① Een concrete(re) voorstelling van $Z(\aleph_0)$.

We hebben een welgeordende verzameling nodig, zeg $(X, \prec)$, met de volgende twee eigenschappen:

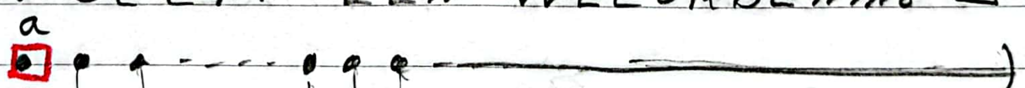
① X is <u>overaftelbaar</u>, en

② Als $x \in X$ dan is
$$\{y : y \in X \text{ en } y \prec x\}$$
aftelbaar.

Dit zijn namelijk de karakterizerende eigenschappen van $Z(\aleph_0)$, <u>op isomorfie na</u>.

Een snelle manier om zo'n welgeordende verzameling te maken is als volgt.

Pas de welordeningsstelling toe op $\mathbb{R}$ (het keuzeaxioma dus).
Dit geeft een welordening $\lhd$ van $\mathbb{R}$.



Noem het minimum van $\mathbb{R}$ t.o.v. $\lhd$ even a.
Verander de ordening een beetje:

Definieer $\prec$ door

(i) $x \prec y$ als $x \lhd y$ èn $x \neq a$, en

(ii) $x \prec a$ voor alle $x \neq a$.

Dus laat $\lhd$ grotendeels intact maar maak a het <u>maximum</u> van $\mathbb{R}$ ten opzichte van $\prec$.

HET RESULTAAT: EEN WELORDENING VAN $\mathbb{R}$ MET EEN PUNT a ZÓ DAT
$\{x : x \in \mathbb{R}$ ÈN $x \prec a\}$
OVERAFTELBAAR IS.
DUS $A = \{x \in \mathbb{R} : \{y : y \prec x\}$ IS OVERAFTELBAAR$\}$
IS NIET LEEG,
DUS: A HEEFT EEN MINIMUM T.O.V. $\prec$
NOEM DAT MINIMUM b.

NEEM NU $X = \{x \in \mathbb{R} : x \prec b\}$
- X IS OVERAFTELBAAR WANT $b \in A$
- X IS WELGEORDEND DOOR $\prec$
- ALS $x \in X$ DAN $x \notin A$,
  OMDAT $b = \min A$,
  EN DUS IS $\{y : y \prec x\}$ AFTELBAAR.

DEZE VERZAMELING KRIJGT VAN CANTOR HET LABEL $\aleph_1$. DUS $\overline{\overline{X}} = \aleph_1$.

CANTOR'S CONTINUÜMHYPOTHESE IS EQUIVALENT MET $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \mathfrak{c}$.
VANDAAR DE HUIDIGE FORMULERING

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

NB MEN KAN EEN KOPIE VAN $Z(\aleph_1)$ MAKEN ZONDER HET KEUZEAXIOMA AAN TE ROEPEN, MAAR DIE CONSTRUCTIE IS EEN STUK GETRUUKTER.
ZIE OPGAVE 61 VAN HOOFDSTUK 1 IN MIJN DICTAAT VERZAMELINGENLEER OF BLZ 156 E.V. IN HET E-BOEK.

② DE LIMIETEN

• $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ WANT...

ZIJ $\varepsilon > 0$. GEZOCHT $N \in \mathbb{N}$ ZÓ DAT
VOOR ALLE $n \in \mathbb{N}$ MET $n \geq N$ GELDT
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$
BEKIJK ε^{-1}. ER IS EEN $N \in \mathbb{N}$ ZÓ DAT
$$N > \varepsilon^{-1}$$
WAAROM? DIT IS DE ARCHIMEDISCHE EIGENSCHAP VAN $\mathbb{R}$ EN EEN GEVOLG VAN DE VOLLEDIGHEID VAN $\mathbb{R}$.
STEL NAMELIJK DAT VOOR ALLE $N \in \mathbb{N}$ GELDT DAT $N \leq \varepsilon^{-1}$.
MAAK DAN $A = \{x : \text{ER IS EEN } n \in \mathbb{N} \text{ MET } x \leq n\}$
EN $B = \{x : \text{VOOR ALLE } n \in \mathbb{N} \text{ GELDT } n < x\}$.
DE VOLLEDIGHEID VAN $\mathbb{R}$ (VOLGENS DEDEKIND) GEEFT ONS EEN $a \in \mathbb{R}$ ZÓ DAT
$$A = \{x : x \leq a\} \text{ EN } B = \{x : a < x\}$$
OF
$$A = \{x : x < a\} \text{ EN } B = \{x : a \leq x\}$$
MAAR : - A HEEFT GEEN MAXIMUM
WANT ALS $x \in A$ EN $x \leq n$ DAN GELDT $x + 1 \leq n + 1$ EN DUS OOK $x + 1 \in A$
EN $x < x + 1$.
- B HEEFT GEEN MINIMUM
ALS VOOR ALLE $n \in \mathbb{N}$ GELDT $n < x$
DAN GELDT VOOR ELKE n DAT $n + 1 < x$
OFWEL $n < x - 1$
DUS OOK $x - 1 \in B$ EN $x - 1 < x$.
[ZIE OOK HOOFDSTUK 6 VAN "BLIK OP ONEINDIG"]

NEEM DUS EEN $N \in \mathbb{N}$ MET $N > \varepsilon^{-1}$
DAN GELDT VOOR $n \geq N$ DAT

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

OMDAT ZEKER $0 < \frac{1}{n}$ VOOR ALLE $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
VOLGT NU $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ VOOR $n \geq \mathbb{N}$.

- $\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$

WANT $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ EN DE OPMERKING DAT DUS $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| = \left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right|$
REDUCEERT DIT PROBLEEM TOT HET EERSTE.

- $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$

WANT: $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$ EN MET $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$
LIGT HET ANTWOORD $\frac{1}{2}$ VOOR DE HAND
NU NETJES: ANALYSEER EERST

$$\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}$$

BRENG ONDER EEN NOEMER EN TREK AF

$$\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2n - (2n+1)}{2 \cdot (2n+1)} = \frac{-1}{2 \cdot (2n+1)}$$

DUS $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2 \cdot (2n+1)}$ (VOOR ALLE n)
VERDER GELDT VOOR ELKE n DAT

$$n \leq 2n < 2n+1 < 2 \cdot (2n+1)$$

DUS NU: ZIJ $\varepsilon > 0$ EN NEEM $N > \varepsilon^{-1}$
DAN GELDT VOOR $n \geq N$ DAT

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2 \cdot (2n+1)} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon^{-1}.$$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  DIT KOST MEER MOEITE
  - DE RIJ BEGINT STIJGEND $1 < \sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3}$
    EN LIJKT DAN TE DALEN $\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} (= \sqrt[2]{2}) > \sqrt[5]{5} > \cdots$
  - MEN KAN INDERDAAD BEWIJZEN DAT VOOR $n \geq 3$ ALTIJD GELDT
    $$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$$
  - MEN KAN OOK BEWIJZEN DAT
    $$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$
    VOOR ALLE $n \geq 1$.
  - PAS HET BEWIJS VAN $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ AAN OM TE LATEN ZIEN DAT OOK $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$ (NEEM $N > 4\varepsilon^{-2}$).
  - NU VOLGT VIA $|\sqrt[n]{n} - 1| < \frac{2}{\sqrt{n}}$ DAT $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
  - VOOR DE DETAILS ZIE PYTHAGORAS 43 (2003/2004) 18–19. (LINK OP DE WEBSITE/BRIGHTSPACE).

- $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ [BASIS VAN DE NATUURLIJKE LOG.]
  - IN SOMMIGE BOEKEN IS DIT DE DEFINITIE VAN e; HET PROBLEEM IS DAN TE BEWIJZEN DAT DE LIMIET DAADWERKELIJK BESTAAT.
  - ANDERE BOEKEN BEWIJZEN DAT
    $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$
    EN NOEMEN DE GEMEENSCHAPPELIJKE WAARDE DAN e
  - VOLGENDE WEEK [22-05-2024] ZULLEN WE ZIEN HOE DAT ALLEMAAL WERKT.