad 2 = 2^1 \quad 3 = 2^0 + 2^1 \quad 4 = 2^2$

$5 = 2^0 + 2^2 \quad 6 = 2^1 + 2^2 \quad 7 = 2^0 + 2^1 + 2^2 \quad 8 = 2^3$

DIT LEVERT DUS EEN AFTELLING VAN DE FAMILIE VAN ALLE <u>EINDIGE</u> DEELVERZAMELINGEN VAN $\mathbb{N}$

d) $i: \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$

$x \longmapsto \dfrac{x}{1+|x|}$

MAAK DE INVERSE VAN DEZE BIJECTIE

$(-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$

$y \longmapsto ??$

e) $j: (-1, 1) \longrightarrow [-1, 1)$

$-(2^{(n+1)}) \longmapsto -(2^n)$ $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad (-\frac{1}{2} \mapsto -1,\ -\frac{1}{4} \mapsto -\frac{1}{2}, \ldots)$

$x \longmapsto x$ $\quad$ ANDERS

f) $k : [-1,1) \longrightarrow [-1,1]$ ZELFDE IDEE

CONCLUSIE: $\mathbb{R}$, $(-1,1)$, $[-1,1)$, $[-1,1]$
ALLEMAAL EVEN GROOT.

3 DE EERSTE STAP IN CANTOR'S BEWYS DAT ALLE KUBUSSEN EVEN GROOT ZIJN.
EEN BIJECTIE TUSSEN $[0,1]$ EN $\mathbb{P} = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ DUS.

- TEL $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ AF: $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$
- NEEM EEN RIJ GETALLEN IN $\mathbb{P}$: $\langle p_n : n \in \mathbb{N} \rangle$
  BYVOORBEELD $p_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^{-n} \quad (= 2^{-n-\frac{1}{2}})$
- DEFINIEER NU

$$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}$$
$$\left.\begin{array}{l} q_n \longmapsto p_{2n} \\ p_n \longmapsto p_{2n+1} \end{array}\right\} \text{HILBERT HOTEL}$$
$$x \longmapsto x \quad \text{ANDERS}$$

DIT IS EEN BIJECTIE [GA NA]

- VERDER IS OOK

$$f^n : [0,1]^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f(x_1), \dots, f(x_n))$$

EEN BIJECTIE [GA NA]

- DUS HET VOLSTAAT EEN BIJECTIE, ZEG g, TUSSEN $\mathbb{P}$ EN $\mathbb{P}^n$ TE MAKEN.
- WANT DAN SCHAKELEN WE ALLES AAN ELKAAR TOT EEN BIJECTIE $[0,1] \to [0,1]^n$.

$$[0,1] \longleftrightarrow \mathbb{P} \longleftrightarrow \mathbb{P}^n \longleftrightarrow [0,1]^n.$$

4 TWEEDE STAP IN HET BEWIJS

SCHUIF HET PROBLEEM NOG EENMAAL OP, MET GEBRUIK VAN EEN WELBEKENDE NOTIE, DIE VAN DE KETTINGBREUKEN.

ELK IRRATIONAAL GETAL IN $(0,1)$ BEPAALT EEN RIJ NATUURLIJKE GETALLEN, ONGELIJK AAN 0, EN OMGEKEERD.

$$x \sim [a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$$

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

(ZIE DE APPENDIX VAN HET DICTAAT VERZAMELINGENLEER)

HIER WERKT HET VLECHT- OF SPLITSIDEE PRIMA OMDAT WE HIER EEN BIJECTIE HEBBEN TUSSEN $\mathbb{P}$ EN DE VERZAMELING VAN ALLE RIJEN NATUURLIJKE GETALLEN (ONGELIJK AAN 0).

$$(x \sim [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots])$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \sim [a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots] \\ x_2 \sim [a_2, a_4, a_6, a_8, \ldots] \end{pmatrix}$$

5 REPARATIE VAN HET DECIMALENBEWYS.
EEN COMBINATIE VAN DE TWEE STAPPEN IN HET GEPUBLICEERDE BEWYS.

a) EEN BIJECTIE TUSSEN $[0,1]$ EN $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^{\mathbb{N}}$
(DE VERZAMELING VAN ALLE RYEN CYFERS).

- ELKE RY BEPAALT EEN GETAL IN $[0,1]$.
$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots) \longmapsto$
$(0, a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \ldots$ INFORMEEL)
$a_1 \cdot 10^{-1} + a_2 \cdot 10^{-2} + a_3 \cdot 10^{-3} + a_4 \cdot 10^{-4} + \ldots$
FORMEEL.
- ELK GETAL IN $[0,1]$ WORDT DOOR TEN MINSTE ÉÉN RY BEPAALD.
- SOMMIGE GETALLEN DOOR TWEE RYEN
$\frac{3}{10}$: $(3,0,0,0,0,\ldots)$ EN $(2,9,9,9,9,\ldots)$
- VERDEEL $[0,1]$ IN TWEE DELEN
E : DE x-EN DIE DOOR PRECIES ÉÉN RY BEPAALD WORDEN
T : DE x-EN DIE DOOR PRECIES TWEE RYEN BEPAALD WORDEN.
- T IS AFTELBAAR: TWEE RYEN DIE EENZELFDE GETAL BEPALEN LIGGEN VAST MET EINDIG VEEL CYFERS:

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, 0, 0, 0, 0, \ldots & a_n \neq 0 \\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, 9, 9, 9, 9, \ldots \end{cases}$$

WE HEBBEN 9 PAREN BY $n=1$
90 PAREN BY $n=2$
900 PAREN BY $n=3$
⋮
$9 \times 10^{n-1}$ PAREN IN HET ALGEMEEN

- DUS T IS AFTELBAAR
  EN DE VERZAMELING R VAN RIJEN
  DIE BIJ DE GETALLEN UIT T HOREN OOK
- WE HEBBEN NU
  $[0,1]$ ---: E EN T
  $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^{\mathbb{N}}$: S EN R
  HET COMPLEMENT VAN R
- E EN S ZIJN AL GEKOPPELD
- T EN R KUNNEN GEKOPPELD WORDEN
- SAMEN GEEFT DIT DE BIJECTIE DIE WE ZOEKEN.

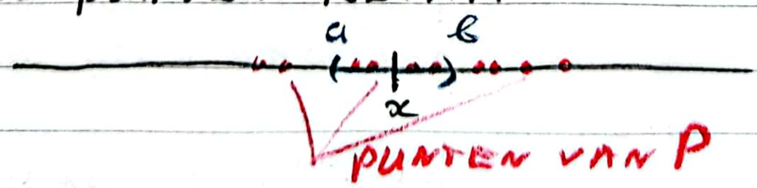
b) NU KUNNEN WE VLECHTEN/SPLITSEN ALS IN HET EERSTE BEWIJS

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \longleftrightarrow & \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^{\mathbb{N}} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ [0,1]^n & \longleftrightarrow & \left(\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^{\mathbb{N}}\right)^n \end{array}$$

6 GESLOTEN VERZAMELINGEN IN $\mathbb{R}$

STEL $P \subseteq \mathbb{R}$

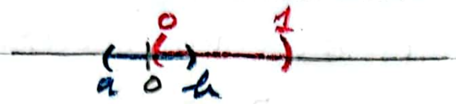
WE NOEMEN x EEN <u>VERDICHTINGSPUNT</u> VAN P ALS VOOR <u>ELK</u> INTERVAL (a,b) OM x DE DOORSNEDE $(a,b) \cap P$ ONEINDIG VEEL PUNTEN BEVAT.



24/04/2024

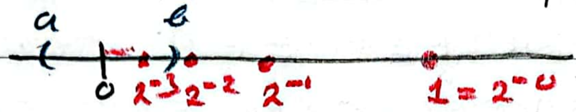
VOORBEELDEN

- 0 is verdichtingspunt van $(0,1)$



$(a,b) \cap (0,1) = (0,b)$

- Elk punt van $\mathbb{R}$ is verdichtingspunt van $\mathbb{Q}$ (de verzameling rationale getallen). Want elk open interval bevat oneindig veel rationale getallen
- 0 is verdichtingspunt van $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$



0 is verdichtingspunt van $[0,1]$ en van $[-1,1]$.

Een verdichtingspunt van P kan tot P behoren of niet.

Notatie P' is de verzameling van alle verdichtingspunten van P

- $(0,1)' = [0,1]$
- $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$
- $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}' = \{0\}$

We noemen P een gesloten verzameling als $P' \subseteq P$; dus als elk verdichtingspunt van P een element van P is.

- $(0,1)$ en $\mathbb{Q}$ zijn dus niet gesloten
- $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ is niet gesloten

$\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ is dat wel.

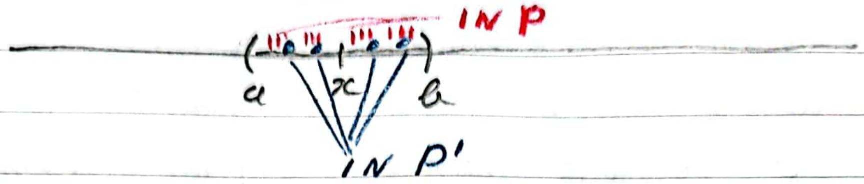
24/04/2024

BELANGRYK FEIT

VOOR ELKE P IS P' EEN GESLOTEN VERZAMELING

BEWYS: STEL x IS EEN VERDICHTINGSPUNT VAN P', TE BEWYZEN $x \in P'$, DAT WIL ZEGGEN x IS EEN VERDICHTINGSPUNT VAN P

LAAT (a,b) EEN INTERVAL OM x ZYN



ER IS ZEKER EEN $z \in P'$ MET $z \in (a,b)$ (ONEINDIG VEEL MAAR EENTJE IS GENOEG).

OMDAT $z \in (a,b)$ VOLGT NU DAT (a,b) ONEINDIG VEEL PUNTEN VAN P BEVAT.

GEVOLG $P' \supseteq P'' \supseteq P''' \supseteq P^{iv} \supseteq \ldots$

EEN DALENDE RY AFGELEIDE VERZAMELINGEN.

CANTOR NOEMDE P PERFECT ALS P NIET LEEG IS EN VOLDOET AAN $P = P'$

- $[0,1]$ IS PERFECT
- $\{0\} \cup \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ IS NIET PERFECT
  DE AFGELEIDE VERZAMELING IS $\{0\}$
  DE TWEEDE AFGELEIDE IS LEEG: $\emptyset$
- DE (WELBEKENDE?) CANTORVERZAMELING IS PERFECT, OOK AL ZIT ER GEEN ENKEL INTERVAL IN.

CANTORS BEWYS VOOR GESLOTEN VERZAMELINGEN

STEL P IS GESLOTEN

STEL DE RY AFGELEIDEN OP

$P, P', P'', \ldots, P^{(n)}, \ldots$

ER IS EEN INDEX α ZÓ DAT $P^{(\alpha)} = P^{(\alpha+1)}$

DAT WIL ZEGGEN $P^{(\alpha)} = (P^{(\alpha)})'$

[HIERTOE ONTWIKKELDE CANTOR DE THEORIE VAN ORDINAALGETALLEN]

GEVAL 1 $P^{(\alpha)} = \emptyset$

DAN VOLGT UIT DIE ~~THEORIE DAT~~ DAT P AFTELBAAR MOET ZYN

GEVAL 2 $P^{(\alpha)} \neq \emptyset$

DAN IS $P^{(\alpha)}$ PERFECT EN DAN IS ER EEN BIJECTIE TUSSEN $P^{(\alpha)}$ EN $\mathbb{R}$.

IN HET DICTAAT VERZAMELINGENLEER STAAT EEN KORTE SCHETS VAN DE THEORIE VAN DE AFGELEIDE VERZAMELINGEN EN BOVENSTAANDE ANALYSE.