

De nieuwe aanpak en de stelling van Ruffini en Abel

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Leiden, 6 mei 2025

Derdegraads

Een nieuwe aanpak van $x^3 - ax^2 + bx - c$.

Neem de nulpunten: t_1 , t_2 , en t_3 .

We gaan op zoek naar (zoveel mogelijk) symmetrische polynomen in t_1 , t_2 , en t_3 .

Liefst zo eenvoudig mogelijk, opdat we eenvoudige vergelijkingen vinden waaruit we t_1 , t_2 , en t_3 op kunnen lossen.

Wat is eenvoudig?

In dit geval: eenvoudiger dan derdegraads, eerste- en tweedegraads dus.

Derdemachtseenheidswortels

We moeten de complexe getallen in. En we schrijven gewoon $a + bi$ in plaats van $a + b\sqrt{-1}$.

We hebben vooral het getal $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ nodig.

Want $\omega^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3}$, en $\omega^3 = 1$.

De drie getallen 1, ω , en ω^2 zijn de drie nulpunten van $x^3 - 1$.

De *derdemachtseenheidswortels*.

We kunnen ontbinden: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$; dus $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Derdegraads: permutaties

We hebben zes permutaties van $\{1, 2, 3\}$:

- ▶ niets doen, notatie: (1)
- ▶ verwisselingen: $(1\ 2)$, $(1\ 3)$, en $(2\ 3)$, en
- ▶ opschuiven: $(1\ 2\ 3)$ en $(3\ 2\ 1)$.

Dit is de *cykelnotatie*.

- ▶ $(a\ b)$ betekent a en b omwisselen (van plaats ruilen). Dus $(a\ b)$ en $(b\ a)$ geven dezelfde actie aan.
- ▶ $(a\ b\ c)$ betekent: a naar de plaats van b , b naar de plaats van c , en c naar de plaats van a . Dus $(a\ b\ c)$, $(b\ c\ a)$, en $(c\ a\ b)$ geven dezelfde actie aan.

Het is even wennen, maar het is lekker efficiënt.

Voor straks: $(1\ 2\ 3)$ twee keer uitvoeren komt neer op $(3\ 2\ 1)$ uitvoeren, en $(1\ 2\ 3)$ drie keer uitvoeren komt neer op niks doen.

Derdegraads

Bekijk

$$y_1 = t_1 + \omega t_2 + \omega^2 t_3$$

$$y_2 = t_1 + \omega^2 t_2 + \omega t_3$$

Deze zijn niet symmetrisch: verwissel t_1 en t_2 maar, of schuif t_1 , t_2 , en t_3 maar naar voren (t_3 dus naar het begin).

In het laatste geval krijgen we respectievelijk $t_3 + \omega t_1 + \omega^2 t_2$ en $t_3 + \omega^2 t_1 + \omega t_2$, en dat zijn dan ωy_1 en $\omega^2 y_2$.

Als we alles nog een keer opschuiven krijgen we $t_2 + \omega t_3 + \omega^2 t_1$ en $t_2 + \omega^2 t_3 + \omega t_1$, ofwel $\omega^2 y_1$ en ωy_2 .

En wat doen verwisselingen?

Derdegraads: permutaties

We hebben nu

$$\begin{array}{ll} y_1 = t_1 + \omega t_2 + \omega^2 t_3 & y_2 = t_1 + \omega^2 t_2 + \omega t_3 \\ \omega y_1 = t_3 + \omega t_1 + \omega^2 t_2 & \omega y_2 = t_2 + \omega^2 t_3 + \omega t_1 \\ \omega^2 y_1 = t_2 + \omega t_3 + \omega^2 t_1 & \omega^2 y_2 = t_3 + \omega^2 t_1 + \omega t_2 \end{array}$$

Als we (1 2 3) en (3 2 1) (de opschuivingen) toepassen blijven de kolommen invariant.

Als we t_1 en t_2 verwisselen gaat y_1 over in $t_2 + \omega t_1 + \omega^2 t_3$ en dat is ωy_2 , en y_2 gaat over in $\omega^2 y_1$. En verder $\omega y_1 \rightarrow \omega^2 y_2$, $\omega y_2 \rightarrow y_1$, $\omega^2 y_1 \rightarrow \omega y_2$, en $\omega^2 y_2 \rightarrow \omega y_1$.

Als we (1 3) toepassen (t_1 en t_3 verwisselen dus) of (2 3) worden de kolommen ook verwisseld.

Wat kopen we hiervoor?

Derdegraads: permutaties

Neem van beide kolommen het product: $y_1 \cdot \omega y_1 \cdot \omega^2 y_1 = y_1^3$ en $y_2 \cdot \omega y_2 \cdot \omega^2 y_2 = y_2^3$.

Die twee veranderen niet als we (1) , $(1\ 2\ 3)$ en $(3\ 2\ 1)$ toepassen.

De verwisselingen $(1\ 2)$, $(2\ 3)$ en $(1\ 3)$ wisselen y_1^3 en y_2^3 om.

Succes! $y_1^3 + y_2^3$ en $y_1^3 \cdot y_2^3$ zijn symmetrisch!

En dus

$$y_1^3 + y_2^3 = p(a, b, c)$$

$$y_1^3 \cdot y_2^3 = q(a, b, c)$$

voor zekere polynomen p en q .

Derdegraads: naar een oplossing

We kunnen y_1^3 en y_2^3 dus vinden als nulpunten van een tweedegraadspolynoom, namelijk: $x^2 - p(a, b, c)x + q(a, b, c)$.

En die nulpunten kennen we onderhand nu wel:

$$y_1^3 = \frac{1}{2}p(a, b, c) + \sqrt{\frac{1}{4}p(a, b, c)^2 - q(a, b, c)}$$

en

$$y_2^3 = \frac{1}{2}p(a, b, c) - \sqrt{\frac{1}{4}p(a, b, c)^2 - q(a, b, c)}$$

En dus, afgekort: $y_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}}$ en $y_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}p - \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}}$.

Een 'wortelformule' in a , b , en c .

Derdegraads: naar een oplossing

En dan de laatste stap: los het volgende stelsel op

$$a = t_1 + t_2 + t_3$$

$$y_1 = t_1 + \omega t_2 + \omega^2 t_3$$

$$y_2 = t_1 + \omega^2 t_2 + \omega t_3$$

Dat is makkelijker dan het lijkt: gebruik $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Derdegraads: de oplossingen

De oplossingen

$$t_1 = \frac{1}{3}(a + y_1 + y_2)$$

$$t_2 = \frac{1}{3}(a + \omega^2 y_1 + \omega y_2)$$

$$t_3 = \frac{1}{3}(a + \omega y_1 + \omega^2 y_2)$$

Waar zit de pijn?

In het vinden van de polynomen $p(a, b, c)$ en $q(a, b, c)$.

Derdegraads: de oplossingen

In het geval $a = 0$ is het makkelijk: $u^3 + v^3 = c$ en $u^3 v^3 = -(\frac{b}{3})^3$; en die hadden Tartaglia en Cardano al.

Als je de slides van 22 april naleest kun je $p(a, b, c)$ en $q(a, b, c)$ vinden.

Derdegraads: nog een opmerking

De methode van Lagrange leidt regelrecht naar *alledrie* de oplossingen

Bij de Italiaanse formule zagen we eigenlijk maar één oplossing verschijnen.
Waar zaten de andere twee?

Die zaten ook al in de formule, alleen zagen we ze nog niet.

Derdegraads: nog een opmerking

Bombelli zocht *de* derdemachtswortels van, in het beruchte voorbeeld $x^3 = 15x + 4$, $2 + 11i$ en $2 - 11i$.

Hij vond $2 + i$ en $2 - i$ en was tevreden, want die gaven hem de oplossing 4.

Maar Albert Girard zou niet tevreden zijn geweest: de vergelijking $z^3 = 2 + 11i$ zou drie oplossingen moeten hebben.

Die hebben we nu ook: $2 + i$, $\omega \cdot (2 + i)$, en $\omega^2 \cdot (2 + i)$.

En $2 - i$, $\omega \cdot (2 - i)$, en $\omega^2 \cdot (2 - i)$ zijn de derdemachtswortels van $2 - 11i$.

Derdegraads: nog een opmerking

Maar nu zou Girard misschien zenuwachtig worden: drie derdemachtswortels van $2 + 11i$ en drie van $2 - 11i$.

Daar kunnen we negen sommen van maken, en dus negen (!) oplossingen van $x^3 = 15x + 4$.

Derdegraads: nog een opmerking

Kijk naar de formules van Lagrange, daar zien we maar drie van de negen sommen een rol spelen, hier dus

- ▶ $2 + i + 2 - i$,
- ▶ $\omega \cdot (2 + i) + \omega^2 \cdot (2 - i)$, en
- ▶ $\omega^2 \cdot (2 + i) + \omega \cdot (2 - i)$.

Waarom? Omdat we heel in het begin twee eisen hadden gesteld aan u en v :

- ▶ $u^3 + v^3 = 4$, en
- ▶ $3uv = 15$.

Die laatste eis diskwalificeert zes van de negen paren en alleen deze drie blijven over.

Derdegraads: nog een opmerking

En ze leveren de oplossingen

- ▶ $2 + i + 2 - i = 4$,
- ▶ $(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})(2 + i) + (-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})(2 - i) = -2 - \sqrt{3}$, en
- ▶ $(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3})(2 + i) + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3})(2 - i) = -2 + \sqrt{3}$.

Overigens zijn de formules van Lagrange ook Italiaans: **Giuseppe Luigi Lagrange**.
“Matematico italiano (Torino 1736 - Parigi 1813), di famiglia d'origine francese.”

Vierdegraads

In het kort: $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$.

Weer: de nulpunten zijn t_1 , t_2 , t_3 , en t_4 .

Bekijk

$$y_1 = (t_1 + t_2)(t_3 + t_4)$$

$$y_2 = (t_1 + t_3)(t_2 + t_4)$$

$$y_3 = (t_1 + t_4)(t_2 + t_3)$$

- ▶ y_1 , y_2 , en y_3 zijn alle invariant onder de permutaties $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4)$, en $(1\ 4)(2\ 3)$
- ▶ iedere $\sigma \in S_4$ permuteert y_1 , y_2 , en y_3

Vierdegraads

De coëfficiënten van $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$ zijn dus symmetrisch in t_1 , t_2 , t_3 , en t_4 .
En dus polynomen in a , b , c , en d .

Los die derdegraadsvergelijking op: geeft y_1 , y_2 , en y_3 , uitgedrukt in a , b , c , en d .

We kennen dus nu:

$$(t_1 + t_2)(t_3 + t_4) = y_1$$

$$(t_1 + t_3)(t_2 + t_4) = y_2$$

$$(t_1 + t_4)(t_2 + t_3) = y_3$$

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = a$$

Vierdegraads

Nu drie tweedegraadsvergelijkingen oplossen

$$(x - (t_1 + t_2))(x - (t_3 + t_4)) = x^2 - ax + y_1 = 0$$

en nog zo twee.

Dat geeft $t_1 + t_2$, $t_3 + t_4$, $t_1 + t_3$, $t_2 + t_4$, $t_1 + t_4$, en $t_2 + t_3$.

Gebruik nu

$$2t_1 + a = (t_1 + t_2) + (t_1 + t_3) + (t_1 + t_4)$$

om t_1 te bepalen en dan de rest.

Wat was de structuur?

Bij de derdegraadsvergelijking: onderweg een tweedegraadsvergelijking oplossen om twee uitdrukkingen in de oplossingen te bepalen, en daarna een stelsel lineaire vergelijkingen.

Bij de vierdegraadsvergelijking: drie uitdrukkingen in de oplossingen waren oplossingen van een derdegraadsvergelijking; die waren weer input voor tweedegraadsvergelijkingen, en aan het eind kwamen nog wat lineaire vergelijkingen tevoorschijn.

Lagrange hoopte langs deze weg ook de vijfdegraadsvergelijking aan te kunnen pakken. Dus hij ging op zoek naar symmetrische polynomen van vijf variabelen die aan vierde/derde/tweedegraadsvergelijkingen voldeden.

De beste uitdrukking die hij kon vinden was oplossing van een zesdegraadsvergelijking.

Wat was de structuur?

Andere, al dan niet mooie, uitdrukkingen leden aan hetzelfde euvel: niet een oplossing van een lageregraadsvergelijking.

Deze weg leek dood te lopen.

Vijfdegraadsvergelijking

Stelling (Ruffini-Abel)

Voor de vijfdegraadsvergelijking is er geen oplosmethode met behulp van de lichaamsoperaties en worteltrekken (van alle machten).

In *Teoria Generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto* (1799) liet Ruffini zien dat de symmetrieargumenten van Lagrange belangrijk waren voor het bestuderen van oplossingen van vergelijkingen; hij gaf een bewijs dat er geen oplosformule voor de vijfdegraadsvergelijking is.

In 1813 verscheen een verbeterde versie: *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali*.

Het bewijs was moeilijk te lezen en bleek een fout/gat te bevatten.

Vijfdegraadsvergelijking

In 1824 gaf Niels Henrik Abel, op eigen kosten, een pamflet van zes bladzijden uit met daarin een bewijs van het niet bestaan van een “algebraïsche formule” voor de oplossing van de vijfdegraadsvergelijking.

(Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania 1824)

In 1826 verscheen een **uitgebreidere versie** waarin alle details gegeven werden en waar impliciet het gat van Ruffini gedicht werd.

Dat bewijs gaan we, in grote lijnen, doorlopen.

Stap 1: algebraïsche functies

Het bewijs gaat uit het ongerijmde (natuurlijk).

Laat $x^5 - ax^4 + bx^3 - cx^2 + dx - e = 0$ een willekeurige vijfdegraadsvergelijking zijn.

Neem aan dat deze *algebraïsch* opgelost kan worden.

Eerst netjes definiëren en nader beschrijven wat dat laatste betekent.

Dat betekent dat er een *algebraïsche functie* van a , b , c , d , en e , zeg

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, is zó dat als we $y = f(a, b, c, d, e)$ in de vergelijking invullen er inderdaad nul uit komt.

En dan definiëren wat een algebraïsche functie is.

Een functie f van één of meer variabelen is algebraïsch als deze samengesteld kan worden door toepassen van optellen, vermenigvuldigen, delen, en p -demachtswortels trekken, waarbij p een priemgetal is.

(Als we geen wortels gebruiken noemen we de functie *rationaal*.)

Stap 1: algebraïsche functies

NB priemgetallen zijn genoeg want elke k -demachtswortel is te maken door herhaald

$$\sqrt[m \cdot n]{f(x, y, \dots)} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{f(x, y, \dots)}}$$

toe te passen.

Stap 1: algebraïsche functies

Dit is belangrijk voor de eerste stap: elke algebraïsche functie is te schrijven als

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

waabij

- ▶ n een priemgetal is,
- ▶ $q_0, q_2, \dots, q_{n-1}$ algebraïsche functies zijn, en
- ▶ en p ook een algebraïsche functie is en waarvoor geldt dat $p^{\frac{1}{n}}$ niet te schrijven is als rationale functie van de q_i .

In 1824 staat dit er plompverloren, in 1826 kost dit ruim vijf bladzijden om uit te leggen. Deze vorm is cruciaal voor de rest van het bewijs.

Dit dicht ook het gat in het bewijs van Ruffini, bleek achteraf.

Stap 1: algebraïsche functies (intermezzo)

Bij de tweedegraads vergelijking hadden we

$$\frac{a}{2} + \left(\frac{1}{4}a^2 - b \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bij de derdegraadsvergelijking hadden we $y_1 \cdot y_2 = K$, met K een constante. Dus $y_2 = \frac{K}{y_1}$. De formule van Lagrange krijgt dan de vorm

$$\frac{a}{3} + R^{\frac{1}{3}} + \frac{3K}{y_1^3} R^{\frac{2}{3}}$$

met $R = \frac{1}{27} \left(\frac{1}{2}p + \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q} \right)$.

Allebei van de vorm die Abel afleidde.

Stap 2: invullen in de vergelijking

Vul nu $y = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$ in in de gegeven vergelijking.

Dit levert een vergelijking voor $p^{\frac{1}{n}}$ op:

$$r_0 + r_1 p^{\frac{1}{n}} + r_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + r_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = 0$$

Waarin de r_i rationale functies zijn van p en de q_i .

Bewering

Alle coëfficiënten r_i moeten gelijk aan nul zijn.

Het bewijs kost slechts een bladzijde en gebruikt wat kennis over deelbaarheid van polynomen.

Stap 3: n oplossingen

Neem een n -demachtseenheidswortel α ongelijk aan 1; omdat n priem is zijn $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ alle oplossingen van $z^n - 1 = 0$.

Voor elke $i \geq 1$ is

$$q_0 + \alpha^i p^{\frac{1}{n}} + q_2 \alpha^{2i} p^{\frac{2}{n}} + \dots + q_{n-1} \alpha^{(n-1)i} p^{\frac{n-1}{n}}$$

ook een oplossing van de vergelijking.

Invullen levert namelijk

$$r_0 + r_1 \alpha^i p^{\frac{1}{n}} + r_2 \alpha^{2i} p^{\frac{2}{n}} + \dots + r_{n-1} \alpha^{(n-1)i} p^{\frac{n-1}{n}}$$

en dat is gelijk aan nul.

Tussentijdse conclusie: $n \leq 5$.

Abel bekijkt echter zo lang mogelijk vergelijkingen van willekeurige graad.

Stap 3: n oplossingen

We krijgen zo:

$$x_1 = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

$$x_2 = q_0 + \alpha p^{\frac{1}{n}} + \alpha^2 q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha^{n-1} q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

.....

$$x_n = q_0 + \alpha^{n-1} p^{\frac{1}{n}} + \alpha^{n-2} q_2 p^{\frac{2}{n}} + \cdots + \alpha q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}}$$

NB $(\alpha^{n-1})^2 = \alpha^{2n-2} = \alpha^{n-2}$ tot en met $(\alpha^{n-1})^{n-1} = \alpha^{n^2-2n+1} = \alpha$.

En dus ...

Stap 3: n oplossingen

... het omgekeerde als bij Lagrange

$$q_0 = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n)$$

$$p^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(x_1 + \alpha^{n-1}x_2 + \alpha^{n-2}x_3 + \cdots + \alpha x_n)$$

$$q_2 p^{\frac{2}{n}} = \frac{1}{n}(x_1 + \alpha^{n-2}x_2 + \alpha^{n-3}x_3 + \cdots + \alpha^2 x_n)$$

.....

$$q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n}(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \cdots + \alpha^{n-1} x_n)$$

Conclusie: $p^{\frac{1}{n}}$, q_0 , q_2 , $\dots$, q_{n-1} zijn allemaal rationale functies van de nulpunten.
De keuze van Lagrange voor de symmetrische uitdrukkingen was eigenlijk de enige die zinvol lijkt.

Stap 4: waarden tellen

Hier gebruiken we dat de graad van onze vergelijking ten minste vijf is.

Abel reproduceert hier een bewijs door Cauchy van een stelling over het aantal waarden dat een functie van meer variabelen kan aannemen als de variabelen gepermuteerd worden.

Stelling

*Stel dat f een functie is van n (vijf of meer) variabelen $x_1, x_2, \dots, x_n$. Zij p het grootste priemgetal kleiner dan of gelijk aan n . Dan geldt: **als** f onder alle mogelijke permutaties minder dan p verschillende waarden aanneemt **dan** neem f ten hoogste twee verschillende waarden aan. Verder is het aantal waarden ook een deler van $n!$.*

Bewijs.

Zie **het origineel**. Ik zal het ook netjes opschrijven.



Stap 4: waarden tellen

De algebraïsche functies van de coëfficiënten, die dus rationale functies van de oplossingen zijn, die we bekijken moeten oplossingen van de (vijfdegraads)vergelijking opleveren en nemen ten hoogste vijf waarden aan, en dus alleen 1, 2, of 5 waarden.

Dit wordt veelvuldig gebruikt in de rest van het bewijs.

Stap 5: rationale functies met twee waarden

Als v en w elk twee waarden, respectievelijk v_1 en v_2 , en w_1 en w_2 , aannemen dan zijn $v_1 + v_2$ en $v_1 w_1 + v_2 w_2$ symmetrisch; noem ze t_1 en t_2 .

Dan kun je v_1 als volgt schrijven:

$$v_1 = \frac{t_1 w_2 - t_2}{w_2 - w_1}$$

Dit passen we toe op v en de discriminant van de vergelijking:

$$D = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_1 - x_5)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_2 - x_5)(x_3 - x_4)(x_3 - x_5)(x_4 - x_5)$$

Er komt

$$v_1 = \frac{t_1 D - t_2}{2D} = \frac{1}{2}t + \frac{t_2}{2D^2} \cdot D$$

Stap 5: rationale functies met twee waarden

Conclusie

Elke rationale functie die precies twee waarden aanneemt is te schrijven als

$$p + q \cdot D$$

met p en q rationaal en symmetrisch, en D de discriminant van de variabelen.

Stap 5: rationale functies met vijf waarden

Eerst een speciaal geval: $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ is symmetrisch in x_2, x_3, x_4 , en x_5 .

Dan is f te schrijven als

$$r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4$$

met r_0, r_1, r_2, r_3 , en r_4 symmetrisch.

Elke functie van die vorm is symmetrisch of neemt 5 verschillende waarden aan.

Stap 5: rationale functies met vijf waarden

Met behulp van het speciale geval kun je dan bewijzen dat, algemeen:

Conclusie

Elke functie van vijf variabelen die precies vijf waarden aanneemt is te schrijven als

$$r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4$$

met r_0 , r_1 , r_2 , r_3 , en r_4 symmetrisch, en x één van de variabelen.

Stap 6: de afmakers

Als we naar een algemene vijfdegraadsvergelijking kijken zien we dat een potentiële oplosformule niet uitsluitend rationaal kan zijn ($x^5 = 2$ heeft geen rationale oplossingen).

Er moet dus ten minste één keer een wortel getrokken worden.

Zeg

$$\sqrt[m]{R} = v \text{ of } R = v^m$$

met

- ▶ R een rationale functie van de coëfficiënten,
- ▶ v een rationale functie van de oplossingen, en
- ▶ m een priemgetal.

Stap 6: de afmakers

De wortel heeft m verschillende waarden dus m deelt $5!$.
Dus $m = 2$, $m = 3$, of $m = 5$. En $m = 3$ is al afgevallen.

Stap 6: de afmaker als $m = 5$

Het gaat om $\sqrt[5]{R}$, die heeft vijf waarden, en is dus te schrijven als

$$r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + r_3 x_1^3 + r_4 x_1^4$$

met r_0, r_1, r_2, r_3 , en r_4 symmetrisch en x één van de oplossingen.

Hierdoor is x uit te drukken in $R^{\frac{1}{5}}$ als

$$x = s_0 + s_1 R^{\frac{1}{5}} + s_2 R^{\frac{2}{5}} + s_3 R^{\frac{3}{5}} + s_4 R^{\frac{4}{5}}$$

met s_0, s_1, s_2, s_3 , en s_4 symmetrisch.

Stap 6: de afmaker als $m = 5$

Als eerder: we kunnen $s_1 R^{\frac{1}{5}}$ uitdrukken in de oplossingen

$$s_1 R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5)$$

en daar is onze eerste tegenspraak:

$s_1^5 R$ is symmetrisch in de x_i , dus $s_1 R^{\frac{1}{5}}$ neem vijf waarden aan.

Aan de andere kant: $\frac{1}{5}(x_1 + \alpha^4 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha x_5)$ neem 120 verschillende waarden aan ...

Stap 6: de afmaker als $m = 2$

Bijna hetzelfde, maar met wat meer werk.

Het leidt tot een gelijkheid waarin het ene lid tien waarden heeft en het andere 120 waarden.

Slotopmerking

Abel's artikel gaat over de *algemene* vijfdegraadsvergelijking.

Dat betekent dat er geen algebraïsche relaties tussen de oplossingen bestaan (of worden verondersteld), en daarmee ook niet tussen de coëfficiënten.

De argumenten van Lagrange zijn eigenlijk ook voor de *algemene* tweede-, derde-, en vierdegraadsvergelijkingen en leveren daarmee formules waar alleen nog de coëfficiënten ingevuld moeten worden om een specifieke vergelijking op te lossen.

Slotopmerking

Abel liet dus zien dat er geen *algemene* formule bestaat.

Hij gaf geen expliciet voorbeeld van een vergelijking waar geen wortelformule werkt.

NB $x^5 = 2$ heeft een (flauwe) worteloplossing: $x = \sqrt[5]{2}$.

Standaardvoorbeeld: de oplossingen van $x^5 - x - 1 = 0$ zijn niet met behulp van algebraïsche functies uit te drukken.

Het bewijs hiervan vergt materiaal uit de Galoistheorie.

En dat is een veel langer verhaal . . .