① BEWYS DAT $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ ALS $|x| < 1$

ⓐ SPECIAAL GEVAL $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

DIT VOLGT UIT EEN (VOOR DE HAND LIGGENDE) ONGELYKHEID: VOOR ALLE $n \in \mathbb{N}$ GELDT

$$n < 2^n$$

$n=0$: $0 < 1$

$n=1$: $1 < 2$

$n=2$: $2 < 4$

INDUCTIEBEWYS:

NEEM AAN DAT $n < 2^n$ IS VASTGESTELD VOOR EEN ZEKERE $n \geq 1$.

DAN VOLGT DAT OOK $n+1 < 2^{n+1}$

IMMERS $n+1 \leq n+n < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$

NU VOLGT DAT $n < 2^n$ VOOR ALLE $n \in \mathbb{N}$.

ZET DE ONGELYKHEID OP ZYN KOP: VOOR $n \geq 1$ GELDT. $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{n}$

ONS BEWYS VAN

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

STELT DUS OOK MEDEEN VAST DAT

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

ⓑ WE LATEN ZIEN: ALS $0 < |x| < 1$ DAN IS ER EEN N ZÓ DAT $|x|^N < \frac{1}{2}$.

- DIT VOLSTAAT WANT BIJ EEN GEGEVEN $\varepsilon > 0$ NEMEN WE EERST EEN $M \in \mathbb{N}$ ZÓ DAT $\left(\frac{1}{2}\right)^m < \varepsilon$ VOOR $m \geq M$

  DAN VOLGT DAT $|x|^{N \cdot M} < \frac{1}{2}^M < \varepsilon$

  EN OMDAT $|x| < 1$ VOLGT DAN $|x|^n < \varepsilon$ VOOR $n \geq N \cdot M$.

- VOOR HET BEWYS KYKEN WE NAAR $\frac{1}{|x|}$ EN TONEN AAN DAT $\left(\frac{1}{|x|}\right)^N > 2$ VOOR EEN ZEKERE N.

- WE SCHRIJVEN $\frac{1}{|x|} = 1 + r$ EN WE BEWIJZEN DAT VOOR ALLE $n \in \mathbb{N}$ GELDT
$$(1+r)^n \geq 1 + nr.$$
- ER GELDT MEER:
$$\text{ALS } r > -1 \text{ DAN } (1+r)^n \geq 1+nr$$

DIT STAAT BEKEND ALS DE ONGELIJKHEID VAN BERNOULLI.

BEWIJS DOOR INDUCTIE:

VOOR $n=0$ EN $n=1$ IS DE ONGELIJKHEID DUIDELIJK
$$(1+r)^0 = 1 = 1+0\cdot r$$
$$(1+r)^1 = 1+1\cdot r$$

INDUCTIESTAP: NEEM AAN DAT VOOR EEN ZEKERE n IS VASTGESTELD DAT
$$(1+r)^n \geq 1+nr$$
WE TONEN AAN DAT DAN OOK
$$(1+r)^{n+1} \geq 1+(n+1)r.$$
INDERDAAD
$$\begin{aligned}(1+r)^{n+1} &= (1+r)^n \cdot (1+r) \\ &\geq (1+nr)\cdot(1+r) \quad [\text{WANT } 1+r>0] \\ &= 1+(n+1)r + nr^2 \\ &\geq 1+(n+1)r \quad [\text{WANT } nr^2 \geq 0]\end{aligned}$$

NB ALS $n \geq 1$ EN $r \neq 0$ VOLGT DUS IETS MEER:
$$(1+r)^{n+1} > 1+(n+1)r \qquad \text{OMDAT } nr^2 > 0$$

- TERUG NAAR $\frac{1}{|x|} = 1+r$

HIER GELDT $r>0$ (WANT $|x|<1$)

LOS NU OP $1+Nr > 2$ NAAR N

DAT WORDT $Nr > 1$

OF $N > \frac{1}{r}$

ZO'N N BESTAAT (ZIE VORIGE WEEK)

VOOR DIE N GELDT $(1+r)^N \geq 1+Nr > 2$

EN DUS $|x|^N = \frac{1}{(1+r)^N} \leq \frac{1}{1+Nr} < \frac{1}{2}$.

② DECIMALE ONTWIKKELINGEN

WE BEKYKEN REËLE GETALLEN TUSSEN 0 EN 1

DIE NOTEREN WE, ZEKER SINDS SIMON STEVIN,
ALS $0,a_1a_2a_3a_4\ldots$

- DE BETEKENIS IS DUIDELYK VOOR EINDIGE RYTJES $a_1, a_2, \ldots, a_n$

  $0,a_1a_2a_3a_4$

  STAAT VOOR $a_1\cdot 10^{-1} + a_2\cdot 10^{-2} + a_3\cdot 10^{-3} + a_4\cdot 10^{-4}$

- VOOR ONEINDIGE RYEN $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ KRYGEN WE

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_i\cdot 10^{-i}$$

DE UITDRUKKING $0,a_1a_2a_3a_4\ldots$ IS EEN INFORMELE SCHRYFWYZE VOOR DIE ONEINDIGE SOM.

FORMEEL: VOOR ELKE FUNCTIE $f: \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \{0,1,2,3,\ldots,9\}$
IS DE RY $\langle f(n)\cdot 10^{-n} : n\in \mathbb{N}\setminus\{0\}\rangle$ SOMMEERBAAR

IMMERS: DE RY PARTIËLE SOMMEN IS STYGEND EN NAAR BOVEN BEGRENSD:

$$f(1)\cdot 10^{-1} + \cdots + f(n)\cdot 10^{-n} \leq \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{n-1}}\right)$$
$$= \frac{9}{10}\cdot\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n} < 1$$

DE SOM NOTEREN WE ALS x_f.

ELK GETAL IN $[0,1]$ IS VAN DE VORM x_f

DEFINIEER VOOR ELKE x EEN FUNCTIE f_x DOOR

$f_x(1) = \max\{i : i\cdot\frac{1}{10} \leq x\}$

$f_x(2) = \max\{i : f_x(1)\cdot\frac{1}{10} + i\cdot\frac{1}{100} \leq x\}$

GEGEVEN $f_x(1)$ TOT EN MET $f_x(n)$

SCHRYF $s_x(n) = f_x(1)\cdot 10^{-1} + \cdots + f_x(n)\cdot 10^{-n}$

EN DEFINIEER

$$f_x(n+1) = \max\{i : s_x(n) + i\cdot 10^{-(n+1)} \leq x\}.$$

VOOR ELKE n GELDT $x - S_x(n) < 10^{-n}$

DUS $x_{f_x} = \sum_{n=1}^{\infty} f_x(n) \cdot 10^{-n} = x$.

SAMENGEVAT:

DE FORMELE DECIMALE ONTWIKKELINGEN ZIJN FUNCTIES VAN $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ NAAR $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ DIE INFORMEEL GENOTEERD WORDEN ALS $0, f(1) f(2) f(3) f(4) \ldots$

[AAN DIE LAATSTE NOTATIE ZIJN WE ZO GEWEND DAT VELEN DIE MET HET GETAL ZELF VEREENZELVIGEN].

③ WAAROM ALLEEN RIJEN?

STEL $f : A \to \mathbb{R}$ IS EEN WILLEKEURIGE FUNCTIE. WAT ZOU DE SOM VAN ALLE FUNCTIEWAARDEN MOETEN ZIJN?

DE BESTE POGING IS ALS VOLGT.

- BEPAAL VOOR ELKE EINDIGE DEELVERZAMELING F VAN A DE SOM VAN $\{f(a) : a \in A\}$ EN NOTEER DIE ALS $\sum_{a \in F} f(a)$.

- DEFINITIE: f IS SOMMEERBAAR ALS EEN GETAL S BESTAAT ZÓ DAT VOOR ELKE $\varepsilon > 0$ EEN EINDIGE VERZAMELING F BESTAAT ZÓ DAT

$$\left| S - \sum_{a \in G} f(a) \right| < \varepsilon$$

VOOR ELKE EINDIGE DEELVERZAMELING G VAN A DIE VOLDOET AAN $F \subseteq G$.

NB HIER WORDT DUS GEEN REKENING MET EEN VOLGORDE GEHOUDEN.

GEVOLG VAN DEZE DEFINITIE:
ALS f SOMMEERBAAR IS DAN IS
DE VERZAMELING $\{a : f(a) \neq 0\}$ AFTELBAAR.
Bewijs:
ER GELDT VOOR ELKE $n \in \mathbb{N}$ DAT
$\{a : |f(a)| > 2^{-n}\}$
EINDIG IS.
NEEM n VAST EN NEEM F EINDIG
ZÓ DAT $|S - \sum_{a \in G} f(a)| < 2^{-(n+1)}$
VOOR ALLE EINDIGE G MET $F \subseteq G$.
NEEM $a \in A \setminus F$ EN BEKIJK $G = F \cup \{a\}$
DAN GELDT $|S - \sum_{x \in F} f(x)| < 2^{-(n+1)}$
EN $|S - \sum_{x \in G} f(x)| < 2^{-(n+1)}$
DE DRIEHOEKSONGELIJKHEID GEEFT ONS DAN
$$|f(a)| = |\sum_{x \in G} f(x) - \sum_{x \in F} f(x)| < 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}$$
CONCLUSIE
$$\{x : |f(x)| > 2^{-n}\} \subseteq F$$
DVS DE VERZAMELING IS EINDIG.
DUS $\{a : f(a) \neq 0\}$ IS DE VERENIGING
VAN AFTELBAAR VEEL EINDIGE
VERZAMELINGEN EN DAARMEE ZELF
AFTELBAAR.

DUS SOMMEERBAARHEID IS VOORNAMELIJK
INTERESSANT VOOR AFTELBARE
VERZAMELINGEN GETALLEN.

ER ZIJN VERSCHILLEN TUSSEN DE
BEIDE DEFINITIES.

VOOR DEZE NIEUWE DEFINITIE GELDT
f IS SOMMEERBAAR DAN EN SLECHTS DAN ALS $|f|$ SOMMEERBAAR IS DAT WIL ZEGGEN
$\sum_{a \in A} f(a)$ BESTAAT DESDA $\sum_{a \in A} |f(a)|$ BESTAAT
VERDER:
NOTEER $A^+ = \{a : f(a) > 0\}$ EN
$A^- = \{a : f(a) < 0\}$
DAN GELDT
$\sum_{a \in A} f(a)$ BESTAAT DESDA
$\sum_{a \in A^+} f(a)$ ÈN $\sum_{a \in A^-} f(a)$ BESTAAN
EN DAN GELDT

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A^+} f(a) - \sum_{a \in A^-} f(a)$$

VOOR DE DEFINITIE VAN $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ GELDT DIT NIET. NEEM $a_n = (-1)^n/(n+1)$

- WE ZULLEN ZIEN DAT $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ SOMMEERBAAR IS (MET SOM LN 2).
- WE WETEN DAT $\langle |a_n| : n \in \mathbb{N} \rangle$ NIET SOMMEERBAAR IS (ORESME)
- DE POSITIEVE EN NEGATIEVE DELEN ZYN HET OOK NIET
  NEGATIEF: $\langle -\frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \rangle$
  POSITIEF $\langle \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \rangle$

EEN RIJ DIE VOLGENS DE NIEUWE DEFINITIE SOMMEERBAAR IS HEET WEL ABSOLUUT OF ONVOORWAARDELYK SOMMEERBAAR

EEN RIJ ALS $\langle \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \rangle$ HEET VOORWAARDELYK SOMMEERBAAR OMDAT DE VOLGORDE KENNELYK BELANGRYK IS.

OM OVER NA TE DENKEN:
DE HERSCHIKKINGSSTELLING VAN RIEMANN
LAAT $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ VOORWAARDELYK SOMMEERBAAR ZYN.
DAN GELDT: VOOR ELK REËEL GETAL S BESTAAT EEN HERSCHIKKING / PERMUTATIE $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (EEN BIJECTIE DUS)
ZÓ DAT $\langle a_{\varphi(n)} : n \in \mathbb{N} \rangle$ SOMMEERBAAR IS EN

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = S$$

PROBEER DIT EENS TE DOEN VOOR DE RY $\left\langle \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\rangle$;

- MAAK EEN φ ZÓ DAT
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = 0$$
- MAAK EEN φ ZÓ DAT
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)} = 100$$