

Vergelijkingen in Griekenland en China

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 8 april 2025

Outline

Griekenland

Euclides

Diophantus

China

Inleiding

Er was contact tussen de Mesopotamiërs en de Grieken.

Inleiding

Er was contact tussen de Mesopotamiërs en de Grieken.

De Grieken kenden bijvoorbeeld de waarnemingen aan de sterren uit Mesopotamië.

Inleiding

Er was contact tussen de Mesopotamiërs en de Grieken.

De Grieken kenden bijvoorbeeld de waarnemingen aan de sterren uit Mesopotamië.

Wat niet duidelijk is is wat de Grieken met de algebraïsche werken gedaan hebben.

Inleiding

Er was contact tussen de Mesopotamiërs en de Grieken.

De Grieken kenden bijvoorbeeld de waarnemingen aan de sterren uit Mesopotamië.

Wat niet duidelijk is is wat de Grieken met de algebraïsche werken gedaan hebben.

De algebra (anachronisme) van de Grieken die we kennen was veel meetkundiger.

Inleiding

Er was contact tussen de Mesopotamiërs en de Grieken.

De Grieken kenden bijvoorbeeld de waarnemingen aan de sterren uit Mesopotamië.

Wat niet duidelijk is is wat de Grieken met de algebraïsche werken gedaan hebben.

De algebra (anachronisme) van de Grieken die we kennen was veel meetkundiger.

We kijken even bij Euclides

Inleiding

Er was contact tussen de Mesopotamiërs en de Grieken.

De Grieken kenden bijvoorbeeld de waarnemingen aan de sterren uit Mesopotamië.

Wat niet duidelijk is is wat de Grieken met de algebraïsche werken gedaan hebben.

De algebra (anachronisme) van de Grieken die we kennen was veel meetkundiger.

We kijken even bij Euclides (waar anders?).

Inleiding

Er was contact tussen de Mesopotamiërs en de Grieken.

De Grieken kenden bijvoorbeeld de waarnemingen aan de sterren uit Mesopotamië.

Wat niet duidelijk is is wat de Grieken met de algebraïsche werken gedaan hebben.

De algebra (anachronisme) van de Grieken die we kennen was veel meetkundiger.

We kijken even bij Euclides (waar anders?).

Boek II van *De Elementen*.

Inleiding

Er was contact tussen de Mesopotamiërs en de Grieken.

De Grieken kenden bijvoorbeeld de waarnemingen aan de sterren uit Mesopotamië.

Wat niet duidelijk is is wat de Grieken met de algebraïsche werken gedaan hebben.

De algebra (anachronisme) van de Grieken die we kennen was veel meetkundiger.

We kijken even bij Euclides (waar anders?).

Boek II van *De Elementen*.

(Vertaling van E. J. Dijksterhuis.)

Outline

Griekenland

Euclides

Diophantus

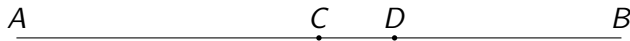
China

Boek II, Propositie 5

Indien een rechte lijn verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, is de rechthoek, omvat door de ongelijke delen van het geheel, samen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.

Boek II, Propositie 5

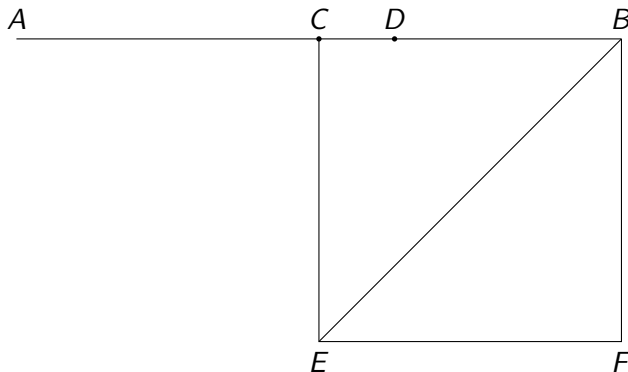
Indien een rechte lijn verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, is de rechthoek, omvat door de ongelijke delen van het geheel, samen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.



De lijn AB wordt bij C (gelijk) en D (ongelijk) gedeeld.

Boek II, Propositie 5

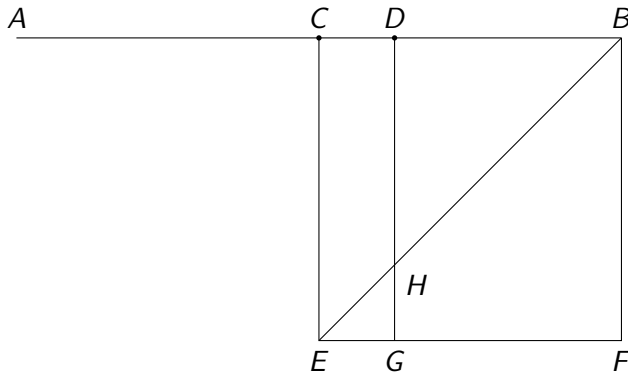
Indien een rechte lijn verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, is de rechthoek, omvat door de ongelijke delen van het geheel, samen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.



De lijn AB wordt bij C (gelijk) en D (ongelijk) gedeeld.

Boek II, Propositie 5

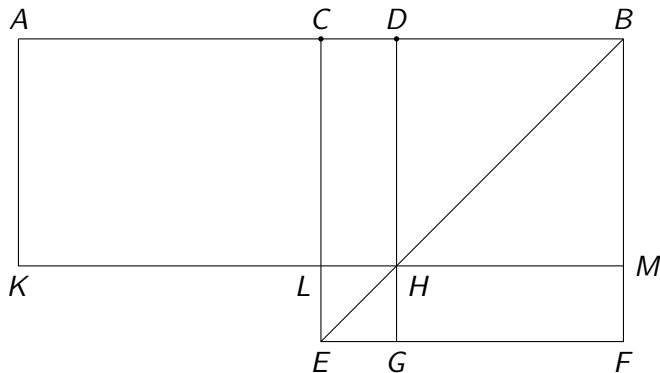
Indien een rechte lijn verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, is de rechthoek, omvat door de ongelijke delen van het geheel, samen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.



De lijn AB wordt bij C (gelijk) en D (ongelijk) gedeeld.

Boek II, Propositie 5

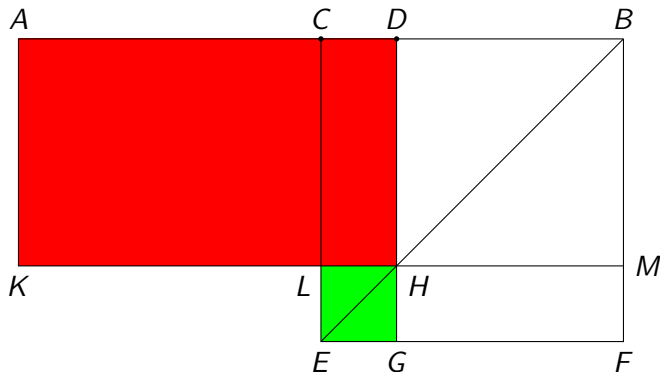
Indien een rechte lijn verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, is de rechthoek, omvat door de ongelijke delen van het geheel, samen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.



De lijn AB wordt bij C (gelijk) en D (ongelijk) gedeeld.
Ik zeg dat

Boek II, Propositie 5

Indien een rechte lijn verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, is de rechthoek, omvat door de ongelijke delen van het geheel, samen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.

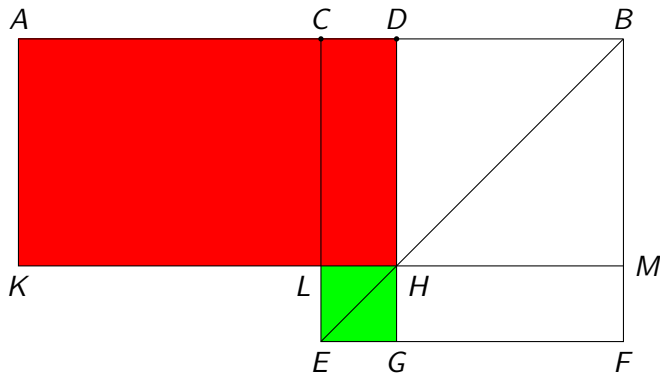


De lijn AB wordt bij C (gelijk) en D (ongelijk) gedeeld.

Ik zeg dat de rechthoek $AD \times BD$ en het vierkant op CD gelijk zijn aan

Boek II, Propositie 5

Indien een rechte lijn verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, is de rechthoek, omvat door de ongelijke delen van het geheel, samen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.

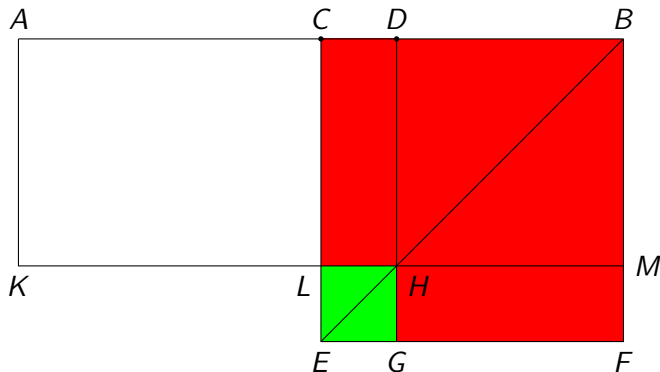


De lijn AB wordt bij C (gelijk) en D (ongelijk) gedeeld.

Ik zeg dat de rechthoek $AD \times BD$ en het vierkant op CD gelijk zijn aan het vierkant op BC .

Boek II, Propositie 5

Indien een rechte lijn verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, is de rechthoek, omvat door de ongelijke delen van het geheel, samen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op de helft.



De lijn AB wordt bij C (gelijk) en D (ongelijk) gedeeld.

Ik zeg dat de rechthoek $AD \times BD$ en het vierkant op CD gelijk zijn aan het vierkant op BC .

Want $AC \times AK$ en $BF \times BD$ zijn gelijk.

Boek II

Wat gebeurt er?

De rechte AB is gegeven en wordt verdeeld in $x = AD$ en $y = DB$.

Boek II

Wat gebeurt er?

De rechte AB is gegeven en wordt verdeeld in $x = AD$ en $y = DB$.

Dan is CD gelijk aan $x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y)$.

Boek II

Wat gebeurt er?

De rechte AB is gegeven en wordt verdeeld in $x = AD$ en $y = DB$.

Dan is CD gelijk aan $x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y)$.

De stelling zegt: $xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Boek II

Wat gebeurt er?

De rechte AB is gegeven en wordt verdeeld in $x = AD$ en $y = DB$.

Dan is CD gelijk aan $x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y)$.

De stelling zegt: $xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Dit kan worden gebruikt om een gegeven lijnstuk met lengte b te verdelen in twee stukken met voorgegeven product c^2 .

Boek II

Wat gebeurt er?

De rechte AB is gegeven en wordt verdeeld in $x = AD$ en $y = DB$.

Dan is CD gelijk aan $x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y)$.

De stelling zegt: $xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Dit kan worden gebruikt om een gegeven lijnstuk met lengte b te verdelen in twee stukken met voorgegeven product c^2 .

Omdat $y = b - x$ komt dit neer op het oplossen van $x(b - x) = c^2$ ofwel $x^2 - bx + c^2 = 0$, of ook $x^2 + c^2 = bx$.

Boek II

Wat gebeurt er?

De rechte AB is gegeven en wordt verdeeld in $x = AD$ en $y = DB$.

Dan is CD gelijk aan $x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y)$.

De stelling zegt: $xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Dit kan worden gebruikt om een gegeven lijnstuk met lengte b te verdelen in twee stukken met voorgegeven product c^2 .

Omdat $y = b - x$ komt dit neer op het oplossen van $x(b - x) = c^2$ ofwel $x^2 - bx + c^2 = 0$, of ook $x^2 + c^2 = bx$.

Of invullen in het resultaat:

$$c^2 + CD^2 = \frac{1}{4}b^2$$

Boek II

Wat gebeurt er?

De rechte AB is gegeven en wordt verdeeld in $x = AD$ en $y = DB$.

Dan is CD gelijk aan $x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y)$.

De stelling zegt: $xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Dit kan worden gebruikt om een gegeven lijnstuk met lengte b te verdelen in twee stukken met voorgegeven product c^2 .

Omdat $y = b - x$ komt dit neer op het oplossen van $x(b - x) = c^2$ ofwel $x^2 - bx + c^2 = 0$, of ook $x^2 + c^2 = bx$.

Of invullen in het resultaat:

$$c^2 + CD^2 = \frac{1}{4}b^2$$

maak dus een rechthoekige driehoek met hypothenusa $\frac{1}{2}b$ en rechthoekszijde c

Boek II

Wat gebeurt er?

De rechte AB is gegeven en wordt verdeeld in $x = AD$ en $y = DB$.

Dan is CD gelijk aan $x - \frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}(x - y)$.

De stelling zegt: $xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Dit kan worden gebruikt om een gegeven lijnstuk met lengte b te verdelen in twee stukken met voorgegeven product c^2 .

Omdat $y = b - x$ komt dit neer op het oplossen van $x(b - x) = c^2$ ofwel $x^2 - bx + c^2 = 0$, of ook $x^2 + c^2 = bx$.

Of invullen in het resultaat:

$$c^2 + CD^2 = \frac{1}{4}b^2$$

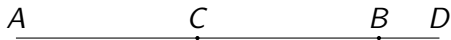
maak dus een rechthoekige driehoek met hypothenusa $\frac{1}{2}b$ en rechthoekszijde c ; de andere rechthoekszijde is als gewenst.

Boek II, Propositie 6

Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.

Boek II, Propositie 6

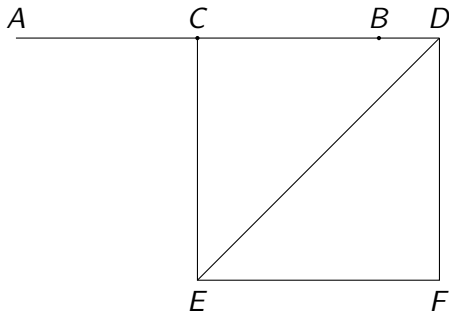
Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.



De lijn AB wordt bij C gelijk gedeeld en BD wordt toegevoegd.

Boek II, Propositie 6

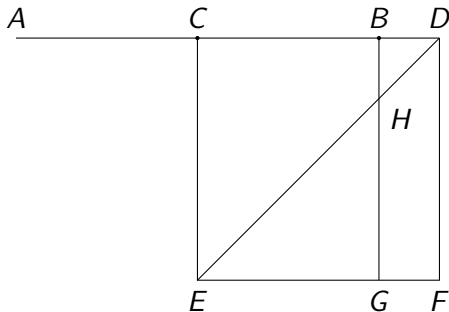
Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.



De lijn AB wordt bij C gelijk gedeeld en BD wordt toegevoegd.

Boek II, Propositie 6

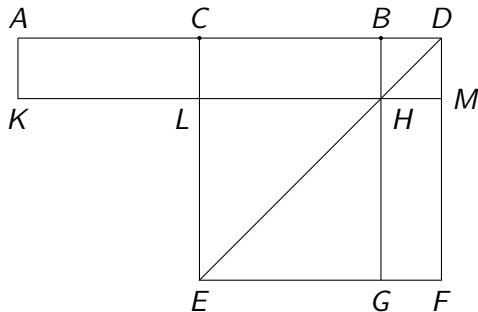
Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.



De lijn AB wordt bij C gelijk gedeeld en BD wordt toegevoegd.

Boek II, Propositie 6

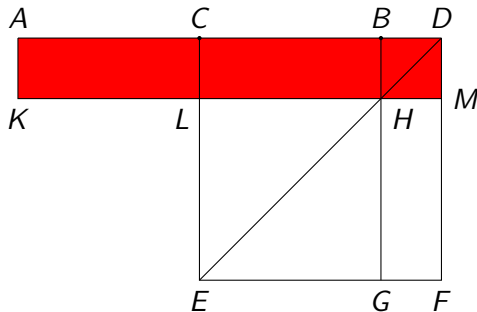
Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.



De lijn AB wordt bij C gelijk gedeeld en BD wordt toegevoegd.
Ik zeg dat

Boek II, Propositie 6

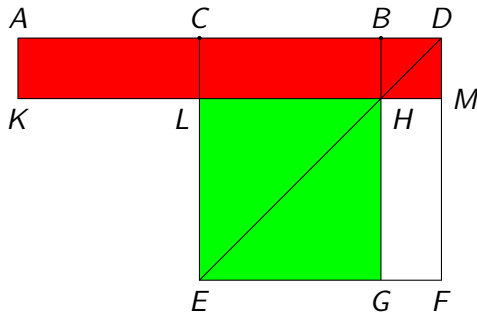
Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.



De lijn AB wordt bij C gelijk gedeeld en BD wordt toegevoegd.
Ik zeg dat de rechthoek $AD \times BD$ en

Boek II, Propositie 6

Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.

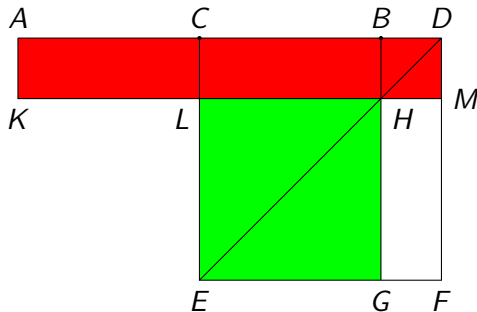


De lijn AB wordt bij C gelijk gedeeld en BD wordt toegevoegd.

Ik zeg dat de rechthoek $AD \times BD$ en het vierkant op CB gelijk zijn aan

Boek II, Propositie 6

Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.

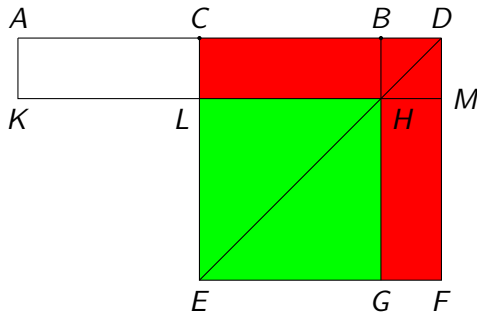


De lijn AB wordt bij C gelijk gedeeld en BD wordt toegevoegd.

Ik zeg dat de rechthoek $AD \times BD$ en het vierkant op CB gelijk zijn aan het vierkant op CD .

Boek II, Propositie 6

Indien een rechte lijn middendoor wordt gedeeld en er wordt een rechte in rechte lijn aan haar toegevoegd, dan is de rechthoek, omvat door de hele rechte met de toegevoegde en de toegevoegde, samen met het vierkant op de helft gelijk aan het vierkant op de rechte, bestaande uit de helft en de toegevoegde.



De lijn AB wordt bij C gelijk gedeeld en BD wordt toegevoegd.

Ik zeg dat de rechthoek $AD \times BD$ en het vierkant op CB gelijk zijn aan het vierkant op CD .

Want $AC \times AK$ en $GH \times GF$ zijn gelijk.

Boek II

Hier gebeurt het omgekeerde van Propositie 5: nu hebben we $x = AD$ en $y = BD$ en $x - y = b = AB$. Algebraïsch: $x(x - b) = (x - \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2$.

Boek II

Hier gebeurt het omgekeerde van Propositie 5: nu hebben we $x = AD$ en $y = BD$ en $x - y = b = AB$. Algebraïsch: $x(x - b) = (x - \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2$.

Dit leidt tot het oplossen van: bepaal x en y zó dat $x - y = b$ en $xy = c^2$.

Boek II

Hier gebeurt het omgekeerde van Propositie 5: nu hebben we $x = AD$ en $y = BD$ en $x - y = b = AB$. Algebraïsch: $x(x - b) = (x - \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}b^2$.

Dit leidt tot het oplossen van: bepaal x en y zó dat $x - y = b$ en $xy = c^2$.

Vergelijk dit met de Mesopotamische sommen van vorige week.

Boek II

Propositie 11

Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.

Boek II

Propositie 11

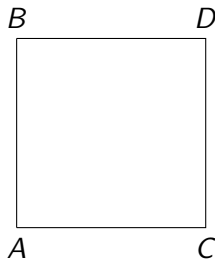
Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.



Boek II

Propositie 11

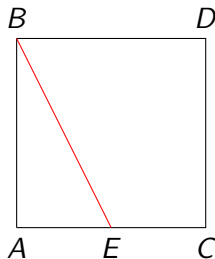
Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.



Boek II

Propositie 11

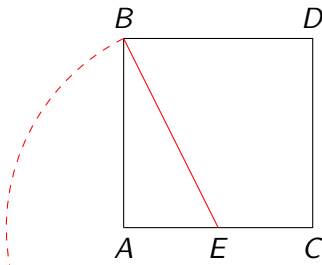
Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.



Boek II

Propositie 11

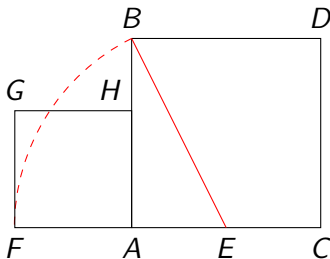
Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.



Boek II

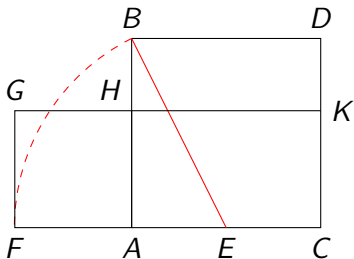
Propositie 11

Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.



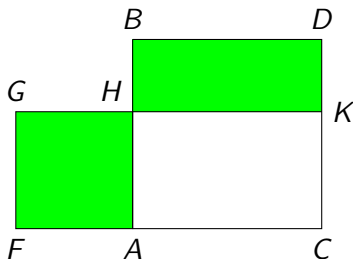
Propositie 11

Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.



Propositie 11

Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.



In formule: $a(a - x) = x^2$, ofwel $x^2 + ax = a^2$, met $a = AB$ en $x = AH$.

Euclides

Dit komt terug in Boek VI.

Definitie 3

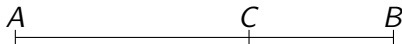
We zeggen dat een lijnstuk verdeeld is in uiterste en middelste reden als, zo het hele lijnstuk is tot het grootste deel, het grotere tot het kleinere is.

Euclides

Dit komt terug in Boek VI.

Definitie 3

We zeggen dat een lijnstuk verdeeld is in uiterste en middelste reden als, zo het hele lijnstuk is tot het grootste deel, het grotere tot het kleinere is.

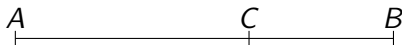


Euclides

Dit komt terug in Boek VI.

Definitie 3

We zeggen dat een lijnstuk verdeeld is in uiterste en middelste reden als, zo het hele lijnstuk is tot het grootste deel, het grotere tot het kleinere is.



Wat dit zegt is $AB : AC = AC : CB$.

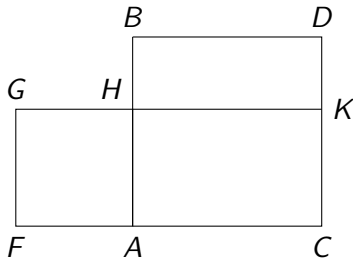
Boek VI, Propositie 30

Een gegeven begrensde rechte in uiterste en middelste reden verdelen.

Boek VI, Propositie 30

Een gegeven begrensde rechte in uiterste en middelste reden verdelen.

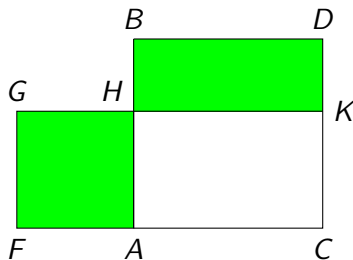
Kijk naar het plaatje van Boek II, Propositie 11



Boek VI, Propositie 30

Een gegeven begrensde rechte in uiterste en middelste reden verdelen.

Kijk naar het plaatje van Boek II, Propositie 11

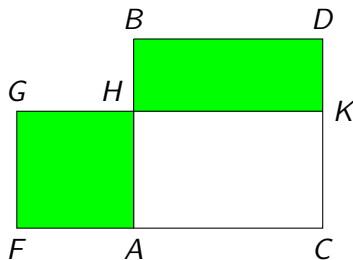


We hebben $AH^2 = HB \cdot AB$

Boek VI, Propositie 30

Een gegeven begrensde rechte in uiterste en middelste reden verdelen.

Kijk naar het plaatje van Boek II, Propositie 11

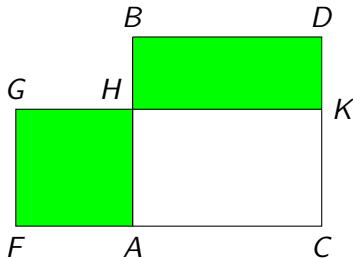


We hebben $AH^2 = HB \cdot AB$, en dus $AB : AH = AH : HB$.

Boek VI, Propositie 30

Een gegeven begrensde rechte in uiterste en middelste reden verdelen.

Kijk naar het plaatje van Boek II, Propositie 11



We hebben $AH^2 = HB \cdot AB$, en dus $AB : AH = AH : HB$.

De gemeenschappelijke verhouding heet nu de Gulden Snede.

Outline

Griekenland

Euclides

Diophantus

China

Arithmetica

De *Arithmetica* van Diophantus ($\approx$ 350 CE)

Arithmetica

De *Arithmetica* van Diophantus (≈ 350 CE)

Vergelijkingen met één of meerdere onbekenden (“Diophantische vergelijkingen”)

Arithmetica

De *Arithmetica* van Diophantus (≈ 350 CE)

Vergelijkingen met één of meerdere onbekenden (“Diophantische vergelijkingen”)

Namen voor machten:

Naam	macht	naam	macht
arithmoi	x	arithmoston	x^{-1}
dynamis	x^2	dynamoston	x^{-2}
kybos	x^3	kyboston	x^{-3}
dynamodynamis	x^4	dynamodynamoston	x^{-4}
dynamokybos	x^5	dynamokyboston	x^{-5}
kybokybos	x^6	kybokyboston	x^{-6}

Arithmetica

Notatie voor veel dingen:

$$K^Y \alpha s \gamma \Lambda \Delta^Y \gamma \overset{\circ}{M} \alpha \text{ for } x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

“Eén (α) derde macht (K^Y),

Arithmetica

Notatie voor veel dingen:

$$K^Y \alpha \varsigma \gamma \Lambda \Delta^Y \gamma \overset{\circ}{M} \alpha \text{ for } x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

“Eén (α) derde macht (K^Y), drie (γ) getallen (ς),

Arithmetica

Notatie voor veel dingen:

$$K^Y \alpha \varsigma \gamma \mathbb{A} \Delta^Y \gamma \overset{\circ}{M} \alpha \text{ for } x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

“Eén (α) derde macht (K^Y), drie (γ) getallen (ς),
verminderd met ($\mathbb{A}$) drie (γ) kwadraten (Δ^Y)

Arithmetica

Notatie voor veel dingen:

$$K^Y \alpha \varsigma \gamma \mathbb{A} \Delta^Y \gamma \mathring{M} \alpha \text{ for } x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

“Eén (α) derde macht (K^Y), drie (γ) getallen (ς),
verminderd met ($\mathbb{A}$) drie (γ) kwadraten (Δ^Y) en één (α) eenheid ($\mathring{M}$)”

Arithmetica

Notatie voor veel dingen:

$$\boxed{K^Y \alpha \varsigma \gamma \blacktriangle \Delta^Y \gamma \mathring{M} \alpha \text{ for } x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

“Eén (α) derde macht (K^Y), drie (γ) getallen (ς),
verminderd met ($\blacktriangle$) drie (γ) kwadraten (Δ^Y) en één (α) eenheid ($\mathring{M}$)”

Optellen: gewoon achter elkaar zetten

Arithmetica

Notatie voor veel dingen:

$$\boxed{K^Y \alpha \varsigma \gamma \Uparrow \Delta^Y \gamma \mathring{M} \alpha \text{ for } x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

“Eén (α) derde macht (K^Y), drie (γ) getallen (ς),
verminderd met ($\Uparrow$) drie (γ) kwadraten (Δ^Y) en één (α) eenheid ($\mathring{M}$)”

Optellen: gewoon achter elkaar zetten

Aftrekken: $\Uparrow$ “verminderd met”

Arithmetica

Diophantus behandelt eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Algebraïsch, in de geest van de Mesopotamiërs.

Arithmetica

Diophantus behandelt eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Algebraïsch, in de geest van de Mesopotamiërs.

Maar ook veel vergelijkingen met meer dan één onbekende.

Arithmetica

Diophantus behandelt eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Algebraïsch, in de geest van de Mesopotamiërs.

Maar ook veel vergelijkingen met meer dan één onbekende.

De gezochte oplossingen zijn altijd rationaal.

Arithmetica

Diophantus behandelt eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Algebraïsch, in de geest van de Mesopotamiërs.

Maar ook veel vergelijkingen met meer dan één onbekende.

De gezochte oplossingen zijn altijd rationaal.

Er zijn dus 'Diophantische vergelijkingen' zonder oplossingen.

Arithmetica

Diophantus behandelt eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Algebraïsch, in de geest van de Mesopotamiërs.

Maar ook veel vergelijkingen met meer dan één onbekende.

De gezochte oplossingen zijn altijd rationaal.

Er zijn dus 'Diophantische vergelijkingen' zonder oplossingen.

In de twintigste eeuw

Arithmetica

Diophantus behandelt eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Algebraïsch, in de geest van de Mesopotamiërs.

Maar ook veel vergelijkingen met meer dan één onbekende.

De gezochte oplossingen zijn altijd rationaal.

Er zijn dus 'Diophantische vergelijkingen' zonder oplossingen.

In de twintigste eeuw:

Hilbert's tiende probleem

Gegeven een diophantische vergelijking met een willekeurig aantal variabelen en met geheeltallige coëfficiënten.

Arithmetica

Diophantus behandelt eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Algebraïsch, in de geest van de Mesopotamiërs.

Maar ook veel vergelijkingen met meer dan één onbekende.

De gezochte oplossingen zijn altijd rationaal.

Er zijn dus 'Diophantische vergelijkingen' zonder oplossingen.

In de twintigste eeuw:

Hilbert's tiende probleem

Gegeven een diophantische vergelijking met een willekeurig aantal variabelen en met geheeltallige coëfficiënten. Stel een methode op waarmee in een eindig aantal stappen kan worden bepaald of er gehele getallen zijn die aan de vergelijking voldoen.

Arithmetica

Diophantus behandelt eerste- en tweedegraadsvergelijkingen. Algebraïsch, in de geest van de Mesopotamiërs.

Maar ook veel vergelijkingen met meer dan één onbekende.

De gezochte oplossingen zijn altijd rationaal.

Er zijn dus 'Diophantische vergelijkingen' zonder oplossingen.

In de twintigste eeuw:

Hilbert's tiende probleem

Gegeven een diophantische vergelijking met een willekeurig aantal variabelen en met geheeltallige coëfficiënten. Stel een methode op waarmee in een eindig aantal stappen kan worden bepaald of er gehele getallen zijn die aan de vergelijking voldoen.

Oplossing (1969): zo'n methode is er niet.

Boek II, probleem VIII

Een kwadraat in twee kwadraten verdelen.

Boek II, probleem VIII

Een kwadraat in twee kwadraten verdelen.

Oplossing: Verdeel 16 in een som van twee kwadraten.

Boek II, probleem VIII

Een kwadraat in twee kwadraten verdelen.

Oplossing: Verdeel 16 in een som van twee kwadraten.

Laat de eerste term gelijk zijn aan x^2 , dus de tweede is $16 - x^2$. De laatste moet een kwadraat zijn.

Boek II, probleem VIII

Een kwadraat in twee kwadraten verdelen.

Oplossing: Verdeel 16 in een som van twee kwadraten.

Laat de eerste term gelijk zijn aan x^2 , dus de tweede is $16 - x^2$. De laatste moet een kwadraat zijn.

Ik vorm het kwadraat van het verschil van een willekeurig veelvoud van x verminderd met de wortel [van] 16, dat wil zeggen, verminderd met 4.

Boek II, probleem VIII

Een kwadraat in twee kwadraten verdelen.

Oplossing: Verdeel 16 in een som van twee kwadraten.

Laat de eerste term gelijk zijn aan x^2 , dus de tweede is $16 - x^2$. De laatste moet een kwadraat zijn.

Ik vorm het kwadraat van het verschil van een willekeurig veelvoud van x verminderd met de wortel [van] 16, dat wil zeggen, verminderd met 4.

Ik vorm, bijvoorbeeld, het kwadraat van $2x - 4$. Het is $4x^2 + 16 - 16x$.

Boek II, probleem VIII

Een kwadraat in twee kwadraten verdelen.

Oplossing: Verdeel 16 in een som van twee kwadraten.

Laat de eerste term gelijk zijn aan x^2 , dus de tweede is $16 - x^2$. De laatste moet een kwadraat zijn.

Ik vorm het kwadraat van het verschil van een willekeurig veelvoud van x verminderd met de wortel [van] 16, dat wil zeggen, verminderd met 4.

Ik vorm, bijvoorbeeld, het kwadraat van $2x - 4$. Het is $4x^2 + 16 - 16x$.

Ik zet deze uitdrukking gelijk aan $16 - x^2$. Ik tel aan beide kanten $x^2 + 16x$ op en trek 16 af. Op deze manier krijg ik $5x^2 = 16x$, en dus $x = 16/5$.

Boek II, probleem VIII

Een kwadraat in twee kwadraten verdelen.

Oplossing: Verdeel 16 in een som van twee kwadraten.

Laat de eerste term gelijk zijn aan x^2 , dus de tweede is $16 - x^2$. De laatste moet een kwadraat zijn.

Ik vorm het kwadraat van het verschil van een willekeurig veelvoud van x verminderd met de wortel [van] 16, dat wil zeggen, verminderd met 4.

Ik vorm, bijvoorbeeld, het kwadraat van $2x - 4$. Het is $4x^2 + 16 - 16x$.

Ik zet deze uitdrukking gelijk aan $16 - x^2$. Ik tel aan beide kanten $x^2 + 16x$ op en trek 16 af. Op deze manier krijg ik $5x^2 = 16x$, en dus $x = 16/5$.

Dus één getal is $256/25$ en het andere $144/25$. De som van deze getallen is 16 en elk is een kwadraat.

Boek II, probleem VIII

Een kwadraat in twee kwadraten verdelen.

Oplossing: Verdeel 16 in een som van twee kwadraten.

Laat de eerste term gelijk zijn aan x^2 , dus de tweede is $16 - x^2$. De laatste moet een kwadraat zijn.

Ik vorm het kwadraat van het verschil van een willekeurig veelvoud van x verminderd met de wortel [van] 16, dat wil zeggen, verminderd met 4.

Ik vorm, bijvoorbeeld, het kwadraat van $2x - 4$. Het is $4x^2 + 16 - 16x$.

Ik zet deze uitdrukking gelijk aan $16 - x^2$. Ik tel aan beide kanten $x^2 + 16x$ op en trek 16 af. Op deze manier krijg ik $5x^2 = 16x$, en dus $x = 16/5$.

Dus één getal is $256/25$ en het andere $144/25$. De som van deze getallen is 16 en elk is een kwadraat.

In zijn exemplaar van de *Arithmetica* schreef een zekere Fransman iets in de kantlijn ...

In de kantlijn van de Arithmetica van Pierre de Fermat

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur $16 - 1 Q.$ æquales esse quadrato. Fingo quadratum a numeris quotquot libuerit, cum defectu tot unitatum quod continet latus ipsius 16. esto $22 N. - 4.$ ipse igitur quadratus erit $4 Q. + 16. - 16 N.$ hæc æquabuntur unitatibus 16 $- 1 Q.$ Communis adiciatur utrimque defectus, & a similibus auferantur similia, sient $5 Q.$ æquales 16 N. & fit 1 N. ⁴¹ Erigitur alter quadratorum ¹¹ alter verò ²¹ & vtriusque summa est ³¹ seu 16. & vterque quadratus est.

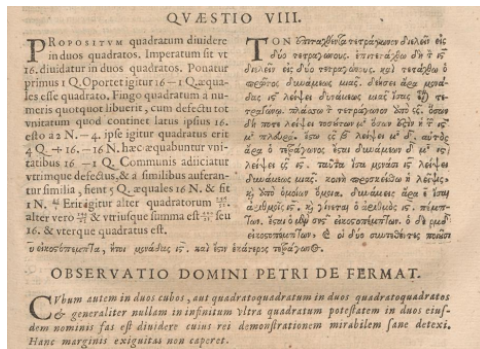
ὅτι εἰς οὐδέποτε, ἢτοι μινάδεις 16. καὶ ἔστιν ἐλάττω τῆς ἀρχῆς.

OBSERVATIO DOMINI PETRI DE FERMAT.

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est diuidere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

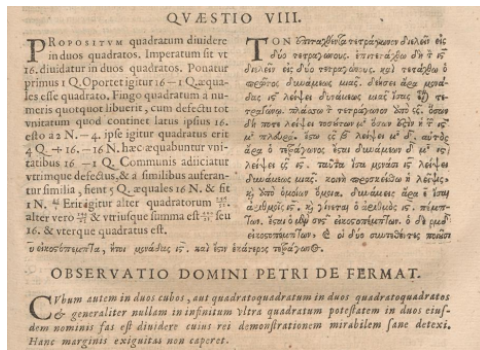
TON ὑποτάξας τὰ τετραγώνων διὰ τὸ εἶναι δύο τετραγώνους. ἐπιτετάξω δὴ τὸ εἶναι διπλαῖον εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τὰ τετάξω ὁ αὐτοῦ διωάμικος μας. εἴησιν ἄρα μινάδεις 16. λαίλει δὲ τῆς αἰτίας μας 16. τῆς τετραγώνου. πλάτος τὸ τετραγώνου ἀπὸ 16. ὅσον δὴ πῶς λαίλει πρὸς τὸν μὲν ὅσον ἔστιν ἢ τὸ εἶναι μὲν πλάτος. ἔστιν ἔξ ἢ λαίλει μὲν δὲ αὐτὸς ἄρα ὁ πρῶτος ἔστι διωάμικος δὲ μὲν 16. λαίλει ἔξ ἢ. πῶς ἔστι μινάδεις 16. λαίλει διωάμικος μας. καὶ αὐτὸς αὐτοῦ τὸ λαίλει καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. διωάμικος ἄρα ἔστιν αὐτὸς μὲν καὶ γίνονται ὁ αὐτοῦ 16. πῶς τῶν. ἔστι ὁ μὲν οὐκ εἰς οὐδέποτε. ὁ δὲ μὲν εἰς οὐδέποτε. ὁ δὲ εἰς οὐδέποτε. καὶ εἰς οὐδέποτε.

In de kantlijn van de Arithmetica van Pierre de Fermat



Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos & generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

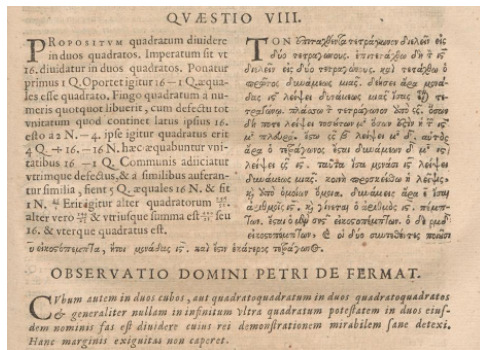
In de kantlijn van de Arithmetica van Pierre de Fermat



Cubum autem in duos cubos, aut
quadratoquadratum in duos quadratoquadratos
& generaliter nullam in infinitum ultra
quadratum potestatem in duos eiusdem
nominis fas est dividere cuius rei
demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc
marginis exiguitas non caperet.

Het is niet mogelijk een derdemacht in twee derdemachten te verdelen, of een vierdemacht in twee vierdemachten, of in het algemeen, een macht hoger dan de tweede in twee gelijkaardige machten. Ik heb hier een waarlijk wonderlijk bewijs voor gevonden, waar deze marge te nauw voor is om het te kunnen bevatten.

In de kantlijn van de Arithmetica van Pierre de Fermat



Dit is een (her)uitgave door de zoon
van Fermat, met zijn vaders
aantekeningen ingevoegd

Cubum autem in duos cubos, aut
quadratoquadratum in duos quadratoquadratos
& generaliter nullam in infinitum ultra
quadratum potestatem in duos eiusdem
nominis fas est dividere cuius rei
demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc
marginis exiguitas non caperet.

Het is niet mogelijk een derdemacht in twee derdemachten te verdelen, of een vierdemacht in twee vierdemachten, of in het algemeen, een macht hoger dan de tweede in twee gelijkaardige machten. Ik heb hier een waarlijk wonderlijk bewijs voor gevonden, waar deze marge te nauw voor is om het te kunnen bevatten.

Outline

Griekenland

Euclides

Diophantus

China

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					̄	̄ ̄	̄ ̄ ̄	̄ ̄ ̄ ̄
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Waarom twee soorten?

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Waarom twee soorten?

Voor het leesgemak: de eersten bij eenheden, hondertallen . . . , de tweede rij voor de tientallen, duizendtallen . . .

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Waarom twee soorten?

Voor het leesgemak: de eersten bij eenheden, hondertallen . . . , de tweede rij voor de tientallen, duizendtallen . . .

Dus —|≡| is

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					̄	̄	̄	̄
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Waarom twee soorten?

Voor het leesgemak: de eersten bij eenheden, hondertallen . . . , de tweede rij voor de tientallen, duizendtallen . . .

Dus —|≡|̄ is 1156

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					̄	̄ ̄	̄ ̄ ̄	̄ ̄ ̄ ̄
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Waarom twee soorten?

Voor het leesgemak: de eersten bij eenheden, hondertallen . . . , de tweede rij voor de tientallen, duizendtallen . . .

Dus —|̄|̄|̄ is 1156

en ⊥ ≡||| is

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					̄	̄ ̄	̄ ̄ ̄	̄ ̄ ̄ ̄
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Waarom twee soorten?

Voor het leesgemak: de eersten bij eenheden, hondertallen . . . , de tweede rij voor de tientallen, duizendtallen . . .

Dus —|̄|̄ is 1156

en ⊥ ≡||| is 6083 (er staat een **spatie** in plaats van een nul)

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
					̄	̄ ̄	̄ ̄ ̄	̄ ̄ ̄ ̄
—	=	≡	≡	≡	⊥	⊥	≡	≡

Waarom twee soorten?

Voor het leesgemak: de eersten bij eenheden, hondertallen . . . , de tweede rij voor de tientallen, duizendtallen . . .

Dus —|̄|̄ is 1156

en ⊥ ≡||| is 6083 (er staat een **spatie** in plaats van een nul)

Er werden wel stippen gezet om lege plaatsen te markeren maar een echte 'nul' ziet men pas in de 12de eeuw.

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000.

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

Oplossing:

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

Oplossing:

Stel er zijn 20 aren goed land en 80 aren slecht, dan is het overschot $1714\frac{2}{7}$.

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

Oplossing:

Stel er zijn 20 aren goed land en 80 aren slecht, dan is het overschot $1714\frac{2}{7}$.

Als er 10 aren goed en 90 aren slecht land zijn is het dan is het tekort $571\frac{3}{7}$.

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

Oplossing:

Stel er zijn 20 aren goed land en 80 aren slecht, dan is het overschot $1714\frac{2}{7}$.

Als er 10 aren goed en 90 aren slecht land zijn is het dan is het tekort $571\frac{3}{7}$.

Neem nu $20 \times 571\frac{3}{7}$ en $10 \times 1714\frac{2}{7}$ en deel hun som door de som van $571\frac{3}{7} + 1714\frac{2}{7}$.

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

Oplossing:

Stel er zijn 20 aren goed land en 80 aren slecht, dan is het overschot $1714\frac{2}{7}$.

Als er 10 aren goed en 90 aren slecht land zijn is het dan is het tekort $571\frac{3}{7}$.

Neem nu $20 \times 571\frac{3}{7}$ en $10 \times 1714\frac{2}{7}$ en deel hun som door de som van $571\frac{3}{7} + 1714\frac{2}{7}$.

Het resultaat, $12\frac{1}{2}$ aren, is de hoeveelheid goed land.

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

Oplossing:

Stel er zijn 20 aren goed land en 80 aren slecht, dan is het overschot $1714\frac{2}{7}$.

Als er 10 aren goed en 90 aren slecht land zijn is het dan is het tekort $571\frac{3}{7}$.

Neem nu $20 \times 571\frac{3}{7}$ en $10 \times 1714\frac{2}{7}$ en deel hun som door de som van $571\frac{3}{7} + 1714\frac{2}{7}$.

Het resultaat, $12\frac{1}{2}$ aren, is de hoeveelheid goed land. De hoeveelheid slecht land, $87\frac{1}{2}$ aren, is nu makkelijk te vinden.

De methode van Overschot en Tekort

Opgave

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

Oplossing:

Stel er zijn 20 aren goed land en 80 aren slecht, dan is het overschot $1714\frac{2}{7}$.

Als er 10 aren goed en 90 aren slecht land zijn is het dan is het tekort $571\frac{3}{7}$.

Neem nu $20 \times 571\frac{3}{7}$ en $10 \times 1714\frac{2}{7}$ en deel hun som door de som van $571\frac{3}{7} + 1714\frac{2}{7}$.

Het resultaat, $12\frac{1}{2}$ aren, is de hoeveelheid goed land. De hoeveelheid slecht land, $87\frac{1}{2}$ aren, is nu makkelijk te vinden.

Uitleg?

De methode van Overschot en Tekort

In onze notatie

$$20 \times 300 + 80 \times \frac{500}{7} = 10.000 + 1714\frac{2}{7}$$

$$10 \times 300 + 90 \times \frac{500}{7} = 10.000 - 571\frac{3}{7}$$

De methode van Overschot en Tekort

In onze notatie

$$20 \times 300 + 80 \times \frac{500}{7} = 10.000 + 1714\frac{2}{7}$$

$$10 \times 300 + 90 \times \frac{500}{7} = 10.000 - 571\frac{3}{7}$$

Vermenigvuldig de eerste met $T = 571\frac{3}{7}$ en de tweede met $O = 1714\frac{2}{7}$ en tel op:

$$(20T + 10O) \times 300 + (80T + 90O) \times \frac{500}{7} = (T + O)10.000 + (TO - OT)$$

De methode van Overschot en Tekort

In onze notatie

$$20 \times 300 + 80 \times \frac{500}{7} = 10.000 + 1714\frac{2}{7}$$

$$10 \times 300 + 90 \times \frac{500}{7} = 10.000 - 571\frac{3}{7}$$

Vermenigvuldig de eerste met $T = 571\frac{3}{7}$ en de tweede met $O = 1714\frac{2}{7}$ en tel op:

$$(20T + 10O) \times 300 + (80T + 90O) \times \frac{500}{7} = (T + O)10.000 + (TO - OT)$$

en deel door $T + O$:

$$\frac{20T + 10O}{T + O} \times 300 + \frac{80T + 90O}{T + O} \times \frac{500}{7} = 10.000$$

De methode van Overschot en Tekort

In onze notatie

$$20 \times 300 + 80 \times \frac{500}{7} = 10.000 + 1714\frac{2}{7}$$

$$10 \times 300 + 90 \times \frac{500}{7} = 10.000 - 571\frac{3}{7}$$

Vermenigvuldig de eerste met $T = 571\frac{3}{7}$ en de tweede met $O = 1714\frac{2}{7}$ en tel op:

$$(20T + 10O) \times 300 + (80T + 90O) \times \frac{500}{7} = (T + O)10.000 + (TO - OT)$$

en deel door $T + O$:

$$\frac{20T + 10O}{T + O} \times 300 + \frac{80T + 90O}{T + O} \times \frac{500}{7} = 10.000$$

Neem dus het *gewogen gemiddelde* van de twee pogingen.

Stelsels en eliminatie

Opgave

Er zijn drie klassen graan, waarvan drie bossen van de eerste klasse, twee bossen van de tweede en één van de derde 39 eenheden maken.

Stelsels en eliminatie

Opgave

Er zijn drie klassen graan, waarvan drie bossen van de eerste klasse, twee bossen van de tweede en één van de derde 39 eenheden maken. Twee van de eerste, drie van de tweede en één van de derde maken 34 eenheden.

Stelsels en eliminatie

Opgave

Er zijn drie klassen graan, waarvan drie bossen van de eerste klasse, twee bossen van de tweede en één van de derde 39 eenheden maken. Twee van de eerste, drie van de tweede en één van de derde maken 34 eenheden. En één van de eerste, twee van de tweede en drie van de derde maken 26 eenheden.

Stelsels en eliminatie

Opgave

Er zijn drie klassen graan, waarvan drie bossen van de eerste klasse, twee bossen van de tweede en één van de derde 39 eenheden maken. Twee van de eerste, drie van de tweede en één van de derde maken 34 eenheden. En één van de eerste, twee van de tweede en drie van de derde maken 26 eenheden.

Hoeveel eenheden bevat één bos graan van elke klasse?

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts.

3
2
1
39

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden

2	3
3	2
1	1
34	39

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden en links.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden en links.

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Vermenigvuldig de middelste kolom met de eerste klasse in de rechterkolom en laat meteen weg.

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden en links.

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Vermenigvuldig de middelste kolom met de eerste klasse in de rechterkolom en laat meteen weg.

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}$$

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden en links.

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Vermenigvuldig de middelste kolom met de eerste klasse in de rechterkolom en laat meteen weg. Doe het hetzelfde met de linkerkolom.

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array}$$

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden en links.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Vermenigvuldig de middelste kolom met de eerste klasse in de rechterkolom en laat meteen weg. Doe het hetzelfde met de linkerkolom.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden en links.

$$\begin{array}{rrr} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Vermenigvuldig de middelste kolom met de eerste klasse in de rechterkolom en laat meteen weg. Doe het hetzelfde met de linkerkolom. Met wat overblijft van de tweede klasse in de middelste kolom, laat meteen weg.

$$\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{array} \quad \begin{array}{rrr} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}$$

Stelsels en eliminatie

De oplossing:

Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden en links.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{array}$$

Vermenigvuldig de middelste kolom met de eerste klasse in de rechterkolom en laat meteen weg. Doe het hetzelfde met de linkerkolom. Met wat overblijft van de tweede klasse in de middelste kolom, laat meteen weg.

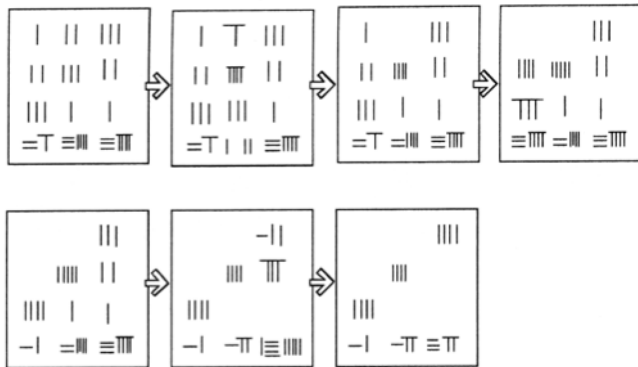
$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 4 & 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 36 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 & 39 & 24 & 39 & 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Stelsels en eliminatie

Dat is dus eigenlijk Gauss-eliminatie.

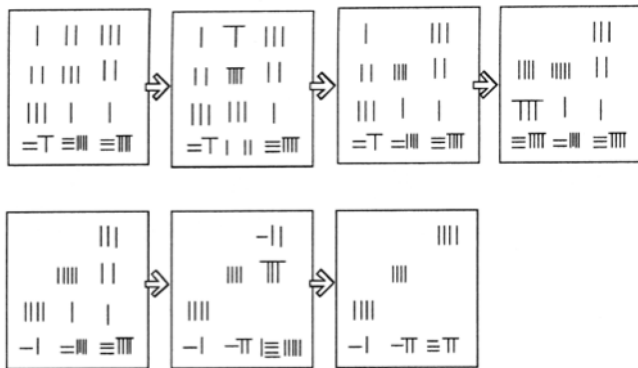
Stelsels en eliminatie

Dat is dus eigenlijk Gauss-eliminatie.



Stelsels en eliminatie

Dat is dus eigenlijk Gauss-eliminatie.



De rest van de oplossing is het eenvoudig oplossen van het nieuwe driehoeksstelsel.

Polynoomvergelijkingen

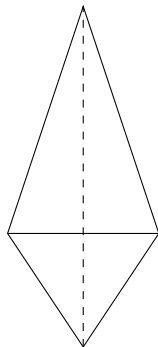
Los op: $-x^4 + 763.200x^2 - 40.642.560.000 = 0$

Polynoomvergelijkingen

Los op: $-x^4 + 763.200x^2 - 40.642.560.000 = 0$

Huh?

Het gaat om de oppervlakte, x , van het stukje land rechts.



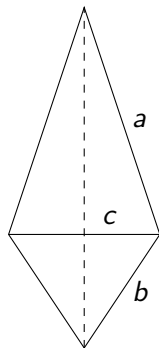
Polynoomvergelijkingen

Los op: $-x^4 + 763.200x^2 - 40.642.560.000 = 0$

Huh?

Het gaat om de oppervlakte, x , van het stukje land rechts.

Die drukken we natuurlijk zo uit in a , b , en c .



Polynoomvergelijkingen

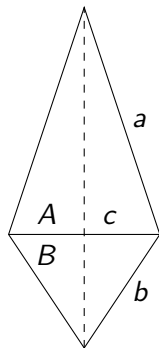
Los op: $-x^4 + 763.200x^2 - 40.642.560.000 = 0$

Huh?

Het gaat om de oppervlakte, x , van het stukje land rechts.

Die drukken we natuurlijk zo uit in a , b , en c .

$$A = \frac{c}{2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \text{ en } B = \frac{c}{2} \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$



Polynoomvergelijkingen

Los op: $-x^4 + 763.200x^2 - 40.642.560.000 = 0$

Huh?

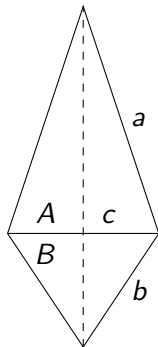
Het gaat om de oppervlakte, x , van het stukje land rechts.

Die drukken we natuurlijk zo uit in a , b , en c .

$$A = \frac{c}{2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \text{ en } B = \frac{c}{2} \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

Dan voldoet $x = A + B$ aan

$$-x^4 + 2(A^2 + B^2)x^2 - (A^2 - B^2)^2 = 0$$



Polynoomvergelijkingen

Los op: $-x^4 + 763.200x^2 - 40.642.560.000 = 0$

Huh?

Het gaat om de oppervlakte, x , van het stukje land rechts.

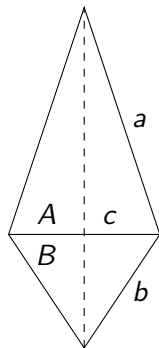
Die drukken we natuurlijk zo uit in a , b , en c .

$$A = \frac{c}{2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \text{ en } B = \frac{c}{2} \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

Dan voldoet $x = A + B$ aan

$$-x^4 + 2(A^2 + B^2)x^2 - (A^2 - B^2)^2 = 0$$

Neem nu $a = 39$, $b = 25$, en $c = 30 \dots$



Polynoomvergelijkingen

Los op: $-x^4 + 763.200x^2 - 40.642.560.000 = 0$

Huh?

Het gaat om de oppervlakte, x , van het stukje land rechts.

Die drukken we natuurlijk zo uit in a , b , en c .

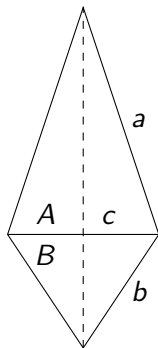
$$A = \frac{c}{2} \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \text{ en } B = \frac{c}{2} \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

Dan voldoet $x = A + B$ aan

$$-x^4 + 2(A^2 + B^2)x^2 - (A^2 - B^2)^2 = 0$$

Neem nu $a = 39$, $b = 25$, en $c = 30$...

(Waarom makkelijk als het moeilijk kan?)



Polynoomvergelijkingen

Maple:

Polynoomvergelijkingen

Maple:

► $A = 540$

Polynoomvergelijkingen

Maple:

► $A = 540$

► $B = 300$

Polynoomvergelijkingen

Maple:

- ▶ $A = 540$
- ▶ $B = 300$
- ▶ $A + B = 840$

Polynoomvergelijkingen

Maple:

- ▶ $A = 540$
- ▶ $B = 300$
- ▶ $A + B = 840$

En de vergelijking klopt

Polynoomvergelijkingen

Maple:

- ▶ $A = 540$
- ▶ $B = 300$
- ▶ $A + B = 840$

En de vergelijking klopt; de oplossingen daarvan zijn:

240, 840, -840, 240

Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als een soort staartdeling:

Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als een soort staartdeling:

- ▶ Voorspel het aantal cijfers door proberen (3 cijfers)

Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als een soort staartdeling:

- ▶ Voorspel het aantal cijfers door proberen (3 cijfers)
- ▶ Bepaal het eerste cijfer door proberen (8)

Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als een soort staartdeling:

- ▶ Voorspel het aantal cijfers door proberen (3 cijfers)
- ▶ Bepaal het eerste cijfer door proberen (8)
- ▶ Schrijf $x = 800 + y$ en pas de binomiaalformules toe

Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als een soort staartdeling:

- ▶ Voorspel het aantal cijfers door proberen (3 cijfers)
- ▶ Bepaal het eerste cijfer door proberen (8)
- ▶ Schrijf $x = 800 + y$ en pas de binomiaalformules toe
- ▶ Bepaal het eerste cijfer van y , enzovoort

Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als een soort staartdeling:

- ▶ Voorspel het aantal cijfers door proberen (3 cijfers)
- ▶ Bepaal het eerste cijfer door proberen (8)
- ▶ Schrijf $x = 800 + y$ en pas de binomiaalformules toe
- ▶ Bepaal het eerste cijfer van y , enzovoort

Dit werd weergegeven op een bord.

Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als een soort staartdeling:

- ▶ Voorspel het aantal cijfers door proberen (3 cijfers)
- ▶ Bepaal het eerste cijfer door proberen (8)
- ▶ Schrijf $x = 800 + y$ en pas de binomiaalformules toe
- ▶ Bepaal het eerste cijfer van y , enzovoort

Dit werd weergegeven op een bord.

Voordeel: men kon gewoon doorgaan met cijfers 'achter de komma'.

Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als een soort staartdeling:

- ▶ Voorspel het aantal cijfers door proberen (3 cijfers)
- ▶ Bepaal het eerste cijfer door proberen (8)
- ▶ Schrijf $x = 800 + y$ en pas de binomiaalformules toe
- ▶ Bepaal het eerste cijfer van y , enzovoort

Dit werd weergegeven op een bord.

Voordeel: men kon gewoon doorgaan met cijfers 'achter de komma'.

NB De Chinezen kenden de 'Driehoek van Pascal' en dus de binomiaalformules voor de machten $(a + b)^n$.

Polynoomvergelijkingen

De methode leek wijd verbreid, veel wiskundigen gebruikten hem.

Polynoomvergelijkingen

De methode leek wijd verbreid, veel wiskundigen gebruikten hem.

De Chinezen hadden geen problemen met negatieve getallen.

Polynoomvergelijkingen

De methode leek wijd verbreid, veel wiskundigen gebruikten hem.

De Chinezen hadden geen problemen met negatieve getallen.

Ze hadden dus maar één soort vergelijking: $f(x) = 0$.

Polynoomvergelijkingen

De methode leek wijd verbreid, veel wiskundigen gebruikten hem.

De Chinezen hadden geen problemen met negatieve getallen.

Ze hadden dus maar één soort vergelijking: $f(x) = 0$.

Toch: weinig negatieve oplossingen, want de problemen vroegen altijd om positieve getallen: lengte, oppervlakte, inhoud, ...