Oneindig veel getallen optellen

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 22 mei 2024

Antwoord

Een som toekennen aan oneindig veel getallen.

Het liefst met behoud van allerlei plezierige eigenschappen.

Antwoord

Plezierige eigenschappen van *eindige* sommen.

(1) Haakjes doen er niet toe: $(a+b)+c = a+(b+c)$, en met inductie volgt: voor elk n-tal getallen $\{a_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ en elke verdeling van $\{i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ in intervallen $I_1 \cup \cdots \cup I_k$ geldt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i \in I_k} a_i$$

Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned}(((a_1+a_2)+a_3)+a_4)+a_5 &= a_1+(a_2+(a_3+(a_4+a_5))) \\ &= ((a_1+a_2)+(a_3+a_4))+a_5\end{aligned}$$

enzovoort, alle mogelijke plaatsingen van haakjes geven hetzelfde resultaat.

Antwoord

(2) Volgorde doet er niet toe: $a + b = b + a$, en met inductie volgt: voor elk n-tal getallen $\{a_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ en elke permutatie ψ van $\{i : 1 \leqslant i \leqslant n\}$ geldt

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\psi(i)}$$

Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_1 \\ &= a_3 + a_4 + a_2 + a_5 + a_1 \end{aligned}$$

enzovoort, alle 120 volgordes geven hetzelfde resultaat.

Antwoord

(3) In de Analyse erg gewild: als $a < b$ dan geldt $a + c < b + c$.

Bijvoorbeeld: voor $n \geqslant 2$ geldt $0 < \sqrt{n} < n$, dus $n < n + \sqrt{n} < n + n = 2n$.
Daaruit volgt dan weer

$$\frac{1}{2n} < \frac{1}{n + \sqrt{n}} < \frac{1}{n}$$

En dat vertelt ons weer iets over de snelheid waarmee $\frac{1}{n+\sqrt{n}}$ naar nul convergeert.

Problemen

Eerste probleem in Hoofdstuk 1 van *Blik op Oneindig*

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & = 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \ldots & = 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \ldots & = 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \ldots & = 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \ldots & = 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \quad 1 \text{ of } 0?
\end{array}$$

Aftelbaar oneindig veel 0-en, 1-en, en -1-en.

De “vierkantstelling” geldt kennelijk niet.
Volgorde èn groepering maken dus uit.

Problemen

Het tweede probleem betreft

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Maak de som eerst kleiner: $1 \to \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \to \frac{1}{4}$, etc, er komt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Gebruik dat de plaatsing van haakjes niet uit mag maken:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

Daar staat

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

Diagnose

Wat is het echte probleem?

We hebben nog niets afgesproken; we gingen er vanuit dat de som,
die we nog niet gedefinieerd hebben,
in het oneindige geval wel dezelfde eigenschappen zou hebben als in het eindige geval.

Voor we de definitie(s) formuleren bekijken we één van de eerste plekken waar serieus naar oneindige sommen gekeken werd.

Quaestiones super geometriam Euclidis van Nicole Oresme.
In 1961 door H. L. L. Busard bewerkt en geparafraseerd in zijn proefschrift.
Gepromoveerd in Utrecht bij E. J. Dijksterhuis.
Gebaseerd op twee manuscripten, en in 2010 opnieuw uitgegeven nadat twee nieuwe manuscripten waren ontdekt.

Oresme

De twee eerste vragen zijn voor vandaag van belang. Hierin onderzocht Oresme of een continuum (zeg maar het interval $[0, 1]$) in oneindig veel delen verdeeld kan worden. En wel zo dat elk voorgaand deel in constante verhouding is tot het volgende.

Neem $n \geqslant 2$ en verdeel $[0, 1]$ in n gelijke delen.
Zet de eerste $n - 1$ bij elkaar apart, en verdeel het n-de deel in n-gelijke delen.
Zet de eerste $n - 1$ daarvan apart, en verdeel het het n-de deel in n-gelijke delen.
Enzovoort

Oresme

We krijgen achtereenvolgens stukken van lengte

$$\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad \text{etc.}$$

Deze stukken vullen $[0,1]$ op en de conclusie is dat

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots=1$$

NB dit werkt met willekeurige verhoudingen; voor elke $x>1$ krijgen we zo

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\cdots=1$$

Oresme

Conclusie van Oresme: als we die stukken aan $[0,1]$ *toevoegen* (aan de rechterkant) blijft de som begrensd en vullen we $[0,2]$ op. En dus

$$1+\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\cdots=2$$

Dit werkt zolang $1:x$ kleiner is dan 1.

Als $1:x$ gelijk is aan 1 of groter dan 1 wordt het geheel oneindig.

Oresme

A: neem een grootheid van 1 voet en voeg daaraan toe $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ voet etc.
Het resultaat zal 2 voet zijn, want we hebben gezien dat als deze succesievelijk van 1 voet worden weggenomen, precies de hele voet uiteindelijk wordt weggenomen.

Oresme

B: neem weer een grootheid van 1 voet en voeg daaraan toe $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ voet, etc.
Het geheel zal gelijk zijn aan $\frac{3}{2}$ voet.
Dit volgt met behulp van de volgende regel: neem het verschil tussen de eerste en de tweede term $(1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3})$. De verhouding tussen het geheel en de eerste grootheid is gelijk aan die tussen de eerste en het verschil:

$$\mathrm{Geheel} : 1 = 1 : \frac{2}{3}$$

Algemeen:

$$S : 1 = 1 : (1 - x)$$

Hier staat, in moderne termen, de som van een meetkundige rij:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

Oresme

C: als we steeds kleinere delen toevoegen die niet in constante verhouding staan kan het geheel oneindig worden.

Voorbeeld: verdeel een uur in een oneindig aantal delen met constante verhouding tussen opeenvolgende delen.
In de achtereenvolgende delen van dat uur voegen we aan een grootheid van 1 voet toe: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ voet, etc.
Hiervan is de som oneindig.
We kunnen namelijk oneindig veel groepen maken met telkens som groter dan $\frac{1}{2}$:

- $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}$
- $\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}$

et sic in infinitum.

Wat hebben we gezien?

Oude rekenregels zonder nadenken toepassen werkt niet.

Oresme dacht in termen van “steeds één term toevoegen”, en deed dat vrij gestructureerd.

Hij ontdekte de som van een meetkundige rij, en hij ontdekte dat steeds kleiner wordende grootheden een oneindige som konden hebben.

We volgen zijn voorbeeld (en dat van zo ongeveer alle wiskundigen daarna) en bekijken een rij van reële getallen $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ en proberen een betekenis te geven aan

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Vóór de officiële definitie

Tot het begin van de 19de eeuw had men geen echte definitie van een oneindige som.

Elke oneindige som

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

had een waarde (dat was duidelijk); de taak van de wiskundigen was die waarde te ontdekken.

Vóór de officiële definitie

Euler was hier een meester in en ‘ontdekte’ bijvoorbeeld

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

(meetkundige rij: $S = \frac{1}{1-(-1)}$).

En ook

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 + \cdots = \frac{1}{4}$$

(gebruik het vorige voorbeeld).

En ook

$$0! - 1! + 2! - 3! + 4! - 5! + 6! - 7! + 8! - 9! + \cdots \approx 0.5963473622$$

(op vier verschillende manieren).

Makkelijker kan ik het niet maken ...

Begin met een rij $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ en maak hierbij de bijbehorende rij van partiële sommen $\langle s_n : n \in \mathbb{N} \rangle$:

- $s_0 = a_0$
- $s_1 = s_0 + a_1 = a_0 + a_1$
- $s_2 = s_1 + a_2 = (a_0 + a_1) + a_2$
- ...
- $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) + a_{n+1}$
- ...

en onderzoek of

$$\lim_{n \to \infty} s_n$$

bestaat.

Makkelijker kan ik het niet maken . . .

Dat wil zeggen: onderzoek of er een getal S bestaat zó dat

$$\lim_{n\to\infty} s_n = S$$

volgens de definitie van vorige week.

Zo ja, dan zeggen we dat $\langle a_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ sommeerbaar is met som S, en we *noteren*

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Zo nee, dan is de rij niet sommeerbaar.

Oresme

Oresme stelde in feite vast dat een meetkundige rij $\langle x^n : n \in \mathbb{N}\rangle$ met $0 < x < 1$ sommeerbaar is met som $\frac{1}{1-x}$. En dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Verder stelde hij vast dat $\langle \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\rangle$ *niet* sommeerbaar is, want voor elke n geldt

$$s_{2^n+1} > 1 + \frac{1}{2}n$$

Dus de partiële sommen stijgen boven elke waarde uit.

Meetkundige rij

En nu netjes:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

als $|x| < 1$.

Bekijk een partiële som: $s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.
Vermenigvuldig s_n met x, er komt $x \cdot s_n = x + x^2 + \cdots + x^n + x^{n+1}$.
Trek van elkaar af: $(1-x)s_n = 1 - x^{n+1}$, en dus

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$$

en dat geeft ons . . .

Meetkundige rij

... dit
$$\left| s_n - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \frac{-x^{n+1}}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$$

En nu? Nu gebruiken we dat x een vaste waarde in $(-1, 1)$ is en n variabel.
Dan volgt namelijk dat $\lim_{n\to\infty} |x|^{n+1} = 0$. (Bewijs in de aantekeningen.)

Zij $\varepsilon > 0$. Er is een N zó dat voor $n \geqslant N$ geldt $|x|^{n+1} < (1-x) \cdot \varepsilon$.
Maar dan geldt voor $n \geqslant N$ dus

$$\left| s_n - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} < \varepsilon.$$

Klaar!

Toepassing: een vraag uit de Wetenschapsagenda

Vraag

Is 0,99999etc (dus met oneindig aantal negens achter de komma) gelijk aan 1?
Opvallend is deze bevinding: $1/9 = 0{,}111$etc $2/9 = 0{,}222$etc enzovoorts tot $8/9$ maar we weten allen $9/9{=}1$.

Antwoord

Ja. $0{,}99999\ldots$ is een (informele) afkorting voor de oneindige som

$$9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 9 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5} + \cdots$$

Dat is de som van $\langle 10^{-n} : n \in \mathbb{N} \rangle$, vermenigvuldigd met $\frac{9}{10}$. En dus

$$0{,}99999\ldots = \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

De partiële sommen

Dit klinkt allemaal mooi, maar er is een praktisch probleem.

Er is bijna nooit een makkelijke formule voor s_n.
Bij de meetkundige rij hadden we mazzel.

Bij de rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ moesten we, in navolging van Oresme, al een truuk uithalen.

Het Baseler probleem

Hoe zit het, bijvoorbeeld, met deze som:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

Het Baseler probleem.

Met de partiële sommen is bijna niets te beginnen.

Ook hier is een truuk nodig.

Een makkelijke rij

Er is nog een 'mazzelrij': $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{3\cdot 4}$, ...
Dus $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ voor $n \geqslant 1$ (we hebben geen a_0).
De mazzel die we hebben is

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

en dus

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

maar dan geldt dus

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

En daarmee volgt $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$.
Dus de rij is sommeerbaar met som 1.

Het Baseler probleem

Wat hebben we hier aan?

Voor $n \geqslant 1$ geldt

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Pas dit toe op de partiële sommen van $\langle \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \rangle$:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &< 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Het Baseler probleem

Dus alle Baseler partiële sommen zijn kleiner dan 2.
Verder: de partiële sommen vormen een stijgende rij want $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)^2} > s_n$.

Terug naar Dedekind, maak twee verzamelingen:

$$A = \{a \in \mathbb{R} : \text{er is een } n \text{ met } a < s_n\}$$

en

$$B = \{b \in \mathbb{R} : \text{voor alle } n \text{ geldt } s_n < b\}$$

Er geldt: $A \neq \emptyset$ want $0 \in A$, en $2 \in B$, dus $B \neq \emptyset$.
En verder ook: als $a \in A$ en $b \in B$ dan $a < b$.
En ten slotte: A heeft geen maximum. Want elke s_n zit in A en er is geen grootste s_n.

Dus ...

Het Baseler probleem

... er is een getal S met de eigenschap dat $A = \{x : x < S\}$ en $B = \{x : S \leqslant x\}$, in het bijzonder $S = \min B$.

Zij nu $\varepsilon > 0$. Dan geldt $S - \varepsilon < S$, dus $S - \varepsilon \in A$.
Maar dan is er een N zó dat $S - \varepsilon < s_N$.
En dan geldt voor $n \geqslant N$ dat $S - \varepsilon < s_n < S$. en dus $|S - s_n| < \varepsilon$.

Conclusie: de rij $\langle \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \rangle$ is sommeerbaar met som S.

Het Baseler probleem was: "Wat is de waarde van S dan?"

Euler:

$$S = \frac{\pi^2}{6}$$

Positieve termen

Bovenstaande illustreert een aantal dingen die je tegenkomt bij het werken aan sommen van oneindige rijen.

- De partiële sommen zijn bijna nooit exact te bepalen.
- Als de a_n niet negatief zijn en alle partiële sommen hebben één vaste bovengrens dan is $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ sommeerbaar.
- Zo'n vaste bovengrens vind je meestal door een andere rij $\langle b_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ op te sporen die sommeerbaar is en de eigenschap heeft dat $a_n \leqslant b_n$ voor alle n.
- De bovengrens is dan de som $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
- Dan weet je dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bestaat, maar nog niet wat de waarde is ...

Cauchy en Oresme

Cauchy heeft de methode van Oresme uitgebreid.
Bekijk een rij $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ die bestaat uit positieve termen en die dalend is, dus $a_n \geqslant a_{n+1}$ voor alle n. De partiële sommen heten nog steeds s_n.

- Ga na dat $2 \cdot a_2 \geqslant a_3 + a_4 \geqslant 2 \cdot a_4$
- Ga na dat $4 \cdot a_4 \geqslant a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geqslant 4 \cdot a_8$
- Ga na dat $8 \cdot a_8 \geqslant a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} \geqslant 8 \cdot a_{16}$
- Ga na dat $2^{n-1} \cdot a_{2^{n-1}} \geqslant a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n} \geqslant 2^{n-1} a_{2^n}$
- Ga na: als $n \geqslant 2$ dan geldt $s_{2^n} \geqslant a_0 + a_1 + a_2 + 2 \cdot a_4 + 4 \cdot a_8 + \cdots + 2^{n-1} \cdot a_{2^n}$.
- Ga na: als $n \geqslant 2$ dan geldt $s_{2^n} \leqslant a_0 + a_1 + a_2 + 2 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 + \cdots + 2^{n-1} \cdot a_{2^{n-1}}$.

Conclusie: de rij $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ is sommeerbaar dan en slechts dan als de rij $\langle 2^n \cdot a_{2^n} : n \in \mathbb{N} \rangle$ dat is.

Cauchy en Oresme

Wat is de rij die bij $\langle \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \rangle$ hoort? Is die sommeerbaar?

Pas de methode van Cauchy toe op $\langle \frac{1}{n^2} : n \in \mathbb{N} \rangle$ en op $\langle \frac{1}{\sqrt{n}} : n \in \mathbb{N} \rangle$.
Wat voor soort rijen ontstaan daar? Zijn die sommeerbaar?

Een beroemd voorbeeld

Neem de rij $\langle \frac{1}{n!} : n \in \mathbb{N} \rangle$.

Zoek een makkelijke rij $\langle b_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ met $\frac{1}{n!} \leqslant b_n$ voor alle n en gebruik die om een bovengrens voor de partiële sommen van onze rij te vinden.

Jakob Bernoulli wist te bewijzen dat

$$2{,}5 < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 3$$