G Vitali

GIUSEPPE VITALI

OPERE

sull'analisi reale e complessa

Carteggio

a cura

dell'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

con contributo del

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

EDIZIONI CREMONESE
1984

Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta

NOTA

DI

G. VITALI

BOLOGNA

TIP. GAMBERINI E PARMEGGIANI

1905

Il problema della misura dei gruppi di punti di una retta r è quello di determinare per ogni gruppo A di punti di r un numero reale e positivo $\mu(A)$, che dovrà dirsi ***misura*** di A, in modo che:

1°) Due gruppi che si possono far coincidere con un conveniente spostamento rigido di uno di essi abbiano la stessa misura.

2°) Il gruppo somma di un numero finito o di un infinità numerabile di gruppi, senza punti comuni a due a due, abbia per misura la somma delle misure.

3°) La misura del gruppo di tutti i punti dell' intervallo $(0, 1)$ sia 1. (*)

Sia x un punto di r. I punti di r che differiscono da x per un numero razionale qualsiasi positivo, negativo o nullo formano un gruppo A_x nume-

(*) v. *Leçons* sur l' intégration ecc. par H. Lebesque p. 103. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

rabile. Se A_{x_1} e A_{x_2} sono due tali gruppi, o essi sono senza punti comuni o coincidono.

Consideriamo i diversi gruppi A_x; essi, considerati come elementi, formano un gruppo H. Se P è un punto qualsiasi di r, esisterà un elemento ed uno solo di H a cui P appartiene.

Consideriamo per ogni elemento α di H un punto P_α dell' intervallo $(0, {}^1\!/_2)$ che appartenga ad α, ed indichiamo con G_0 il gruppo dei punti P_α. Se poi ρ è un numero razionale qualsiasi, indicheremo con G_ρ il gruppo dei punti $P_\alpha - \rho$.

I gruppi G_ρ corrispondenti ai diversi valori razionali di ρ sono a due a due senza punti comuni, essi inoltre sono un' infinità numerabile e devono avere per la 1ª) la stessa misura.

I gruppi

$$G_0, \; G_{\frac{1}{2}}, \; G_{\frac{1}{3}}, \; G_{\frac{1}{4}}, \ldots\ldots$$

cadono tutti nell' intervallo $(0, 1)$, quindi la loro somma deve avere una misura $m \leq 1$.

Ma deve essere

$$\begin{aligned} m &= \mu(G_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(G_{\frac{1}{n}}) \\ &= \lim_{n=\infty} n \cdot \mu(G_0), \end{aligned}$$

e quindi

$$\mu(G_0) = 0.$$

Ma allora la somma di tutti i G_ρ corrispondenti ai diversi valori razionali di ρ deve essa pure avere misura nulla. Però questa somma è il gruppo di tutti i punti di r e quindi dovrebbe avere misura infinita.

Ciò basta per concludere che: ***il problema della misura dei gruppi di punti di una retta è impossibile.***

Qualche cosa si potrebbe obiettare circa la considerazione del gruppo G_0. Questa si può perfettamente giustificare se si ammette che il continuo si possa bene ordinare. Per chi non voglia ammettere ciò il nostro risultato significa che: *la possibilità del problema della misura dei gruppi di punti di una retta e quella di bene ordinare il continuo non possono coesistere.*