e en irrationaliteit

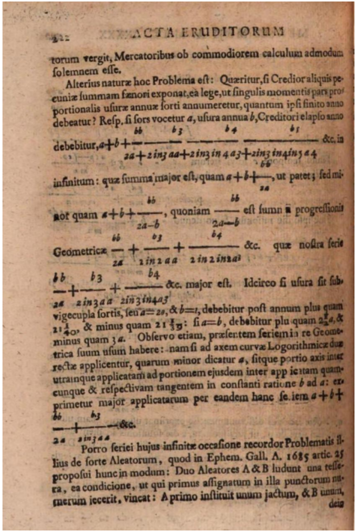
K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 29 mei 2024

Outline

Jakob Bernoulli



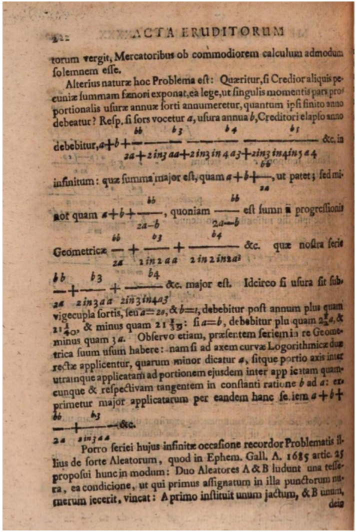
222 ACTA ERUDITORUM

torum vergit, Mercatoribus ob commodiorem calculum admodum solemnem esse.

Alterius naturæ hoc Problema est: Quæritur, si Credior aliquis pecuniæ summam fænori exponat, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur, quantum ipsi finito anno debeatur? Resp. si sors vocetur a, usura annua b, Creditori elapso anno debebitur, $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2 in 3 aa}+\frac{b4}{2 in 3 in 4 a3}+\frac{b5}{2 in 3 in 4 in 5 a4}$ &c. in infinitum: quæ summa major est, quam $a+b+\frac{bb}{2a}$, ut patet; sed minor quam $a+b+\frac{bb}{2a-b}$, quoniam $\frac{bb}{2a-b}$ est summa progressionis Geometricæ $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2 in 2 aa}+\frac{b4}{2 in 2 in 2 a3}$ &c. quæ nostra serie $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2 in 3 aa}+\frac{b4}{2 in 3 in 4 a3}$ &c. major est. Idcirco si usura sit subvigecupla sortis, seu $a=20$, & $b=1$, debebitur post annum plus quam $21\frac{1}{40}$, & minus quam $21\frac{1}{39}$: si $a=b$, debebitur plus quam $2\frac{1}{2}a$, & minus quam $3a$. Observo etiam, præsentem seriem in re Geometrica suum usum habere: nam si ad axem curvæ Logorithmicæ duæ rectæ applicentur, quarum minor dicatur a, sitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem ejusdem inter applicatam quamcunque & respectivam tangentem in constanti ratione b ad a: exprimetur major applicatarum per eandem hanc seriem $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2 in 3 aa}$ &c.

Porro seriei hujus infinitæ occasione recordor Problematis illius de sorte Aleatorum, quod in Ephem. Gall. A. 1685 artic. 25 proposui hunc in modum: Duo Aleatores A & B ludunt una tessera, ea condicione, ut qui primus assignatum in illa punctorum numerum jecerit, vincat: A primo instituit unum jactum, & B unum, deig

Jakob Bernoulli



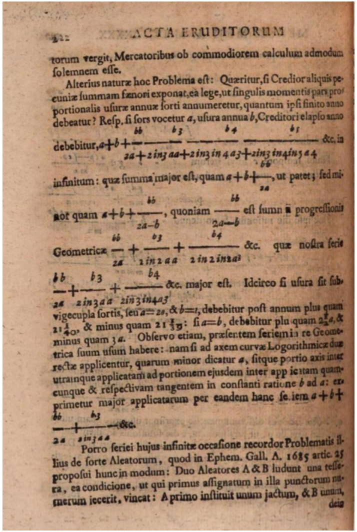
torum vergit, Mercatoribus ob commodiorem calculum admodum ſolemnem eſſe.

Alterius naturæ hoc Problema eſt: Quæritur, ſi Credior aliquis pecuniæ ſummam fœnori exponat, eâ lege, ut ſingulis momentis pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, quantum ipſi finito anno debeatur? Reſp. ſi ſors vocetur a, uſura annua b, Creditori elapſo anno debebitur, $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b3}{2 in 3\, aa} + \frac{b4}{2 in 3 in 4\, a3} + \frac{b5}{2 in 3 in 4 in 5\, a4}$ &c. in infinitum: quæ ſumma major eſt, quam $a + b + \frac{bb}{2a}$, ut patet; ſed minor quam $a + b + \frac{bb}{2a-b}$, quoniam $\frac{bb}{2a-b}$ eſt ſumma progreſſionis Geometricæ $\frac{bb}{2a} + \frac{b3}{2 in 2\, aa} + \frac{b4}{2 in 2 in 2\, a3}$ &c. quæ noſtra ſerie $\frac{bb}{2a} + \frac{b3}{2 in 3\, aa} + \frac{b4}{2 in 3 in 4\, a3}$ &c. major eſt. Idcirco ſi uſura ſit ſubvigecupla ſortis, ſeu $a = 20$, & $b = 1$, debebitur poſt annum plus quam $21\frac{1}{40}$, & minus quam $21\frac{1}{39}$: ſi $a = b$, debebitur plu quam $2\frac{1}{2}a$, & minus quam $3a$. Obſervo etiam, præſentem ſeriem in re Geometrica ſuum uſum habere: nam ſi ad axem curvæ Logorithmicæ duæ rectæ applicentur, quarum minor dicatur a, ſitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem ejusdem inter applicatam quamcunque & reſpectivam tangentem in conſtanti ratione b ad a: exprimetur major applicatarum per eandem hanc ſeriem $a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b3}{2 in 3\, aa}$ &c.

Porro ſeriei hujus infinitæ occaſione recordor Problematis illius de ſorte Aleatorum, quod in Ephem. Gall. A. 1685 artic. 25 propoſui hunc in modum: Duo Aleatores A & B ludunt una teſſera, ea condicione, ut qui primus aſſignatum in illa punctorum numerum jecerit, vincat: A primo inſtituit unum jactum, & B unum, dein

In *Acta Eruditorum* (1690).

Jakob Bernoulli



212 ACTA ERUDITORUM

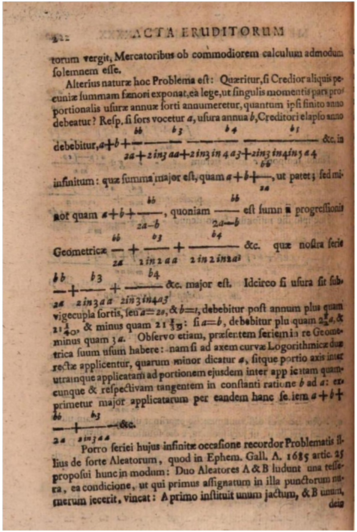
torum vergit, Mercatoribus ob commodiorem calculum admodum ſolemnem eſſe.

Alterius naturæ hoc Problema eſt: Quæritur, ſi Credior aliquis pecuniæ ſummam fænori exponat, eà lege, ut ſingulis momentis pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, quantum ipſi finito anno debeatur? Reſp. ſi ſors vocetur a, uſura annua b, Creditori elapſo anno debebitur, $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2\,in\,3\,aa}+\frac{b4}{2\,in\,3\,in\,4\,a3}+\frac{b5}{2\,in\,3\,in\,4\,in\,5\,a4}$ &c. in infinitum: quæ ſumma major eſt, quam $a+b+\frac{bb}{2a}$, ut patet; ſed minor quam $a+b+\frac{bb}{2a-b}$, quoniam $\frac{bb}{2a-b}$ eſt ſumma progreſſionis Geometricæ $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2\,in\,2\,aa}+\frac{b4}{2\,in\,2\,in\,2\,a3}$ &c. quæ noſtra ſerie $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2\,in\,3\,aa}+\frac{b4}{2\,in\,3\,in\,4\,a3}$ &c. major eſt. Idcirco ſi uſura ſit ſubvigecupla ſortis, ſeu $a=20$, & $b=1$, debebitur poſt annum plus quam $21\frac{1}{40}$, & minus quam $21\frac{1}{39}$: ſi $a=b$, debebitur plu quam $2\frac{1}{2}a$, & minus quam $3a$. Obſervo etiam, præſentem ſeriem in re Geometrica ſuum uſum habere: nam ſi ad axem curvæ Logorithmicæ duæ rectæ applicentur, quarum minor dicatur a, ſitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem ejuſdem inter applicatam quamcunque & reſpectivam tangentem in conſtanti ratione b ad a: exprimetur major applicatarum per eandem hanc ſeriem $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2\,in\,3\,aa}$ &c.

Porro ſeriei hujus infinitæ occaſione recordor Problematis illius de ſorte Aleatorum, quod in Ephem. Gall. A. 1685 artic. 25 propoſui hunc in modum: Duo Aleatores A & B ludunt una teſſera, ea condicione, ut qui primus aſſignatum in illa punctorum numerum iecerit, vincat: A primo inſtituit unum jactum, & B unum, dein

In *Acta Eruditorum* (1690).
Wat is, als een geldbedrag op elk moment een evenredig deel van de rente bijgeschreven krijgt, het maximum haalbare bedrag aan het eind van het jaar?

Jakob Bernoulli



222 ACTA ERUDITORUM

torum vergit, Mercatoribus ob commodiorem calculum admodum ſolemnem eſſe.

Alterius naturæ hoc Problema eſt: Quæritur, ſi Credior aliquis pecuniæ ſummam fænori exponat, eà lege, ut ſingulis momentis pars proportionalis uſuræ annuæ ſorti annumeretur, quantum ipſi finito anno debeatur? Reſp. ſi ſors vocetur a, uſura annua b, Creditori elapſo anno debebitur, $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2 \text{ in } 3\, aa}+\frac{b4}{2 \text{ in } 3 \text{ in } 4\, a3}+\frac{b5}{2 \text{ in } 3 \text{ in } 4 \text{ in } 5\, a4}$ &c. in infinitum: quæ ſumma major eſt, quam $a+b+\frac{bb}{2a}$, ut patet; ſed minor quam $a+b+\frac{bb}{2a-b}$, quoniam $\frac{bb}{2a-b}$ eſt ſumma progreſſionis Geometricæ $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2 \text{ in } 2\, aa}+\frac{b4}{2 \text{ in } 2 \text{ in } 2\, a3}$ &c. quæ noſtra ſerie $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2 \text{ in } 3\, aa}+\frac{b4}{2 \text{ in } 3 \text{ in } 4\, a3}$ &c. major eſt. Idcirco ſi uſura ſit ſubvigecupla ſortis, ſeu $a=20$, & $b=1$, debebitur poſt annum plus quam $21\frac{1}{40}$, & minus quam $21\frac{1}{39}$: ſi $a=b$, debebitur plus quam $2\frac{1}{2}a$, & minus quam $3a$. Obſervo etiam, præſentem ſeriem in re Geometrica ſuum uſum habere: nam ſi ad axem curvæ Logorithmicæ duæ rectæ applicentur, quarum minor dicatur a, ſitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem ejusdem inter applicatam quamcunque & reſpectivam tangentem in conſtanti ratione b ad a: exprimetur major applicatarum per eandem hanc ſeriem $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2 \text{ in } 3\, aa}$ &c.

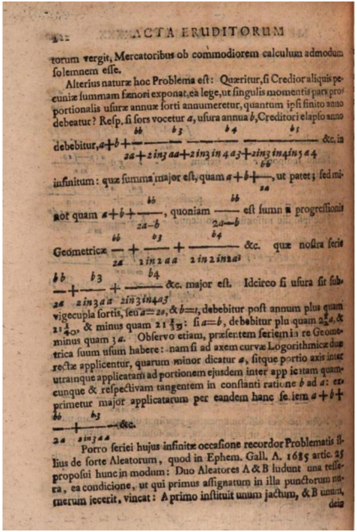
Porro ſeriei hujus infinitæ occaſione recordor Problematis illius de ſorte Aleatorum, quod in Ephem. Gall. A. 1685 artic. 25 propoſui hunc in modum: Duo Aleatores A & B ludunt una teſſera, ea condicione, ut qui primus aſſignatum in illa punctorum numerum jecerit, vincat: A primo inſtituit unum jactum, & B unum, dein

In *Acta Eruditorum* (1690).

Wat is, als een geldbedrag op elk moment een evenredig deel van de rente bijgeschreven krijgt, het maximum haalbare bedrag aan het eind van het jaar?

In het plaatje is a het beginkapitaal en b het bedrag dat aan het eind van het jaar bijgeschreven zou worden.

Jakob Bernoulli


222 ACTA ERUDITORUM

torum vergit, Mercatoribus ob commodiorem calculum admodum solemnem esse.

Alterius naturæ hoc Problema est: Quæritur, si Credior aliquis pecuniæ summam fænori exponat, ea lege, ut singulis momentis pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur, quantum ipsi finito anno debeatur? Resp. si sors vocetur a, usura annua b, Creditori elapso anno debebitur, $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2in3aa}+\frac{b4}{2in3in4a3}+\frac{b5}{2in3in4in5a4}$ &c. in infinitum: quæ summa major est, quam $a+b+\frac{bb}{2a}$, ut patet; sed minor quam $a+b+\frac{bb}{2a-b}$, quoniam $\frac{bb}{2a-b}$ est summa progressionis Geometricæ $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2in2aa}+\frac{b4}{2in2in2a3}$ &c. quæ nostra serie $\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2in3aa}+\frac{b4}{2in3in4a3}$ &c. major est. Idcirco si usura sit subvigecupla sortis, seu $a=20$, & $b=1$, debebitur post annum plus quam $21\frac{1}{40}$, & minus quam $21\frac{1}{39}$: si $a=b$, debebitur plu quam $2\frac{1}{2}a$, & minus quam $3a$. Observo etiam, præsentem seriem in re Geometrica suum usum habere: nam si ad axem curvæ Logorithmicæ duæ rectæ applicentur, quarum minor dicatur a, sitque portio axis inter utramque applicatam ad portionem ejusdem inter applicatam quamcunque & respectivam tangentem in constanti ratione b ad a: exprimetur major applicatarum per eandem hanc seriem $a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b3}{2in3aa}$ &c.

Porro seriei hujus infinitæ occasione recordor Problematis illius de sorte Aleatorum, quod in Ephem. Gall. A. 1685 artic. 25 proposui hunc in modum: Duo Aleatores A & B ludunt una tessera, ea condicione, ut qui primus assignatum in illa punctorum numerum jecerit, vincat: A primo instituit unum jactum, & B unum, dein

In *Acta Eruditorum* (1690).
Wat is, als een geldbedrag op elk moment een evenredig deel van de rente bijgeschreven krijgt, het maximum haalbare bedrag aan het eind van het jaar?
In het plaatje is a het beginkapitaal en b het bedrag dat aan het eind van het jaar bijgeschreven zou worden.
Het *rentepercentage* zou dus $100 \cdot \frac{b}{a}$ zijn.

Jakob Bernoulli

Het antwoord:

$$a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot aa} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^3} + \frac{b^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} \&c. \text{ in infinitum}$$

Jakob Bernoulli

Het antwoord:

$$a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot aa} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^3} + \frac{b^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} \& c. \text{ in infinitum}$$

De som is groter dan $a + b + \frac{bb}{2a}$

Jakob Bernoulli

Het antwoord:

$$a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot aa} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^3} + \frac{b^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} \&c. \text{ in infinitum}$$

De som is groter dan $a + b + \frac{bb}{2a}$, en kleiner dan $a + b + \frac{bb}{2a-b}$

Jakob Bernoulli

Het antwoord:

$$a+b+\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 3\cdot aa}+\frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot a^3}+\frac{b^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot a^4}\&c.\text{ in infinitum}$$

De som is groter dan $a+b+\frac{bb}{2a}$, en kleiner dan $a+b+\frac{bb}{2a-b}$ want de laatste term is de som van de meetkundige rij

$$\frac{bb}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 2\cdot aa}+\frac{b^4}{2\cdot 2\cdot 2\cdot a^3}\&c.$$

Jakob Bernoulli

Het antwoord:

$$a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot aa} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^3} + \frac{b^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} \&c. \text{ in infinitum}$$

De som is groter dan $a + b + \frac{bb}{2a}$, en kleiner dan $a + b + \frac{bb}{2a-b}$ want de laatste term is de som van de meetkundige rij

$$\frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 2 \cdot aa} + \frac{b^4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a^3} \&c.$$

Voorbeeld 1: $a = 20$ en $b = 1$, dan ligt het eindbedrag tussen $21\frac{1}{40}$ en $21\frac{1}{39}$.

Jakob Bernoulli

Het antwoord:

$$a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot aa} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^3} + \frac{b^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} \&c. \text{ in infinitum}$$

De som is groter dan $a + b + \frac{bb}{2a}$, en kleiner dan $a + b + \frac{bb}{2a-b}$ want de laatste term is de som van de meetkundige rij

$$\frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 2 \cdot aa} + \frac{b^4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a^3} \&c.$$

Voorbeeld 1: $a = 20$ en $b = 1$, dan ligt het eindbedrag tussen $21\frac{1}{40}$ en $21\frac{1}{39}$.

Voorbeeld 2: $a = b$, dan ligt het eindbedrag tussen $2\frac{1}{2}a$ en $3a$.

Jakob Bernoulli

Het antwoord:

$$a + b + \frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 3 \cdot aa} + \frac{b^4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot a^3} + \frac{b^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot a^4} \&c. \text{ in infinitum}$$

De som is groter dan $a + b + \frac{bb}{2a}$, en kleiner dan $a + b + \frac{bb}{2a-b}$ want de laatste term is de som van de meetkundige rij

$$\frac{bb}{2a} + \frac{b^3}{2 \cdot 2 \cdot aa} + \frac{b^4}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a^3} \&c.$$

Voorbeeld 1: $a = 20$ en $b = 1$, dan ligt het eindbedrag tussen $21\frac{1}{40}$ en $21\frac{1}{39}$.

Voorbeeld 2: $a = b$, dan ligt het eindbedrag tussen $2\frac{1}{2}a$ en $3a$.

Waar kwam die oneindige som vandaan?

Outline

Een vereenvoudiging

We nemen voor het gemak $a = b = 1$ (later bekijken we andere renteverhoudingen).

Een vereenvoudiging

We nemen voor het gemak $a = b = 1$ (later bekijken we andere renteverhoudingen).
Aan het eind van het jaar hebben we een kapitaal van 2.

Een vereenvoudiging

We nemen voor het gemak $a = b = 1$ (later bekijken we andere renteverhoudingen).
Aan het eind van het jaar hebben we een kapitaal van 2.

Als we twee keer verrekenen, halverwege en aan het eind van het jaar, hebben we op 1 juli een kapitaal van $1 + \frac{1}{2}$ en aan het eind van het jaar $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})$

Een vereenvoudiging

We nemen voor het gemak $a = b = 1$ (later bekijken we andere renteverhoudingen).
Aan het eind van het jaar hebben we een kapitaal van 2.

Als we twee keer verrekenen, halverwege en aan het eind van het jaar, hebben we op 1 juli een kapitaal van $1 + \frac{1}{2}$ en aan het eind van het jaar $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})$

Drie keer verrekenen levert ons $(1 + \frac{1}{3})^3$ op.

Een vereenvoudiging

We nemen voor het gemak $a = b = 1$ (later bekijken we andere renteverhoudingen). Aan het eind van het jaar hebben we een kapitaal van 2.

Als we twee keer verrekenen, halverwege en aan het eind van het jaar, hebben we op 1 juli een kapitaal van $1 + \frac{1}{2}$ en aan het eind van het jaar $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})$

Drie keer verrekenen levert ons $(1 + \frac{1}{3})^3$ op.

Vier keer verrekenen levert ons $(1 + \frac{1}{4})^4$ op.

Een vereenvoudiging

We nemen voor het gemak $a = b = 1$ (later bekijken we andere renteverhoudingen). Aan het eind van het jaar hebben we een kapitaal van 2.

Als we twee keer verrekenen, halverwege en aan het eind van het jaar, hebben we op 1 juli een kapitaal van $1 + \frac{1}{2}$ en aan het eind van het jaar $(1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{2})$

Drie keer verrekenen levert ons $(1 + \frac{1}{3})^3$ op.

Vier keer verrekenen levert ons $(1 + \frac{1}{4})^4$ op.

Dus: n keer verrekenen levert $(1 + \frac{1}{n})^n$ op.

Een vereenvoudiging

In moderne termen is het antwoord op Bernoulli's vraag: Continu verrekenen levert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

op.

Een vereenvoudiging

In moderne termen is het antwoord op Bernoulli's vraag: Continu verrekenen levert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

op.

De vraag is dus: bestaat die limiet wel? En zo ja, wat is de waarde?

Een vereenvoudiging

In moderne termen is het antwoord op Bernoulli's vraag: Continu verrekenen levert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

op.

De vraag is dus: bestaat die limiet wel? En zo ja, wat is de waarde?

De rij is stijgend en naar boven begrensd (zie aantekeningen).

Een vereenvoudiging

In moderne termen is het antwoord op Bernoulli's vraag: Continu verrekenen levert

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

op.

De vraag is dus: bestaat die limiet wel? En zo ja, wat is de waarde?

De rij is stijgend en naar boven begrensd (zie aantekeningen).

Dus, via Dedekind's sneden: de limiet bestaat.

Een staaltje oude Analyse

Vermoedelijk deed Bernoulli iets als dit.

Een staaltje oude Analyse

Vermoedelijk deed Bernoulli iets als dit.

Neem een oneindig groot natuurlijk getal N en werk

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

uit.

Een staaltje oude Analyse

Vermoedelijk deed Bernoulli iets als dit.

Neem een oneindig groot natuurlijk getal N en werk

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

uit.
Dat levert op

$$1 + \binom{N}{1}\frac{1}{N}$$

Een staaltje oude Analyse

Vermoedelijk deed Bernoulli iets als dit.

Neem een oneindig groot natuurlijk getal N en werk

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$$

uit.
Dat levert op

$$1+\binom{N}{1}\frac{1}{N}+\binom{N}{2}\frac{1}{N^2}$$

Een staaltje oude Analyse

Vermoedelijk deed Bernoulli iets als dit.

Neem een oneindig groot natuurlijk getal N en werk

$$\left(1 + \frac{1}{N}\right)^N$$

uit.
Dat levert op

$$1 + \binom{N}{1}\frac{1}{N} + \binom{N}{2}\frac{1}{N^2} + \binom{N}{3}\frac{1}{N^3}$$

Een staaltje oude Analyse

Vermoedelijk deed Bernoulli iets als dit.

Neem een oneindig groot natuurlijk getal N en werk

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$$

uit.
Dat levert op

$$1+\binom{N}{1}\frac{1}{N}+\binom{N}{2}\frac{1}{N^2}+\binom{N}{3}\frac{1}{N^3}+\binom{N}{4}\frac{1}{N^4}$$

Een staaltje oude Analyse

Vermoedelijk deed Bernoulli iets als dit.

Neem een oneindig groot natuurlijk getal N en werk

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$$

uit.

Dat levert op

$$1+\binom{N}{1}\frac{1}{N}+\binom{N}{2}\frac{1}{N^2}+\binom{N}{3}\frac{1}{N^3}+\binom{N}{4}\frac{1}{N^4}+\binom{N}{5}\frac{1}{N^5}$$

Een staaltje oude Analyse

Vermoedelijk deed Bernoulli iets als dit.

Neem een oneindig groot natuurlijk getal N en werk

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$$

uit.

Dat levert op

$$1+\binom{N}{1}\frac{1}{N}+\binom{N}{2}\frac{1}{N^2}+\binom{N}{3}\frac{1}{N^3}+\binom{N}{4}\frac{1}{N^4}+\binom{N}{5}\frac{1}{N^5}\ \&c.\ \text{in infinitum}$$

Een staaltje oude Analyse

De $\binom{N}{k}$ zijn de binomiaalcoëfficiënten.

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-(k-1))}{k!}$$

Een staaltje oude Analyse

De $\binom{N}{k}$ zijn de binomiaalcoëfficiënten.

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-(k-1))}{k!}$$

en de k-de term ziet er dan zo uit:

$$\binom{N}{k} \cdot \frac{1}{N^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdots \frac{N-(k-1)}{N}$$

Een staaltje oude Analyse

De $\binom{N}{k}$ zijn de binomiaalcoëfficiënten.

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-(k-1))}{k!}$$

en de k-de term ziet er dan zo uit:

$$\binom{N}{k} \cdot \frac{1}{N^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdots \frac{N-(k-1)}{N}$$

Nu gebruiken we echt dan N oneindig groot is: voor elke *eindige i* geldt namelijk

$$\frac{N-i}{N} = 1$$

Een staaltje oude Analyse

De $\binom{N}{k}$ zijn de binomiaalcoëfficiënten.

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k! \cdot (N-k)!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdots (N-(k-1))}{k!}$$

en de k-de term ziet er dan zo uit:

$$\binom{N}{k} \cdot \frac{1}{N^k} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{N}{N} \cdot \frac{N-1}{N} \cdots \frac{N-(k-1)}{N}$$

Nu gebruiken we echt dan N oneindig groot is: voor elke *eindige* i geldt namelijk

$$\frac{N-i}{N} = 1$$

En de som van Bernoulli wordt dan ...

Een staaltje oude Analyse

. . . de volgende

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\ \&c.\ \text{in infinitum}$$

Een staaltje oude Analyse

... de volgende

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \ \&c. \text{ in infinitum}$$

De som is groter dan die van de eerste drie termen, 2,5 dus.

Een staaltje oude Analyse

. . . de volgende

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \ \&c. \text{ in infinitum}$$

De som is groter dan die van de eerste drie termen, 2,5 dus.

De som

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \ \&c. \text{ in infinitum}$$

Een staaltje oude Analyse

... de volgende

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\ \&c.\ \text{in infinitum}$$

De som is groter dan die van de eerste drie termen, 2,5 dus.

De som

$$\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\ \&c.\ \text{in infinitum}$$

is kleiner dan de som

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}\ \&c.\ \text{in infinitum}$$

Een staaltje oude Analyse

... de volgende

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \ \&c. \text{ in infinitum}$$

De som is groter dan die van de eerste drie termen, 2,5 dus.

De som

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \ \&c. \text{ in infinitum}$$

is kleiner dan de som

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \ \&c. \text{ in infinitum}$$

En die is gelijk aan 1; de hele som is dus kleiner dan 3.

Een staaltje oude Analyse

Als je aan het begin a buiten de haken houdt krijg je te maken met

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{an}\right)^n$$

Een staaltje oude Analyse

Als je aan het begin a buiten de haken houdt krijg je te maken met

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{an}\right)^n$$

en dat draait op zijn Bernoulli's uit op het oorspronkelijke antwoord

$$a\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{2\cdot a^2}+\frac{b^3}{2\cdot 3\cdot a^3}+\frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot a^4}+\frac{b^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot a^5}\ \&c.\text{ in infinitum}\right)$$

Outline

Het getal e

- Van samengesteld interest naar som
- En nu volgens onze definities
- Wat deed Euler?

Irrationaliteiten

- e is irrationaal
- $\sqrt{2}$ is irrationaal
- π is irrationaal

Een paar slotopmerkingen

Twee uitdrukkingen

We hebben

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Twee uitdrukkingen

We hebben

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{en} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Twee uitdrukkingen

We hebben

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{en} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

En Jakob Bernoulli dacht te zien dat de uitdrukkingen hetzelfde getal bepalen.

Twee uitdrukkingen

We hebben

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{en} \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

En Jakob Bernoulli dacht te zien dat de uitdrukkingen hetzelfde getal bepalen.

Klopt dat, volgens onze definities?

Twee uitdrukkingen

We hebben

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{en} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

En Jakob Bernoulli dacht te zien dat de uitdrukkingen hetzelfde getal bepalen.

Klopt dat, volgens onze definities?

Ja, maar het is wel wat werk dat vast te stellen.

Twee uitdrukkingen

We hebben

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{en} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

En Jakob Bernoulli dacht te zien dat de uitdrukkingen hetzelfde getal bepalen.

Klopt dat, volgens onze definities?

Ja, maar het is wel wat werk dat vast te stellen.

En de waarde? Dat was een getal dat nog niet eerder opgedoken was.

Twee uitdrukkingen

We hebben

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{en} \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

En Jakob Bernoulli dacht te zien dat de uitdrukkingen hetzelfde getal bepalen.

Klopt dat, volgens onze definities?

Ja, maar het is wel wat werk dat vast te stellen.

En de waarde? Dat was een getal dat nog niet eerder opgedoken was.
Vandaar dat Bernoulli zich er met onder- en bovenschattingen vanaf maakte.

Twee uitdrukkingen

Eén kant op is niet moeilijk. Kijk nog eens naar de k-de term in $(1+\frac{1}{n})^n$:

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n}$$

Twee uitdrukkingen

Eén kant op is niet moeilijk. Kijk nog eens naar de k-de term in $(1+\frac{1}{n})^n$:

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n}$$

Deze is deze kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{k!}$.

Twee uitdrukkingen

Eén kant op is niet moeilijk. Kijk nog eens naar de k-de term in $(1+\frac{1}{n})^n$:

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n}$$

Deze is deze kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{k!}$.
Dat laat zien dat

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

voor elke n.

Twee uitdrukkingen

Eén kant op is niet moeilijk. Kijk nog eens naar de k-de term in $(1+\frac{1}{n})^n$:

$$\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n}$$

Deze is deze kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{k!}$.
Dat laat zien dat

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

voor elke n.

Dat geeft ons

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Twee uitdrukkingen

Het omgekeerde kost meer moeite; zie de aantekeningen.

Twee uitdrukkingen

Het omgekeerde kost meer moeite; zie de aantekeningen.

Overigens convergeren de partiële sommen veel sneller dan de rij waar we mee begonnen.

Outline

Exponentiële functies

In Introductio in analysin infinitorum, deel 1 uit 1748 zette Euler de beginselen van de Calculus uiteen.

Exponentiële functies

In Introductio in analysin infinitorum, deel 1 uit 1748 zette Euler de beginselen van de Calculus uiteen.
In Hoofdstuk VII gaat het over exponentiële en logaritmische functies.

Exponentiële functies

In Introductio in analysin infinitorum, deel 1 uit 1748 zette Euler de beginselen van de Calculus uiteen.
In Hoofdstuk VII gaat het over exponentiële en logaritmische functies.

Neem a positief, neem een oneindig klein getal ω en bekijk a^{ω}.

Exponentiële functies

In Introductio in analysin infinitorum, deel 1 uit 1748 zette Euler de beginselen van de Calculus uiteen.
In Hoofdstuk VII gaat het over exponentiële en logaritmische functies.

Neem a positief, neem een oneindig klein getal ω en bekijk a^ω.

Er is een getal k zó dat $a^\omega = 1 + k\omega$.

Exponentiële functies

In Introductio in analysin infinitorum, deel 1 uit 1748 zette Euler de beginselen van de Calculus uiteen.
In Hoofdstuk VII gaat het over exponentiële en logaritmische functies.

Neem a positief, neem een oneindig klein getal ω en bekijk a^ω.

Er is een getal k zó dat $a^\omega = 1 + k\omega$.
Namelijk de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van a^x in het punt $(0, 1)$.

Exponentiële functies

In Introductio in analysin infinitorum, deel 1 uit 1748 zette Euler de beginselen van de Calculus uiteen.
In Hoofdstuk VII gaat het over exponentiële en logaritmische functies.

Neem a positief, neem een oneindig klein getal ω en bekijk a^ω.

Er is een getal k zó dat $a^\omega = 1 + k\omega$.
Namelijk de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van a^x in het punt $(0, 1)$.

(Dit lineariseren van een lastige functie gebeurt nog dagelijks, al is men wel wat voorzichtiger met het $=$-teken.)

Exponentiële functies

We kunnen dus machtsverheffen: $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$.

Exponentiële functies

We kunnen dus machtsverheffen: $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$.
Het rechterlid wordt

$$1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \&c$$

Exponentiële functies

We kunnen dus machtsverheffen: $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$.
Het rechterlid wordt

$$1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \&c$$

Neem i oneindig groot, en wel zo dat $z = i\omega$ een eindig getal is, en vul in:

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \&c$$

Exponentiële functies

We kunnen dus machtsverheffen: $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$.
Het rechterlid wordt

$$1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 + \&c$$

Neem i oneindig groot, en wel zo dat $z = i\omega$ een eindig getal is, en vul in:

$$a^z = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \&c$$

Net als Bernoulli: omdat i oneindig groot is geldt $\frac{i-1}{i} = 1$, $\frac{i-2}{i} = 1$, enzovoort

Exponentiële functies

We kunnen dus machtsverheffen: $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$.
Het rechterlid wordt

$$1 + \frac{i}{1} k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^3\omega^3 + \&c$$

Neem i oneindig groot, en wel zo dat $z = i\omega$ een eindig getal is, en vul in:

$$a^z = 1 + \frac{1}{1} kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i} k^2 z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i} k^3 z^3 + \&c$$

Net als Bernoulli: omdat i oneindig groot is geldt $\frac{i-1}{i} = 1$, $\frac{i-2}{i} = 1$, enzovoort

En dus . . .

Exponentiële functies

. . . vinden we

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \&c$$

Exponentiële functies

... vinden we

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \&c$$

Als we $z = 1$ nemen zien we duidelijk de relatie tussen a en k:

$$a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1\cdot 2} + \frac{k^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{k^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \&c$$

Exponentiële functies

Het getal dat bij $k = 1$ hoort neem een speciale plaats in; het is gelijk aan

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$$

Exponentiële functies

Het getal dat bij $k = 1$ hoort neem een speciale plaats in; het is gelijk aan

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$$

Als we de breuken uitwerken en optellen, zei Euler, dan krijgen we

$$a = 2{,}71828182845904523536028,$$

Exponentiële functies

Het getal dat bij $k = 1$ hoort neem een speciale plaats in; het is gelijk aan

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$$

Als we de breuken uitwerken en optellen, zei Euler, dan krijgen we

$$a = 2{,}71828182845904523536028,$$

waarbij het laatste cijfer echt klopt.

Exponentiële functies

Het getal dat bij $k = 1$ hoort neem een speciale plaats in; het is gelijk aan

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c$$

Als we de breuken uitwerken en optellen, zei Euler, dan krijgen we

$$a = 2{,}71828182845904523536028,$$

waarbij het laatste cijfer echt klopt.

Op dit punt voerde Euler de letter in die wij nu nog voor dit getal gebruiken: "het getal dat bij $k = 1$ hoort duiden we in het vervolg kortweg met de letter e aan".

Exponentiële functies

LIB. I.

(116) inventam, $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c.$, qui termini, ſi in fractiones decimales convertantur atque actu addantur, præbebunt hunc valorem pro $a =$ 2,71828182845904523536028, cujus ultima adhuc nota veritati eſt conſentanea. Quod ſi jam ex hac baſi Logarithmi conſtruantur, ii vocari ſolent Logarithmi *naturales* ſeu *hyperbolici*, quoniam quadratura hyperbolæ per iſtiuſmodi Logarithmos exprimi poteſt. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,718281828459 &c. conſtanter litteram e, quæ ergo denotabit baſin Logarithmorum naturalium ſeu hyperbolicorum, cui reſpondet valor litteræ $k = 1$; ſive hæc littera e quoque exprimet ſummam hujus Seriei $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \&c.$ in infinitum.

Outline

Outline

Verschillen afschatten

Over de convergentiesnelheid van de rij partiële sommen.

Verschillen afschatten

Over de convergentiesnelheid van de rij partiële sommen.
Neem $n \in \mathbb{N}$ en bekijk het verschil

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

Verschillen afschatten

Over de convergentiesnelheid van de rij partiële sommen.
Neem $n \in \mathbb{N}$ en bekijk het verschil

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

Dat is de som van de rij

$$\left\langle \frac{1}{(n+i)!} : i \in \mathbb{N}, i \geqslant 1 \right\rangle$$

Verschillen afschatten

Over de convergentiesnelheid van de rij partiële sommen.
Neem $n \in \mathbb{N}$ en bekijk het verschil

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

Dat is de som van de rij

$$\left\langle \frac{1}{(n+i)!} : i \in \mathbb{N}, i \geqslant 1 \right\rangle$$

We overschatten met een meetkundige rij:

$$\frac{1}{(n+i)!} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{n+2} \cdots \frac{1}{n+i} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{n+2}\right)^{i-1}$$

Verschillen afschatten

We krijgen, met $\frac{1}{(n+1)!}$ buiten de haakjes de som van

$$\left\langle \frac{1}{(n+2)^i} : i \in \mathbb{N} \right\rangle$$

Verschillen afschatten

We krijgen, met $\frac{1}{(n+1)!}$ buiten de haakjes de som van

$$\left\langle \frac{1}{(n+2)^i} : i \in \mathbb{N} \right\rangle$$

en die is gelijk aan

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

Verschillen afschatten

We krijgen, met $\frac{1}{(n+1)!}$ buiten de haakjes de som van

$$\left\langle \frac{1}{(n+2)^i} : i \in \mathbb{N} \right\rangle$$

en die is gelijk aan

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

en daarmee

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{n+2}{(n+1)! \cdot (n+1)} = \frac{n+2}{n! \cdot (n+1)^2}$$

Verschillen afschatten

We krijgen, met $\frac{1}{(n+1)!}$ buiten de haakjes de som van

$$\left\langle \frac{1}{(n+2)^i} : i \in \mathbb{N} \right\rangle$$

en die is gelijk aan

$$\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

en daarmee

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{n+2}{(n+1)!\cdot(n+1)} = \frac{n+2}{n!\cdot(n+1)^2}$$

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$.

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$. Begin met

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$. Begin met

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

en vermenigvuldig met $q!$:

$$q!\mathrm{e} - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$. Begin met

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

en vermenigvuldig met $q!$:

$$q!\mathrm{e} - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

Dit verschil is geheel en ongelijk aan 0.

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$. Begin met

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

en vermenigvuldig met $q!$:

$$q!\mathrm{e} - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

Dit verschil is geheel en ongelijk aan 0.

En tegelijkertijd kleiner dan

$$\frac{q+2}{(q+1)^2}$$

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$. Begin met

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

en vermenigvuldig met $q!$:

$$q!\mathrm{e} - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

Dit verschil is geheel en ongelijk aan 0.

En tegelijkertijd kleiner dan

$$\frac{q+2}{(q+1)^2} = \frac{q+2}{q^2+2q+1}$$

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$. Begin met

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

en vermenigvuldig met $q!$:

$$q!\mathrm{e} - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

Dit verschil is geheel en ongelijk aan 0.

En tegelijkertijd kleiner dan

$$\frac{q+2}{(q+1)^2} = \frac{q+2}{q^2+2q+1} = \frac{q+2}{q\cdot(q+2)+1}$$

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$. Begin met

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

en vermenigvuldig met $q!$:

$$q!\mathrm{e} - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

Dit verschil is geheel en ongelijk aan 0.

En tegelijkertijd kleiner dan

$$\frac{q+2}{(q+1)^2} = \frac{q+2}{q^2+2q+1} = \frac{q+2}{q\cdot(q+2)+1} \leqslant \frac{q+2}{(q+2)+1}$$

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$. Begin met

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

en vermenigvuldig met $q!$:

$$q!\mathrm{e} - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

Dit verschil is geheel en ongelijk aan 0.

En tegelijkertijd kleiner dan

$$\frac{q+2}{(q+1)^2} = \frac{q+2}{q^2+2q+1} = \frac{q+2}{q\cdot(q+2)+1} \leqslant \frac{q+2}{(q+2)+1} < 1$$

Niet rationaal

Stel nu dat $\mathrm{e} = \frac{p}{q}$, met $p, q \in \mathbb{N}$. Begin met

$$\mathrm{e} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

en vermenigvuldig met $q!$:

$$q!\mathrm{e} - q!\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)$$

Dit verschil is geheel en ongelijk aan 0.

En tegelijkertijd kleiner dan

$$\frac{q+2}{(q+1)^2} = \frac{q+2}{q^2+2q+1} = \frac{q+2}{q\cdot(q+2)+1} \leqslant \frac{q+2}{(q+2)+1} < 1$$

TEGENSPRAAK!

Outline

Het getal e

- Van samengesteld interest naar som
- En nu volgens onze definities
- Wat deed Euler?

Irrationaliteiten

- e is irrationaal
- $\sqrt{2}$ is irrationaal
- π is irrationaal

Een paar slotopmerkingen

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

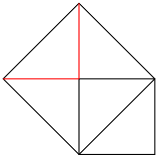
Meetkundig is het geen kunst: de diagonaal van een vierkant met zijden 1 heeft lengte $\sqrt{2}$.

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Meetkundig is het geen kunst: de diagonaal van een vierkant met zijden 1 heeft lengte $\sqrt{2}$.
Dat wil zeggen: het vierkant op de diagonaal van een vierkant met zijden 1 is tweemaal dat oorspronkelijke vierkant.

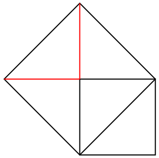
Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Meetkundig is het geen kunst: de diagonaal van een vierkant met zijden 1 heeft lengte $\sqrt{2}$.
Dat wil zeggen: het vierkant op de diagonaal van een vierkant met zijden 1 is tweemaal dat oorspronkelijke vierkant.



Hoe maak je $\sqrt{2}$?

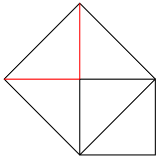
Meetkundig is het geen kunst: de diagonaal van een vierkant met zijden 1 heeft lengte $\sqrt{2}$.
Dat wil zeggen: het vierkant op de diagonaal van een vierkant met zijden 1 is tweemaal dat oorspronkelijke vierkant.



Hoe maken we $\sqrt{2}$ arithmetisch?

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Meetkundig is het geen kunst: de diagonaal van een vierkant met zijden 1 heeft lengte $\sqrt{2}$.
Dat wil zeggen: het vierkant op de diagonaal van een vierkant met zijden 1 is tweemaal dat oorspronkelijke vierkant.



Hoe maken we $\sqrt{2}$ arithmetisch?
Hoe maken we een positief getal x dat voldoet aan $x^2 = 2$?

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Als de limiet van een rij

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Als de limiet van een rij, die de Babyloniërs al kenden.

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Als de limiet van een rij, die de Babyloniërs al kenden.

Begin met $x_0 = 2$, en definieer recursief $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$.

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Als de limiet van een rij, die de Babyloniërs al kenden.

Begin met $x_0 = 2$, en definieer recursief $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$.

De rij $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ is strict dalend en naar beneden begrensd

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Als de limiet van een rij, die de Babyloniërs al kenden.

Begin met $x_0 = 2$, en definieer recursief $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$.

De rij $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ is strict dalend en naar beneden begrensd, door 0 bijvoorbeeld.

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Als de limiet van een rij, die de Babyloniërs al kenden.

Begin met $x_0 = 2$, en definieer recursief $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$.

De rij $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ is strict dalend en naar beneden begrensd, door 0 bijvoorbeeld.

Dus

$$L = \lim_{n \to \infty} x_n$$

bestaat.

Hoe maak je $\sqrt{2}$?

Als de limiet van een rij, die de Babyloniërs al kenden.

Begin met $x_0 = 2$, en definieer recursief $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$.

De rij $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ is strict dalend en naar beneden begrensd, door 0 bijvoorbeeld.

Dus

$$L = \lim_{n \to \infty} x_n$$

bestaat.

En verder geldt $L^2 = 2$.

Irrationaliteit

Hoe bewijzen we dat?

Irrationaliteit

Hoe bewijzen we dat?

Met behulp van het algoritme van Euclides.

Irrationaliteit

Hoe bewijzen we dat?

Met behulp van het algoritme van Euclides.

Boek X, Propositie II; vertaling Dijksterhuis

Wanneer als van twee ongelijke grootheden steeds door de kleinste van de grootste wordt afgenomen, de overblijvende nooit de aan haar voorgaande meet, zullen de grootheden asymmetrisch zijn.

Irrationaliteit

Hoe bewijzen we dat?

Met behulp van het algoritme van Euclides.

Boek X, Propositie II; vertaling Dijksterhuis

Wanneer als van twee ongelijke grootheden steeds door de kleinste van de grootste wordt afgenomen, de overblijvende nooit de aan haar voorgaande meet, zullen de grootheden asymmetrisch zijn.

In modernere termen: als het algoritme van Euclides, toegepast op twee reële getallen niet termineert dan is de verhouding tussen die twee getallen niet rationaal.

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

1. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

1. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$
2. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-2\sqrt{2} + 3)$

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

1. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$
2. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-2\sqrt{2} + 3)$! NB $-2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} - 1)^2$!

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

1. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$
2. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-2\sqrt{2} + 3)$! NB $-2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} - 1)^2$!, dus er staat

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

1. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$
2. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-2\sqrt{2} + 3)$! NB $-2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} - 1)^2$!, dus er staat
3. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2$

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

1. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$
2. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-2\sqrt{2} + 3)$! NB $-2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} - 1)^2$!, dus er staat
3. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2$
4. $\sqrt{2} - 1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^3$

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

1. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$
2. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-2\sqrt{2} + 3)$! NB $-2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} - 1)^2$!, dus er staat
3. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2$
4. $\sqrt{2} - 1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^3$
5. $(\sqrt{2} - 1)^2 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^3 + (\sqrt{2} - 1)^4$

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

1. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$
2. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-2\sqrt{2} + 3)$! NB $-2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} - 1)^2$!, dus er staat
3. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2$
4. $\sqrt{2} - 1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^3$
5. $(\sqrt{2} - 1)^2 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^3 + (\sqrt{2} - 1)^4$
6. &c. in infinitum

Irrationaliteit

Voer het algoritme uit op $\sqrt{2}$ en 1:

1. $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$
2. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (-2\sqrt{2} + 3)$! NB $-2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} - 1)^2$!, dus er staat
3. $1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} - 1)^2$
4. $\sqrt{2} - 1 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^2 + (\sqrt{2} - 1)^3$
5. $(\sqrt{2} - 1)^2 = 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^3 + (\sqrt{2} - 1)^4$
6. &c. in infinitum

$\sqrt{2}$ en 1 zijn asymmetrisch; ze hebben geen gemeenschappelijke maat, hun verhouding is irrationaal.

Outline

- Het getal e
  - Van samengesteld interest naar som
  - En nu volgens onze definities
  - Wat deed Euler?
- Irrationaliteiten
  - e is irrationaal
  - $\sqrt{2}$ is irrationaal
  - π is irrationaal
- Een paar slotopmerkingen

Wat uitdrukkingen voor π

Voor π zijn de meest uiteenlopende formules bedacht.

Wat uitdrukkingen voor π

Voor π zijn de meest uiteenlopende formules bedacht.

J. Wallis (1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \&c \text{ in infinitum}$$

Wat uitdrukkingen voor π

Voor π zijn de meest uiteenlopende formules bedacht.

J. Wallis (1655)

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \&c \text{ in infinitum}$$

Wallis drukte dit overigens uit in een reeks ongelijkheden.

Wat uitdrukkingen voor π

Hoc est, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \dfrac{3\times 3}{2\times 4}\times\sqrt{1\tfrac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \dfrac{3\times 3}{2\times 4}\times\sqrt{1\tfrac{1}{4}}. \end{cases}$

Et (pari ratione) erit $\delta = c \times \dfrac{\delta}{c} = \dfrac{4\times 6}{3\times 5}\,\square \begin{cases} \text{minor quã } \dfrac{3\times 5}{2\times 4}\times\sqrt{1\tfrac{1}{5}}. \\ \text{major quã } \dfrac{3\times 5}{2\times 4}\times\sqrt{1\tfrac{1}{6}}. \end{cases}$

Hoc est, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \dfrac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 4\times 4\times 6}\sqrt{1\tfrac{1}{5}}. \\ \text{major quam } \dfrac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 4\times 4\times 6}\sqrt{1\tfrac{1}{6}}. \end{cases}$

Et (continuatà ejusmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

$$\square \begin{cases} \text{minor quam } \dfrac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12\times 14}\times\sqrt{1\tfrac{1}{13}}. \\ \text{major quam } \dfrac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12\times 14}\times\sqrt{1\tfrac{1}{14}}. \end{cases}$$

Wat uitdrukkingen voor π

Eén die iedere eerstejaarsstudent wel kent

Wat uitdrukkingen voor π

Eén die iedere eerstejaarsstudent wel kent:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c. \text{ in infinitum}$$

Wat uitdrukkingen voor π

Eén die iedere eerstejaarsstudent wel kent:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c.\ \text{in infinitum}$$

Madhava (1360–1450) en G. Leibniz (1682)

Wat uitdrukkingen voor π

Eén die iedere eerstejaarsstudent wel kent:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c. \text{ in infinitum}$$

Madhava (1360–1450) en G. Leibniz (1682)

Madhava: machtreeks van de arctangens.

Wat uitdrukkingen voor π

Eén die iedere eerstejaarsstudent wel kent:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c. \text{ in infinitum}$$

Madhava (1360–1450) en G. Leibniz (1682)

Madhava: machtreeks van de arctangens.
Zie de Wikipediapagina Madhava series voor wat geschiedenis.

Wat uitdrukkingen voor π

Eén die iedere eerstejaarsstudent wel kent:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \&c. \text{ in infinitum}$$

Madhava (1360–1450) en G. Leibniz (1682)

Madhava: machtreeks van de arctangens.
Zie de Wikipediapagina Madhava series voor wat geschiedenis.

Leibniz: de oppervlakte van een kwart cirkel op een totaal andere manier.

π is irrationaal

Daar zijn vele bewijzen van gegeven.
Het eenvoudigste bewijs dat ik ken zou een apart college vergen en veel uithoudingsvermogen van het publiek.
Dus deze keer maar niet.

Outline

- Het getal e
  - Van samengesteld interest naar som
  - En nu volgens onze definities
  - Wat deed Euler?
- Irrationaliteiten
  - e is irrationaal
  - $\sqrt{2}$ is irrationaal
  - π is irrationaal
- Een paar slotopmerkingen

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

De rij van Madhava en Leibniz is sommeerbaar.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

De rij van Madhava en Leibniz is sommeerbaar.

De algemene term is $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

De rij van Madhava en Leibniz is sommeerbaar.

De algemene term is $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

De even partiële vormen een dalende rij:

$$s_{2n+2} = s_{2n} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} < s_{2n}$$

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

De rij van Madhava en Leibniz is sommeerbaar.

De algemene term is $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

De even partiële vormen een dalende rij:

$$s_{2n+2} = s_{2n} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} < s_{2n}$$

De oneven partële sommen vormen een stijgende rij:

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} > s_{2n+1}$$

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

De rij van Madhava en Leibniz is sommeerbaar.

De algemene term is $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

De even partiële vormen een dalende rij:

$$s_{2n+2} = s_{2n} - \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+5} < s_{2n}$$

De oneven partële sommen vormen een stijgende rij:

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} > s_{2n+1}$$

De verschillen convergeren naar 0:

$$s_{2n} - s_{2n-1} = \frac{1}{2n+3}$$

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Dankzij Dedekind weten we dat er een getal is dat boven alle oneven partiële sommen ligt en onder alle even partiële sommen.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Dankzij Dedekind weten we dat er een getal is dat boven alle oneven partiële sommen ligt en onder alle even partiële sommen.

En omdat de verschillen naar nul convergeren is er precies één zo'n getal.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Dankzij Dedekind weten we dat er een getal is dat boven alle oneven partiële sommen ligt en onder alle even partiële sommen.

En omdat de verschillen naar nul convergeren is er precies één zo'n getal.

Dat getal is de som van de rij.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Dankzij Dedekind weten we dat er een getal is dat boven alle oneven partiële sommen ligt en onder alle even partiële sommen.

En omdat de verschillen naar nul convergeren is er precies één zo'n getal.

Dat getal is de som van de rij.

En dat getal is gelijk aan $\frac{\pi}{4}$.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Dankzij Dedekind weten we dat er een getal is dat boven alle oneven partiële sommen ligt en onder alle even partiële sommen.

En omdat de verschillen naar nul convergeren is er precies één zo'n getal.

Dat getal is de som van de rij.

En dat getal is gelijk aan $\frac{\pi}{4}$.

Precies hetzelfde bewijs levert dat de rij $\langle \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \rangle$ sommeerbaar is.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Dankzij Dedekind weten we dat er een getal is dat boven alle oneven partiële sommen ligt en onder alle even partiële sommen.

En omdat de verschillen naar nul convergeren is er precies één zo'n getal.

Dat getal is de som van de rij.

En dat getal is gelijk aan $\frac{\pi}{4}$.

Precies hetzelfde bewijs levert dat de rij $\langle \frac{(-1)^n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \rangle$ sommeerbaar is.

Dus

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

bestaat.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Voor beide rijen was het vaststellen dat er een som is niet moeilijk, gegeven het werk van Dedekind.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Voor beide rijen was het vaststellen dat er een som is niet moeilijk, gegeven het werk van Dedekind.

Wat vaak veel meer werk is is het bepalen van de waarde van de som.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Voor beide rijen was het vaststellen dat er een som is niet moeilijk, gegeven het werk van Dedekind.

Wat vaak veel meer werk is is het bepalen van de waarde van de som.

Daar is vaak veel inventiviteit voor nodig.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Ten slotte.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Ten slotte.

Als we van de termen van de laatste twee rijen de absolute waarden nemen krijgen we niet-sommeerbare rijen.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Ten slotte.

Als we van de termen van de laatste twee rijen de absolute waarden nemen krijgen we niet-sommeerbare rijen.

Rijen waarvan het absolute-waarde-nemen wel een sommeerbare rij oplevert heten absoluut of onvoorwaardelijk sommeerbaar.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Ten slotte.

Als we van de termen van de laatste twee rijen de absolute waarden nemen krijgen we niet-sommeerbare rijen.

Rijen waarvan het absolute-waarde-nemen wel een sommeerbare rij oplevert heten absoluut of onvoorwaardelijk sommeerbaar.

De reden is dat de rij sommeerbaar blijft als je de volgorde omgooit, en met dezelfde som (stelling van Riemann).

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Ten slotte.

Als we van de termen van de laatste twee rijen de absolute waarden nemen krijgen we niet-sommeerbare rijen.

Rijen waarvan het absolute-waarde-nemen wel een sommeerbare rij oplevert heten absoluut of onvoorwaardelijk sommeerbaar.

De reden is dat de rij sommeerbaar blijft als je de volgorde omgooit, en met dezelfde som (stelling van Riemann).

Bij de rij voor $\frac{\pi}{4}$ en die andere (met som $\ln 2$) kun je door geschikte permutaties te kiezen elk getal als som krijgen.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Ten slotte.

Als we van de termen van de laatste twee rijen de absolute waarden nemen krijgen we niet-sommeerbare rijen.

Rijen waarvan het absolute-waarde-nemen wel een sommeerbare rij oplevert heten absoluut of onvoorwaardelijk sommeerbaar.

De reden is dat de rij sommeerbaar blijft als je de volgorde omgooit, en met dezelfde som (stelling van Riemann).

Bij de rij voor $\frac{\pi}{4}$ en die andere (met som $\ln 2$) kun je door geschikte permutaties te kiezen elk getal als som krijgen.

Dat maakt deze relatief of voorwaardelijk sommeerbare rijen soms lastiger om mee te werken.

(On)voorwaardelijke sommeerbaarheid

Ten slotte.

Als we van de termen van de laatste twee rijen de absolute waarden nemen krijgen we niet-sommeerbare rijen.

Rijen waarvan het absolute-waarde-nemen wel een sommeerbare rij oplevert heten absoluut of onvoorwaardelijk sommeerbaar.

De reden is dat de rij sommeerbaar blijft als je de volgorde omgooit, en met dezelfde som (stelling van Riemann).

Bij de rij voor $\frac{\pi}{4}$ en die andere (met som $\ln 2$) kun je door geschikte permutaties te kiezen elk getal als som krijgen.

Dat maakt deze relatief of voorwaardelijk sommeerbare rijen soms lastiger om mee te werken.

Zie ook de aantekeningen bij 22-05-2024.