Diagonaalargument en de Continuümhypothese

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 24 april 2024

Een nieuwe vraag

Halle d. 5^{ten} Januar 74.
Lässt sich eine Flache (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Puncte der Fläche ein Punct der Linie und umgekehrt zu jedem Puncte der Linie ein Punct der Fläche gehört?
Mir will es im Augenblick noch scheinen, dass die Beantwortung dieser Fragen, — obgleich man auch hier zum Nein sich so gedrängt sieht, dass man de Beweis dazu fast für überflüssig halte möchte, — grosse Schwierigkeiten hat.

Een antwoord

Halle d. 20^{ten} Juni 1877.

Een vrij lange brief met een bewijs, door ineenvlechten van decimale ontwikkelingen, dat elk eindig aantal onafhankelijke variabelen "mit Spielraum $\geqq 0$ und $\leqq 1$" zich tot één variabele met dezelfde grenzen laat reduceren.

Antwoord van Dedekind

Dat gaat mis wegens het bestaan van verschillende ontwikkelingen.

In de aantekeningen een uitleg van het probleem in het bewijs.

Een antwoord

Karte : Poststempel 23.6.77.

U hebt gelijk, maar het bezwaar geldt alleen het bewijs, gelukkig niet de stelling. Over een paar dagen komt er een uitgebreidere brief.

Halle 25$^{\text{ten}}$ Juni 1877.

Een lange brief (ruim vijf bladzijden in het boekje): een sluitend bewijs met behulp van kettingbreuken.

Een antwoord

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
{[0,1]} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{(aantekeningen)}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{P} \arrow[r, leftrightarrow, "\text{kettingbreuken}"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[d, leftrightarrow, "\text{vlechten}\uparrow\text{ of splitsen}\downarrow"] \\
{[0,1]^n} \arrow[r, leftrightarrow] & \mathbb{P}^n \arrow[r, leftrightarrow] & (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n
\end{tikzcd}
$$

Notatie:
$\mathbb{P}$ is de verzameling irrationale getallen in het interval $[0,1]$.
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ is de verzameling van alle rijen natuurlijke getallen
(in dit bewijs en alleen hier doet 0 niet mee).
Het bewijs is vrij technisch, en vergt kennis van kettingbreuken.
Er staat een schets in de aantekeningen.

Gevolgen voor dimensie

Cantor: dit heeft gevolgen voor de meetkunde; iedereen zegt dat je n onafhankelijke coördinaten nodig hebt om n-dimensionale verzamelingen te beschrijven en vindt dat vanzelfsprekend. Ik zie daar een denkfout.

Dedekind: uw bijecties zijn niet continu en ik denk dat men het in de (differentiaal)meetkunde over continue afbeeldingen moet hebben.

Cantor: zeker, maar ik bedoelde dat velen het vanzelfsprekend vinden dat men onder alle omstandigheden n onafhankelijke coördinaten nodig heeft.
Ik ben het er mee eens dat het waarschijnlijk is dat de beperking tot continue afbeeldingen wel n onafhankelijke coördinaten nodig maakt. Maar ik zie nog niet hoe dat te bewijzen, en het lijkt mij heel moeilijk.

Gevolgen voor dimensie

Brouwer (ruim dertig jaar later): jullie hadden gelijk, continue bijecties laten de dimensie invariant.

Wat Cantor deed

In de jaren '80 (van de 19de eeuw) deed Cantor veel onderzoek aan de structuur van deelverzamelingen van de Euclidische ruimten $\mathbb{R}^n$.

Hij ontwikkelde in feite de topologie van de reële rechte.

Hij besloot een reeks van zes artikelen met de stelling dat er voor elke *oneindige, gesloten* deelverzameling G van $\mathbb{R}$ twee mogelijkheden zijn:

- G is even groot als $\mathbb{N}$, of
- G is even groot als $\mathbb{R}$.

En hij kondigde aan deze stelling voor alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ te zullen bewijzen. Straks meer hierover.

Een ander bewijs

Een ander bewijs van wat?
Van het bestaan van oneindige verzamelingen die groter zijn dan $\mathbb{N}$.

In 1890/91 publiceerde hij *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* (doorklikken naar pagina 75)

Doel: een veel eenvoudiger bewijs geven van het bestaan van oneindige verzamelingen die niet even groot zijn als $\mathbb{N}$, *zonder gebruik van irrationale getallen*.

Het bewijs

Hoe gaat dat bewijs?

Men neme twee verschillende letters, zeg m en w, en beschouwe de verzameling M van elementen

$$E = (x_1, x_2, \ldots, x_\nu, \ldots)$$

met oneindig veel coördinaten, waarbij elke coördinaat gelijk is aan m of w.

Tot M behoren bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} E^{I} &= (m, m, m, m, \ldots), \\ E^{II} &= (w, w, w, w, \ldots), \\ E^{III} &= (m, w, m, w, \ldots). \end{aligned}$$

Ik beweer dat M niet even groot is als $\mathbb{N}$.

Het bewijs

Dit volgt uit de volgende stelling.

Als E_1, E_2, ..., E_ν, ... één of andere enkelvoudig oneindige rij elementen van M is, dan is er altijd een element E_0 van M dat met geen enkele E_ν overeenkomt.

Ten bewijze zij

$$
\begin{aligned}
E_1 &= (a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,\nu}, \ldots),\\
E_2 &= (a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,\nu}, \ldots),\\
\ldots \quad & \ldots\\
E_\mu &= (a_{\mu,1}, a_{\mu,2}, \ldots, a_{\mu,\nu}, \ldots),\\
\ldots \quad & \ldots
\end{aligned}
$$

Hier zijn de $a_{\mu,\nu}$ gelijk aan m of w.

Het bewijs

We maken nu een rij $b_1, b_2, \ldots, b_\nu, \ldots$ en wel zó dat b_ν ook gelijk is aan m of w en *ongelijk* aan $a_{\nu,\nu}$.

Is dus $a_{\nu,\nu} = m$, dan is $b_\nu = w$, en is $a_{\nu,\nu} = w$, dan is $b_\nu = m$.

Bekijken we nu het element

$$E_0 = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$$

dan zien we zonder meer dat de gelijkheid

$$E_0 = E_\mu$$

voor geen enkele positieve gehele μ op kan treden, want dan zou in het bijzonder $b_\mu = a_{\mu,\mu}$ gelden, hetwelk door de definitie van b_μ uitgesloten is.

Grotere gevolgen

Cantor:

Het bewijs is niet alleen opmerkelijk door zijn eenvoud maar ook omdat het laat zien dat er geen grootste oneindigheid is.
Bij elke verzameling L kunnen we zo een verzameling M maken die echt groter is.

Laat, bijvoorbeeld, L een lineair continuum zijn, zeg het interval $[0, 1]$.
Laat M de verzameling van alle functies op L zijn die alleen de waarden 0 of 1 aannemen.

Grotere gevolgen

Dan bevat M een deelverzameling die even groot is als L.
Koppel namelijk elke x in L aan de functie f_x die voldoet aan $f_x(x) = 1$, en $f_x(t) = 0$ als $t \neq x$.
Dan is $\{f_x : x \in L\}$ dus even groot als L.

Aan de andere kant als $\{(x, \varphi_x) : x \in L\}$ een koppeling is tussen L en een deelverzameling van M, definieer dan $\psi \in M$ door $\psi(x) = 1 - \varphi_x(x)$ voor alle x.
En dus, als eerder, geldt $\psi \neq \varphi_x$ voor alle x.

We concluderen dat M strict groter is dan L.

Paradoxale verzamelingen

De "verzameling, V, van alle verzamelingen" leidt tot een tegenspraak.

Maak namelijk de bijbehorende M, als boven.
Dan volgt $M \subseteq V$ terwijl M strict groter is dan V ...

Cantor was zich hiervan bewust, maar zag geen goede uitweg.
Hij probeerde iets met 'eigenlijke' en 'oneigenlijke' verzamelingen maar dat leidde tot niets.

Russell: neem $R = \{x : x \notin x\}$
dan geldt: $R \in R$ dan en slechts dan als $R \notin R$ ...

De formulering

Aan het eind van het artikel waarin Cantor bewijs dat het interval $[0,1]$ en de kubussen $[0,1]^n$ allemaal even groot zijn, komt hij met wat opmerkingen.

Men kan zelfs bewijzen dat $[0,1]^{\mathbb{N}}$ en $[0,1]$ even groot zijn.
Er zijn dus evenveel reële getallen als er rijen reële getallen zijn.

Er we hebben een manier gevonden om alle (willekeurige) deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ in groepen te verdelen.
$X \sim Y$ betekent dat X en Y even groot zijn
Elke X bepaalt een groep: $[X] = \{A : A \sim X\}$

De formulering

Voorbeelden:

- $\big[\{0\}\big] = \big\{\{x\} : x \in \mathbb{R}\big\}$ bestaat uit alle éénpuntsverzamelingen
- $\big[\{\sqrt{2}, \pi\}\big]$ bestaat uit alle tweepuntsverzamelingen
- $\big[\{i : 0 \leqslant i < n\}\big]$ bestaat uit alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ met n elementen $(n \in \mathbb{N})$.
- $[\mathbb{N}]$ bestaat uit alle aftelbaar oneindige verzamelingen
- $[\mathbb{R}]$ bestaat uit alle verzamelingen die even groot zijn als $\mathbb{R}$ zelf, daar zitten $\mathbb{P}$, $[0, 1]$, $[0, 1)$, $(0, 1)$, ... in

De formulering

Belangrijke opmerking: als X en Y deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn dan geldt

- òf $[X] = [Y]$, namelijk als $X \sim Y$,
- òf $[X] \cap [Y] = \emptyset$, namelijk als $X \not\sim Y$.

We weten dat $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$, en dus dat $[\mathbb{N}]$ en $[\mathbb{R}]$ verschillend zijn.

Cantor concentreerde zich op de oneindige verzamelingen, en noemde onze groepen *klassen*.

De formulering

Voor de oneindige verzamelingen:

Continuümhypothese (1878)

Durch ein Induktionsverfahren, auf dessen Darstellung wir hier nicht näher eingehen, wird der Satz nahe gebracht, daß die Anzahl der nach diesem Einteilungsprinzip sich ergebenden Klassen linearer Mannigfaltigkeiten eine endliche und zwar, daß sie gleich *Zwei* ist.

Cantor beweert met andere woorden dat het aantal klassen oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ eindig is, en niet alleen dat, maar dat dat aantal gelijk is aan twee.

Kortom: als X een oneindige deelverzameling van $\mathbb{R}$ is dan geldt $X \sim \mathbb{N}$ of $X \sim \mathbb{R}$.

De tijdlijn

De hierboven genoemde zes artikelen verschenen in 1879–1884, dus na het artikel met de formulering van de bewering/het vermoeden.

In die reeks werkte Cantor hard om de structuur van deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ te ontrafelen, met, zoals al opgemerkt dit resultaat.

Stelling

Eine unendliche abgeschlossene lineare Punktmenge hat entweder die erste Mächtigkeit oder sie hat die Mächtigkeit des Linearkontinuums, sie kann also entweder in der Form Funkt. (ν) *oder in der Form Funkt.* (x) *gedachte werden, wo* ν *eine unbeschränkt veränderliche endliche ganze Zahl und* x *eine unbeschränkt veränderliche beliebige Zahl de Intervalls* $(0 \ldots 1)$ *ist.*

De tijdlijn

Continuümhypothese (1884)

Daß dieser merkwürdige Satz eine weitere Gültigkeit auch für *nicht abgeschlossene* lineare Punktmengen und ebenso auch für alle n-dimensionalen Punktmengen hat, wird in späteren Paragraphen bewiesen werden.

De reeks artikelen stopte hier. Waarschijnlijk omdat Cantor niet verder kwam met het bewijs.
In 1932 noteerde Zermelo, in een commentaar in de verzamelde werken, dat het probleem een halve eeuw na de formulering nog steeds niet was opgelost.

Hilbert

In 1900 gaf David Hilbert een lezing op het Internationale Congres van Wiskundigen in Parijs waarin hij een aantal problemen formuleerde (voor de twintigste eeuw).

Het eerste probleem was

Cantor's Problem on the Cardinality of the Continuum

met als deelvraag: is er een welordening van $\mathbb{R}$?

Alexandroff en Hausdorff

Generalizeerden in 1916 Cantor's stelling over gesloten verzamelingen tot een veel ruimere klassen van deelverzamelingen: de Borel-verzamelingen.

Dit en andere resultaten over deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ vormen nu een brede discipline die *Beschrijvende Verzamelingenleer* heet.

Die werd in het begin gedreven door de wens de Continuümhypothese te bewijzen.

De vuistregel was lang: een verzameling met een 'mooie' beschrijving zit in $[\mathbb{N}]$ of in $[\mathbb{R}]$.
Dus we gaan proberen alle deelverzamelingen een 'mooie' beschrijving te geven.

Sierpiński

Wacław Sierpiński schreef een boek, *Hypothèse du continu*, waarin hij vele equivalenten en gevolgen van de Continuümhypothese in kaart bracht.

Sierpiński was één van de vroege beoefenaren van de Verzamelingenleer die ook verantwoordelijk was voor veel van de resultaten in het boek.

Die equivalenten en gevolgen waren vaak heel interessant en de Continuümhypothese leek het Keuzeaxioma achterna te gaan wat betreft acceptatie.

Gödel

Kurt Gödel publiceerde in 1940 *The Consistency of the Continuum Hypothesis*.

Daarin bewees hij dat toevoegen van het Keuzeaxioma en de Continuümhypothese aan de ‘gewone’ axioma’s van de Verzamelingenleer niet tot tegenspraken kan leiden, aangenomen dat die gewone axioma’s niet tot tegenspraken leiden.

Het bewijs is niet triviaal.

Cohen

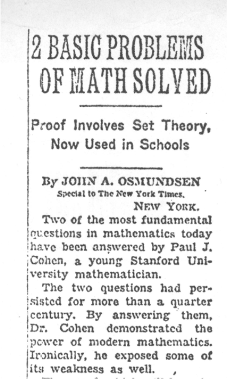
In 1963 bewees Cohen het complementaire resultaat.

- Het Keuzeaxioma is niet uit de ‘gewone’ axioma’s af te leiden.
- De Continuümhypothese is niet uit de ‘gewone’ axioma’s plus het Keuzeaxioma af te leiden.

Ook dat bewijs is verre van triviaal.

Cohen

Voorpagina *New York Times* (14-11-1963)



2 BASIC PROBLEMS OF MATH SOLVED

Proof Involves Set Theory, Now Used in Schools

By JOHN A. OSMUNDSEN
Special to The New York Times.

NEW YORK.

Two of the most fundamental questions in mathematics today have been answered by Paul J. Cohen, a young Stanford University mathematician.

The two questions had persisted for more than a quarter century. By answering them, Dr. Cohen demonstrated the power of modern mathematics. Ironically, he exposed some of its weakness as well.