

Worteltrekken met de hand

In deze tijd van rekenmachines en computers raken oude rekentechnieken in onbruik. De staartdeling kent bijna iedereen nog wel, maar wat niet veel mensen weten, is dat je op vrijwel dezelfde manier ook kunt worteltrekken. Het is even wennen, maar dan is het net zo makkelijk als staartdelen.

We nemen als voorbeeld het getal 1369; met behulp van een rekenmachientje vinden we dat $\sqrt{1369}$ gelijk is aan 37. Zonder rekenmachine is dat wat moeilijker. Om te zien hoe we $\sqrt{1369}$ met de hand hadden kunnen vinden, bekijken we hoe het kwadraat van een getal van twee cijfers er uitziet.

Neem eens aan dat we een natuurlijk getal n tussen 10 en 100 hebben, met cijfers a en b . Dan is $n = 10a + b$ en er geldt

$$\begin{aligned} n^2 &= (10a + b)^2 \\ &= (10a)^2 + 2 \cdot 10ab + b^2 \\ &= (10a)^2 + (2 \cdot 10a + b)b \\ &= 100a^2 + (2 \cdot a \cdot 10 + b)b. \end{aligned}$$

We bekijken nu hoe je hiermee $\sqrt{1369}$ kunt berekenen. We gaan er even van uit dat de wortel een geheel getal is, verderop zullen we zien wat te doen als dat niet het geval is. Bedenk dat die wortel een getal van twee

cijfers a en b zal zijn. Verdeel het getal 1369 in groepen van twee cijfers van rechts (natuurlijk kan de groep links slechts één cijfer bevatten):

$$13 \mid 69$$

Het grootste kwadraat kleiner dan 13 is 3^2 , dus we weten dan dat $a = 3$. Daarmee hebben we dus:

$$1369 = 100 \cdot 3^2 + (2 \cdot 3 \cdot 10 + b)b,$$

oftewel

$$1369 = 900 + (60 + b)b.$$

We trekken 900 van 1369 af; er blijft 469 over. Nu moeten we het cijfer b zo kiezen dat $469 = (60 + b)b$; het is niet moeilijk in te zien dat $b = 7$ moet zijn. Dus $\sqrt{1369} = 37$.

We kunnen dit op de volgende manier kort opschrijven:

$$\begin{array}{r} \sqrt{1369} = 37 \\ \hline 13 \mid 69 \\ - 9 \\ \hline 469 \\ - 469 \\ \hline 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3^2 = 9 \\ (60 + 7)7 = 469 \end{array} \quad \begin{array}{l} \backslash 3. \\ \backslash 37 \end{array}$$

Grotere getallen

Het algoritme werkt ook voor getallen met meer cijfers. Als voorbeeld berekenen we $\sqrt{174724}$.

We verdelen het getal weer in groepjes van twee cijfers en zoeken het grootste kwadraat onder 17. Dat is 4^2 , dus $a = 4$.

Dan volgt de tweede stap: $1747 - 1600 = 147$; we zoeken nu de grootste b zodanig

dat $(2 \cdot 4 \cdot 10 + b)b \leq 47$. Dat levert $b = 1$.

De derde stap gaat dan net als de tweede, maar nu met $a = 41$, waarbij $(2 \cdot 41 \cdot 10 + b)b$ zo dicht mogelijk onder 6624 moet komen. Als $b = 8$, komen we nu ook precies uit; we kunnen concluderen dat $\sqrt{174724} = 418$.

De berekening kort opgeschreven is als volgt:

$$\begin{array}{r} \sqrt{174724} = 418 \\ \hline 17 \overline{) 4724} \\ - 16 \\ \hline 147 \\ - 81 \\ \hline 6624 \\ - 6624 \\ \hline 0 \end{array}$$

$4^2 = 16$ $\backslash 4..$
 $(80+1) \cdot 1 = 81$ $\backslash 41.$
 $(820+8) \cdot 8 = 6624$ $\backslash 418$

Irrationale uitkomsten

De meeste getallen zijn echter geen kwadraten van natuurlijke getallen. Maar ook dan kunnen we het algoritme toepassen; als de laatste rest positief is, kunnen we doorgaan door achter de komma telkens twee nullen te schrijven. Laten we dat illustreren aan de hand van een voorbeeld; we berekenen $\sqrt{521}$.

Met de berekening hieronder vinden we dat $\sqrt{521}$ een getal tussen 22,8 en 22,9 is.

Als we een betere benadering nodig hebben, kunnen we weer achter de laatste rest twee nullen schrijven en verder gaan met het algoritme.

Opgave 1. Bepaal nog twee cijfers van $\sqrt{521}$.

Opgave 2. Bepaal de eerste vijf cijfers van $\sqrt{3}$ (zonder rekenmachientje natuurlijk).

21

$$\begin{array}{r} \sqrt{521} = 22,8... \\ \hline 5 \overline{) 21} \\ - 4 \\ \hline 121 \\ - 84 \\ \hline 3700 \\ - 3584 \\ \hline 116 \end{array}$$

$2^2 = 4$ $\backslash 2.$
 $(40+2) \cdot 2 = 84$ $\backslash 22$
 $(440+8) \cdot 8 = 3584$ $\backslash 22,8$

