Training Internationale Studentenwiskundecompetitie

Iris Smit, Josha Box

4 februari 2020

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde
Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica
Universiteit van Amsterdam

Voorwoord

Deze syllabus is bedoeld als voorbereiding voor de Internationale Studentenwiskundecompetitie (IMC) of gelijksoortige wiskundecompetities. Het IMC is een competitie die jaarlijks wordt georganiseerd en meestal plaats vindt in Blagoevgrad in Bulgarije. Gedurende twee ochtendsessies van vijf uur verdeeld over twee dagen worden in totaal tien vragen opgelost. Deze vragen kunnen gaan over allerhande deelgebieden van de wiskunde, maar meestal is de kennis van het eerste jaar voldoende om de vragen te kunnen oplossen. Zie `www.imc-math.org` voor meer informatie over het IMC.

Het doel van deze syllabus om studenten een manier van nadenken, technieken en stellingen aan te reiken die van pas kunnen komen bij het IMC. Daarom bevatten de hoofdstukken veel stellingen die niet worden bewezen. Deze bewijzen kan de student indien nodig zelf opzoeken in het naslagwerk van het desbetreffende vak.

Verder bevat deze syllabus veel opgaven, die de schrijvers per hoofstuk hebben geprobeerd te ordenen op volgorde van moeilijkheid. Deze opgaven zijn afkomstig van het IMC zelf, van andere wiskundecompetities zoals de LIMO, het IMO en Putnam en van derden.

Veel dank gaat uit naar Fokko van de Bult, wiens teksten en opgaven de basis hebben gevormd voor veel hoofdstukken in deze syllabus. Ook willen wij Jakub Konieczny bedanken voor het ter beschikking stellen van zijn materiaal. In sommige gevallen zijn teksten van beiden vrijelijk overgenomen en aangepast.

Inhoudsopgave

Combinatoriek

1 Handig tellen en inductie

Het tellen van aantallen elementen in een verzameling is een kunst. Vaak helpt het om eerst eens zoveel mogelijk verschillende manieren te verzinnen om tegen een probleem aan te kijken. De ene manier van tellen is de andere niet. De volgende ideeën zouden van pas kunnen komen:

Omschrijven

Knip je verzameling op in stukken die makkelijker te tellen zijn. Of probeer dezelfde verzameling op een andere manier te beschrijven. Denk goed na op welke manier de verzameling het meest overzichtelijk lijkt. Een (makkelijk) voorbeeld hierbij is het bewijs van het *handshaking lemma*:

Voorbeeld 1.1. In een groep van n mensen, schudden diverse mensen elkaar de hand. Bewijs dat het aantal mensen dat een oneven aantal handen heeft geschud, even moet zijn.

Bewijs. Het totaal aantal handshakes hoeft natuurlijk niet even te zijn, maar het totaal aantal geschudde handen wel, want er zijn steeds twee mensen bij het handengeven betrokken. Als een oneven aantal mensen een oneven aantal handen zou schudden, zou het totaal aantal geschudde handen ook weer oneven zijn. Dit kan niet. $\square$

Binomiaalcoëfficiënten

Een veelgebruikt concept uit de combinatoriek is de binomiaalcoëfficient. Als n en k niet-negatieve gehele getallen zijn waarvoor $n \geq k$, dan is $\binom{n}{k}$ het aantal manieren om van n objecten er k uit te kiezen. Het wordt uitgesproken als "n boven k". Je kunt $\binom{n}{k}$ expliciet uitrekenen, zoals jullie waarschijnlijk al eens hebben gezien: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. In het bijzonder betekent dit ook dat $n!$ kennelijk deelbaar is door $k!(n-k)!$, hetgeen a priori niet vanzelfsprekend is.

Binomiaalcoëfficiënten voldoen aan een recurrentiebetrekking $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, want als je k van de n objecten moet kiezen, kun je ofwel k van de eerste $n-1$ objecten kiezen, of $k-1$ van de eerste $n-1$ elementen en verder nog het laatste element. Deze recurrentiebetrekking kan erg handig zijn bij het uitvoeren van een inductiebewijs.

Een andere bekende gelijkheid met binomiaalcoëfficiënten is het binomium van Newton: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Het volgende voorbeeld is vooral een omdenktruukje, dat in vele gedaanten in combinatoriek opgaven opduikt.

Voorbeeld 1.2. Pietje heeft een mand met 20 eieren en wil elk ei in één van de kleuren rood, groen, paars, blauw, of geel schilderen. Hoeveel verschillende kleurcombinaties zijn er mogelijk voor de uiteindelijke mand gekleurde eieren?

Bewijs. A priori kan Pietje voor elk ei natuurlijk 5 keuzes maken, maar veel van de 5^{20} mogelijkheden die dit oplevert, geven uiteindelijk dezelfde kleurencombinatie in de mand gekleurde eieren. We zullen er dus op een andere manier over moeten nadenken.

Als het ons toch niet uitmaakt in welke volgorde Pietje aan het kleuren is, kunnen we net zo goed aannemen dat hij de kleuren één voor één afgaat: Eerst kleurt hij een aantal eieren rood, dan een paar groen, daarna is paars aan de beurt, dan blauw, en tenslotte worden eventuele overgebleven eieren geel gekleurd. In de rij van 20 eieren, moet Pietje dan 4 momenten kiezen waarop hij van kleur wisselt. (Dit mag natuurlijk ook twee keer achter elkaar als hij een kleur helemaal wil overslaan.) We zouden dit kunnen zien als een rij van 24 gebeurtenissen (20 keer 'ei kleuren' en 4 keer 'kleur wisselen'), en we moeten kiezen waar de 4 kleurwisselingen in deze rij liggen. Dit geeft ons $\binom{24}{4}$ mogelijkheden. $\square$

Bijecties

Als je wilt aantonen dat een verzameling een even aantal elementen heeft, kun je proberen hem in twee gelijke helften te verdelen. Om te weten of je delen even groot zijn, kun je proberen een bijectie van het ene deel naar het andere deel te vinden. Je hoeft dan niet meer te weten hoe groot die delen waren, want samen hebben ze in elk geval een even grootte.

Ook als je meer dan alleen de pariteit van de grootte van een verzameling wilt weten kunnen bijecties goed van pas komen. Zie ook het voorbeeld bij recurrentie hieronder.

Inductie

Inductie kan bij combinatoriek-opgaven een heel nuttige techniek zijn. Om een probleem op te lossen, hoef je het namelijk alleen te reduceren naar een probleem wat kleiner is. Dit kleinere probleem kun je oplossen vanwege de inductiehypothese, en dus kun je je grote probleem ook oplossen. Zie het volgende voorbeeld:

Voorbeeld 1.3. Op een (rond) circuit staan een aantal auto's, en elke auto heeft een beperkte hoeveelheid brandstof in de tank. De totale hoeveelheid brandstof is precies genoeg om één ronde te rijden. Bewijs dat minstens één van de auto's een hele ronde kan rijden, door onderweg de brandstof van de andere auto's over te hevelen.

Bewijs. We bewijzen dit met inductie naar het aantal auto's. Daarvoor doen we eerst de inductiebasis: met één auto is het duidelijk dat hij het hele rondje kan rijden.

Neem $n > 1$ een geheel getal, en stel dat er altijd een auto is die de hele ronde kan rijden wanneer er minder dan n auto's zijn (de inductiehypothese). We bekijken nu een circuit waar n auto's op staan. Er is minstens één auto A die naar de volgende auto, B, op het circuit kan rijden. Anders is er immers niet genoeg brandstof om een hele ronde te kunnen rijden. Haal nu auto B weg, en hevel zijn brandstof over in auto A. Nu zijn we in een situatie met minder dan n auto's en dus kunnen we een auto uitkiezen die de hele ronde kan rijden. Nu is het duidelijk dat deze auto ook de hele ronde kan rijden, als we auto B weer terugplaatsen met zijn oorpsonkelijke hoeveelheid brandstof. Dit voltooit de inductiestap. □

Recurrenties

Ook als je dingen moet tellen kan het handig zijn om te reduceren naar kleinere gevallen. Als je iets moet tellen dat afhangt van n, laten we het aantal even $f(n)$ noemen, dan kun je bijvoorbeeld $f(n)$ uitdrukken in termen van $f(n-1), f(n-2), \ldots$. Zo'n formule heet een recurrente formule of een recursie. Als je ook de waarden weet voor kleine n, ligt vervolgens de hele functie f vast.

Voorbeeld 1.4. Op hoeveel manieren kun je een pad betegelen van lengte n met tegels van lengte 1 of 2?

Bewijs. Voor kleine n is dit makkelijk te tellen en vind je het volgende tabelletje

n	1	2	3	4	5	6
$f(n)$	1	2	3	5	8	13

De functie $f(n)$ die we hier bekijken is natuurlijk het aantal manieren om een pad van lengte n te betegelen. Dit tabelletje is waarschijnlijk genoeg om de Fibonacci-getallen te herkennen, en het lijkt dus een goed idee om een recurrente formule te vinden. Laten we de laatste tegel die we hebben neergelegd om het pad van lengte n te maken bekijken. Net als alle tegels heeft deze tegel lengte 1 of 2. Als we hem weglaten houden we dus een pad van lengte $n-1$ of $n-2$ over. We kunnen een pad van lengte n dus maken door een pad van lengte $n-1$ te maken en er een tegel van lengte 1 aan toe te voegen of door eerst een pad van lengte $n-2$ te maken en daar een tegel van lengte 2 aan toe te voegen. We zien dus dat

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2).$$

Met de beginwaarden $f(1) = 1$ en $f(2) = 2$ zien we dat $f(n)$ het n'de Fibonaccigetal moet zijn. □

Makkelijke gevallen uitschrijven

In heel erg veel vragen komt een algemeen geheel getal (vaak n genoemd) voor. Het geeft soms veel inzicht in de vraag om eerst eens het probleem te bekijken voor een aantal lage waarden van n. Als je iets moet bewijzen voor alle n, kan je kijken of je het kan bewijzen voor $n = 1, 2, 3, \ldots$ en daarmee inspiratie opdoen voor het algemene geval (soms krijg je hier ook al punten voor). Als een rijtje op een ingewikkelde manier gedefinieerd is, kan je de eerste paar termen uitschrijven om een idee te krijgen met wat voor rijtje je te maken hebt. Ook bij oneindige sommen kan je kijken of de eindige sommen iets interessants zijn door de eerste paar termen uit te schrijven.

Lineaire recursie (niet voor eerstejaars)

Gegeven een recurrente betrekking is vaak ook nog de vraag wat dan de directe formule is voor de functie. Vaak werkt het om eerst een aantal waarden uit te rekenen, vervolgens de formule te gokken en dan te laten zien dat die voldoet aan de recursie. In het geval van een *lineaire recursie* is er ook een recept dat je altijd een formule geeft. In het algemeen ziet de lineaire recursie eruit als

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \cdots + c_m a_{n-m} \qquad \text{voor } n \geq m,$$

waar $c_1, \ldots, c_m$ gegeven getallen zijn, en waar de beginwaarden $a_0, \ldots, a_{m-1}$ gegeven zijn.

In het geval dat $m = 1$ zien we gelijk in dat $a_n = a_0 \cdot c_1^n$ een directe formule voor het rijtje is. Nu bekijken we of een dergelijke oplossing ook werkt voor $m = 2$. Dus we hebben een rijtje met recursie $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$ en stel nu dat $a_n = \lambda^n$ voor één of andere constante λ. We zien dan dat $\lambda^n = c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2}$ oftewel

$$\lambda^2 - c_1 \lambda - c_2 = 0.$$

Dit wordt het karakteristieke polynoom van (a_n) genoemd en heeft voor $m = 2$ meestal twee oplossingen λ_1, λ_2. Door lineaire combinaties te nemen van λ_1^n en λ_2^n, vind je de oplossing.

Voorbeeld 1.5. Stel $a_0 = 0$, $a_1 = 5$ en $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$.

Het karakteristieke polynoom wordt in dit geval $c^2 - c - 6$, met nulpunten -2 en 3. Omdat de recursie lineair is geldt dat voor alle β_1, β_2 de uitdrukking $a_n = \beta_1(-2)^n + \beta_2 3^n$ aan de recursierelatie voldoet. We moeten dus alleen β_1 en β_2 dusdanig kiezen dat ook aan de beginconditie voldaan wordt. Er volgt dat $a_n = -(-2)^n + 3^n$ een directe formule is voor het rijtje.

Voor algemene m kan dit op een vergelijkbare manier opgelost worden.

Opgaven

Vraag 1.1. Hoeveel positieve gehele getallen n zijn er zodanig dat n een deler is van 10^{40} of van 20^{30}?

Vraag 1.2. Bewijs de volgende identiteiten op *combinatorische* wijze, dus zonder de formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ te gebruiken.

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$

(b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

(c) $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k} + \ldots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

Vraag 1.3. Bepaal het aantal geordende drietallen (A_1, A_2, A_3) van verzamelingen zodat

1) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$;

2) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$.

Vraag 1.4 (IMC 2012)**.** Voor ieder positief geheel getal n, zij $p(n)$ het aantal manieren om n te schrijven als som van positieve gehele getallen. Bijvoorbeeld, $p(4) = 5$, want

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Definieer ook $p(0) = 1$. Bewijs dat $p(n) - p(n-1)$ het aantal manieren is om n uit te drukken als som van gehele getallen die allemaal strikt groter dan 1 zijn.

Vraag 1.5. Op hoeveel manieren kunnen we de getallen 1 t/m 10 kleuren met rood, groen en blauw, zodat geen twee opeenvolgende getallen dezelfde kleur hebben, en oneven getallen niet rood zijn?

Vraag 1.6. Zij $n \geq 2$ een geheel getal en T_n het aantal niet lege deelverzamelingen S van $\{1, 2, \ldots, n\}$ zodat het gemiddelde van S geheel is. Laat zien dat $T_n - n$ even is.

Vraag 1.7. Voor positieve gehele getallen n geeft $C(n)$ het aantal manieren om n te schrijven als som van niet-stijgende machten van 2, waar geen enkele macht meer dan drie keer gebruikt wordt. Bestaat er een polynoom $P(x)$ zodat $C(n) = \lfloor P(n) \rfloor$?
Voorbeeld $C(8) = 5$, want $8 = 4 + 4 = 4 + 2 + 2 = 4 + 2 + 1 + 1 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1$.

Vraag 1.8. Bewijs de volgende identiteiten op combinatorische wijze.

(a) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$

(b) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

(c) $\binom{\binom{n}{2}}{2} = 3\binom{n+1}{4}$

Vraag 1.9. Op een feestje zijn n mensen, van wie sommigen elkaar een hand geven. Na het feestje schrijft iedereen op een blaadje het aantal mensen met wie hij of zij de hand heeft geschud. Het blijkt dat er $n - 1$ verschillende getallen worden opgeschreven. Bewijs dat er twee personen op het feest waren, zodat elke andere persoon óf beide óf geen van beide de hand heeft geschud.

Vraag 1.10. Zij r en s positieve gehele getallen. Bepaal een formule voor het aantal geordende viertallen (a, b, c, d) zodat

$$3^r \cdot 7^s = kgv(a, b, c) = kgv(b, c, d) = kgv(c, d, a) = kgv(d, a, b).$$

Vraag 1.11. Zij S een $n \times 3$ bord. Laat op het bord een toren lopen, die bij elke stap één vakje horizontaal of verticaal mag lopen. Op hoeveel manieren kan de toren van linksonder (vakje $(1, 1)$) naar rechtsonder (vakje $(n, 1)$) lopen waarbij elk vakje precies één keer wordt aangedaan?

Vraag 1.12. Een egoïstische verzameling is een verzameling die zijn eigen cardinaliteit als element bevat. Bepaal het aantal egoïstische deelverzamelingen van $\{1, 2, \ldots, n\}$ die zelf geen egoïstische deelverzameling bevatten.

Vraag 1.13. Een Dyck pad van lengte n is een pad over het rooster met stapjes $(1, 1)$ omhoog en stapjes $(1, -1)$ omlaag beginnend in de oorsprong en eindigend in $(2n, 0)$ dat nooit onder de x-as duikt. Een terugkomst is een maximale rij opeenvolgende dalende stapjes die eindigt op de x-as, en waar geen dalend stapje voor staat. Laat zien dat er een bijectie is tussen de Dyck paden van lengte n zonder terugkomsten van even lengte en de Dyck paden van lengte $n - 1$.

Vraag 1.14. Gegeven een eindige woord W van K en O schrijven we $\Delta(W)$ voor het aantal K's min het aantal O's in W. Bijvoorbeeld $\Delta(KOOKOOK) = -1$. Een woord heet gebalanceerd als voor elk deelwoord W' van W geldt $|\Delta(W')| \leq 2$. Dus $KOOKOOK$ is niet gebalanceerd want $\Delta(OOKOO) = -3$. Vind het aantal gebalanceerde woorden van lengte n.

Vraag 1.15. Voor $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ definieer $Q(n, k)$ als de coëfficiënt van x^k in $(1 + x + x^2 + x^3)^n$. Bewijs dat

$$Q(n, k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n}{k - 2j}.$$

Vraag 1.16. Zij $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, met $n \geq 3$. Laat $\mathcal{F}$ de familie van alle niet-constante functies $f : A_n \to A_n$ zijn die voldoen aan

1) $f(k) \leq f(k + 1)$ voor $k = 1, 2, \ldots, n - 1$;
2) $f(k) = f(f(k + 1))$ voor $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.

Bepaal het aantal functies in $\mathcal{F}$.

Vraag 1.17. Voor gehele, positieve n en m definieer $f(n, m)$ als het aantal n-tuples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ van gehele getallen die voldoen aan $|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leq m$. Laat zien dat $f(n, m) = f(m, n)$

Vraag 1.18. Gegeven is een aantal lampjes die rood of blauw licht kunnen geven. Sommige paren lampjes zijn verbonden. Op dit netwerk kunnen we de volgende actie uitvoeren: kies een lampje, vervolgens veranderen dit lampje en al zijn buren van kleur. Stel dat in het begin alle lampjes blauw zijn. Bewijs dat we onze acties zo kunnen kiezen dat alle lampjes uiteindelijk rood zijn.

Vraag 1.19. Een kabouter wandelt over het rooster van $(0, 0)$ naar $(0, 0)$ in $2n$ stappen. Daarbij zet hij stappen van lengte 1, in één van de vier windrichtingen. Op hoeveel manieren kan hij deze wandeling maken?

Vraag 1.20 (IMO 2013)**.** Een configuratie van 4027 punten in het vlak noemen we *Colombiaans* als deze uit 2013 rode en 2014 blauwe punten bestaat, waarbij geen drie van de punten uit de configuratie collineair zijn. Door het tekenen van een aantal lijne (rechten) wordt het vlak in verschillende gebieden verdeeld. Voor een gegeven Colombiaanse configuratie noemn we een verzameling lijnen *goed* als aan de volgende twee voorwaarden wordt voldaan:

- geen enkele lijn gaat door een punt van de configuratie;
- geen enkel gebied bevat punten van beide kleuren.

Bepaal de kleinste waarde van k zodanig dat voor elke Colombiaanse configuratie van 4027 punten er een goede verzameling van k lijnen bestaat.

Vraag 1.21. Stel dat de karakteristieke vergelijking van een lineaire recursie een dubbel nulpunt heeft. Kun je daaruit nog steeds twee lineair onafhankelijke oplossingen vinden?

2 Ladenpricipe

Het ladenprincipe (Engels: Pigeonhole principle) zegt in zijn simpelste vorm dat als je $n+1$ ballen in n laden wil stoppen, er minstens één lade is waarin je minstens twee ballen legt. Dit principe kun je vaak op onverwachte plekken gebruiken.

Meestal gebruik je het om te laten zien dat er een getal (of paar getallen of iets dergelijks) bestaat dat aan een bepaalde eigenschap voldoet. Een voorbeeld:

Voorbeeld 2.1. Gegeven $n+2$ gehele getallen, laat zien dat er twee getallen zijn waarvan het verschil of de som deelbaar is door $2n$.

Bewijs. We definiëren nu de laden als $L_a = \{x \mid x = \pm a \mod 2n\}$ voor $a = 0, 1, \ldots, n$. De ballen zijn de $n+2$ getallen die we hebben en die leggen we elk in de bijbehorende lade. We hebben dus $n+1$ laden en $n+2$ ballen en dit betekent dat er een lade is met 2 ballen erin. Ofwel er zijn 2 van onze $n+2$ getallen die ofwel gelijk zijn modulo $2n$, ofwel tegengesteld. Als ze gelijk zijn modulo $2n$ is hun verschil deelbaar door $2n$ en als ze tegengesteld zijn is hun som deelbaar door $2n$. □

Een iets geavanceerdere versie zegt dat als je $kn+1$ ballen in n laden stopt er minstens één lade is met $k+1$ ballen erin. Ook weet je dat als je oneindig veel ballen in maar eindig veel laden stopt, er een lade is met oneindig veel ballen erin. En als je overaftelbaar oneindig veel ballen in aftelbaar veel laden stopt, moet er een lade zijn waar overaftelbaar oneindig veel ballen in zitten.

Ondanks de eenvoud van het ladenprincipe, kun je er wel degelijk niet-triviale dingen mee bewijzen. De truuk is om te herkennen wanneer en waarop je het kunt toepassen. Het kan best even puzzelen zijn om een mogelijke 'lade' te vinden. Een tweede voorbeeld:

Voorbeeld 2.2. Voor elke rij van $mn+1$ verschillende reële getallen, bestaat er een stijgende deelrij van lengte $m+1$ of een dalende deelrij van lengte $n+1$.

Bewijs. Noem de rij $a_1, \ldots a_{mn+1}$. Laat, voor $i = 1, \ldots mn+1$, t_i de lengte van de langste stijgende deelrij die begint bij a_i zijn. Als er een i is met $t_i > m$, dan zijn we klaar. Zonee, dan zijn alle t_i elementen van $\{1, 2, \ldots, m\}$. Vanwege het ladenprincipe, moeten er dan minstens $n+1$ gelijke t_i zijn. Als $i < j$ en $t_i = t_j$, dan moet gelden dat $a_i \geq a_j$. Immers, als $a_i < a_j$ dan kun je vanaf a_i een langer stijgend deelrijtje vinden dan vanaf a_j, door a_i vóóraan een rijte dat bij a_j begon te plakken.

Maar nu geven die $n+1$ gelijke t_i-waarden ons een niet-stijgende deelrij van lengte $n+1$. Omdat alle a_i verschillend waren, moet het zelfs een dalende deelrij zijn. □

Opgaven

Vraag 2.1. Zij A een verzameling van 19 getallen uit de rekenkundige rij gegeven door $1, 4, 7, \ldots, 100$. Bewijs dat er twee verschillende getallen in A zijn waarvan de som 104 is.

Vraag 2.2. Zij $n \geq 1$ een geheel getal. Hoeveel lopers kun je op een $n \times n$-schaakbord plaatsen, zodat geen enkele loper een andere loper kan slaan?

Vraag 2.3. Zij a_j, b_j en c_j gehele getallen voor $1 \leq j \leq N$. Stel dat voor elke j tenminste één van a_j, b_j en c_j oneven is. Laat zien dat er gehele getallen r, s en t zijn zodat $ra_j + sb_j + tc_j$ (voor $1 \leq j \leq N$) in minstens $4N/7$ van de gevallen oneven is.

Vraag 2.4. Gegeven is een 8×8-schaakbord met daarop 33 torens. Bewijs dat je 5 torens kunt uitkiezen, zodat geen enkel paar in dezelfde rij of kolom staat.

Vraag 2.5. Gegeven $n + 1$ gehele getallen tussen 1 en $2n$, laat zien dat één van deze getallen deelbaar is door een andere.

Vraag 2.6. Laat negen lijnen elk een vierkant in twee vierhoeken verdelen waarvan de oppervlakten zich verhouden als 2 : 3. Bewijs dat er een punt is waardoor minstens drie van deze lijnen gaan.

Vraag 2.7. Tussen zes steden zijn allemaal directe vluchten mogelijk. Twee luchtvaartmaatschappijen hebben de routes onderling verdeeld: tussen elk paar steden vliegt precies één van deze luchtvaartmaatschappijen.

Laat zien dat er een drietal steden is, waartussen alle vluchten door dezelfde maatschappij worden uitgevoerd.

Vraag 2.8 (De stelling van Dirichlet)**.** Laat zien dat voor een irrationaal getal α en voor elk positief getal ε, er positieve gehele getallen k, n bestaan zodat $|k\alpha - n| < \varepsilon$.

Vraag 2.9. Laat, voor een partitie π van $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$, de waarde $\pi(x)$ het aantal elementen zijn in het deel met x erin. Bewijs dat voor elke twee partities π en π' er twee verschillende getallen x en y uit S bestaan met $\pi(x) = \pi(y)$ en $\pi'(x) = \pi'(y)$.

(Een partitie van S is hier een opdeling van S in een aantal niet lege disjuncte deelverzamelingen, waarvan de vereniging precies S is.)

Vraag 2.10. Is het mogelijk om een 8×8–schaakbord te doorsnijden met 13 lijnen, die niet door een middelpunt van een vakje gaan, zodanig dat alle middelpunten van vakjes van elkaar gescheiden worden?

Vraag 2.11. 200 studenten nemen deel aan een wiskundewedstrijd. Er zijn 6 opgaven. Elke opgave is opgelost door minstens 120 deelnemers. Laat zien dat er 2 studenten zijn die samen alle opgaven hebben opgelost.

Vraag 2.12. Gegeven is een convexe 101-hoek. Als twee hoekpunten niet door een zijde verbonden zijn, tekenen we de diagonaal en kleuren we die in één van 50 kleuren. Stel dat geen drie diagonalen elkaar in één punt snijden. Bewijs dat er een driehoek is die binnen de 101-hoek ligt (de hoekpunten mogen op de rand liggen), zodat de zijden op diagonalen van dezelfde kleur liggen.

Vraag 2.13. Gegeven zijn n gehele getallen $a_1, \ldots, a_n$. Bewijs dat we een aantal van deze getallen kunnen kiezen, zodat de som deelbaar is door n.

Vraag 2.14. Zij $r_n = \min\{\left|c + d\sqrt{3}\right| \mid c, d \in \mathbb{Z} \text{ en } c + d = n\}$. Bepaal $\sup_n r_n$.

Vraag 2.15. Laat $P(S)$ voor een verzameling S de verzameling paren uit S zijn, waar een paar een (ongeordende) verzameling van 2 elementen is. Schrijf $P(\mathbb{N}) = P_1 \cup P_2$ waar P_1 en P_2 disjuncte verzamelingen zijn. Bewijs dat er een oneindig deelverzameling $Q \subseteq \mathbb{N}$ bestaat zodat $P(Q) \subseteq P_1$ of $P(Q) \subseteq P_2$.

Vraag 2.16. Zij $1, 2, 3, \ldots, 2005, 2006, 2007, 2009, 2012, 2016, \ldots$ een rij gehele getallen gedefinieerd door $x_k = k$ voor $k = 1, 2, \ldots, 2006$ en $x_{k+1} = x_k + x_{k-2005}$ voor $k \geq 2006$. Laat zien dat de rij 2005 opeenvolgende termen bevat die allen deelbaar zijn door 2006.

3 Invariantie

Invariantie is een eigenschap van bepaalde transformerende systemen die gebruikt kan worden om zekere dingen over dat systeem te bewijzen. Bij wiskundewedstrijden zijn er regelmatig opgaves die opgelost kunnen worden met behulp van een invariant.

Het basisidee

Als er een systeem is gegeven tezamen met een aantal regels hoe dat systeem kan/mag veranderen dan is een invariant van dat systeem een functie op toestanden van het systeem die constant is onder veranderingen van het systeem volgens de regels.

Denk bijvoorbeeld aan een schaakpartij, met als toestanden de stellingen van de partij en als functie de kleur van het veld waar de witte loper die begon naast de koning staat. Aangezien een loper altijd schuin zet zal de kleur van het veld waarop hij staat niet veranderen als er gezet wordt (de kleur verandert natuurlijk ook niet als er met een ander stuk wordt gezet). Daarom noemen wij de kleur van het veld waarop de loper staat een invariant.

Als je een invariant van een systeem kent en je weet dat zijn waarde in de beginsituatie A is, dan zal die invariant ook A zijn in alle mogelijke toestanden die volgens de regels bereikt kunnen worden.

Door van dit feit gebruik te maken kunnen we laten zien dat bepaalde eindstanden niet bereikt kunnen worden vanuit de beginstelling als de invariant in die beoogde eindtoestand een andere waarde heeft dan in het begin. Zo zien we in het voorbeeld van het schaakspel dat een loper ook na een willekeurig aantal zetten niet van kleur kan veranderen en dus bijvoorbeeld niet van het linksonder (dat zwart is) naar het veld rechtsonder (dat wit is) kan gaan.

Nu volgt nog een simpel voorbeeld.

Voorbeeld 3.1. Beginnend met een rij van vijf enen en zes nullen mag je telkens twee cijfers wegstrepen en er één cijfer voor in de plaats zetten. Als je twee dezelfde cijfers wegstreept, zet je er een nul ervoor terug en als het twee verschillende zijn zet je er een één voor terug. Eindig je altijd met hetzelfde getal?

Bewijs. Het aantal enen in de rij modulo 2 is een invariant. Als je namelijk twee enen wegstreept en vervangt door een nul, daalt het aantal enen met twee en dus verandert het niet modulo 2. In alle andere gevallen blijft het aantal enen gelijk en verandert het dus ook niet modulo 2. In het begin zijn er vijf enen, ofwel een oneven aantal. Er volgt dus dat het aantal enen in elke bereikbare situatie oneven is. Als er na 10 zetten nog maar een cijfer over is (merk op dat het aantal cijfers elke stap met 1 afneemt) is er dus nog steeds een oneven aantal enen. Dit betekent dat dit laatste getal dus een één moet zijn en geen nul kan zijn. Je eindigt dus inderdaad altijd met hetzelfde getal. □

En nog een voorbeeld (uit de tweede ronde van de wiskunde olympiade).

Voorbeeld 3.2 (NWO 2003-5)**.** Op een tafel liggen 10 kaarten met de getallen 1 tot en met 10 erop. Bij elke zet pak je twee kaarten (zeg met de waarden p en q) en vervangt ze door een kaart met de waarde $pq+p+q$. We doen dit tot er nog maar één kaart over is. Welke waardes kan deze laatste kaart hebben.

Bewijs. Als invariant nemen we het product van de waardes van elke kaart plus 1, dus in formule: Als we kaarten hebben met waardes $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dan is de invariant $T = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_k+1)$. Eerst laten we zien dat het een invariant is. Als we twee kaarten met waardes p en q pakken vervangen we in het product $(p+1)(q+1)$ door $(pq+p+q+1)$. Deze twee termen zijn echter precies hetzelfde en dus verandert T niet door de pak en vervang operatie. In de beginsituatie is $T = 2\cdot 3\cdots 11 = 11!$ en als er nog maar één kaart over is met waarde a is T gelijk aan $T = a+1$. Aangezien T invariant is geldt dus in de eindsituatie dat $11! = T = a+1$, ofwel dat de waarde van de laatste kaart $11!-1$ is. (NB deze waarde kan ook echt bereikt worden want het is duidelijk dat een waarde bereikt wordt en dit is de enig mogelijke.) □

Ideeën voor invarianten

In deze sectie staan een paar ideeën van mogelijke invarianten, maar dit is absoluut niet een volledige lijst en het is alleen bedoeld als voorbeeld.

Bij rijtjes getallen kun je denken aan een lineaire combinatie van die getallen (dit betekent dat je elk getal met een constante (afhankelijk van de plek van het getal) vermenigvuldigt en dan alles optelt), bijvoorbeeld voor een rijtje $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ functies als $f(x) = x_1+x_2+x_3+x_4$, $f(x) = x_1-x_2+x_3-x_4$ en $f(x) = x_1+2x_2+3x_3+4x_4$ etcetera. Ook producten van de getallen ($f(x) = x_1x_2x_3x_4$) of een hogere graads polynoom (als $f(x) = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$ of $f(x) = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1$) zijn soms nuttig. Verder kun je altijd het resultaat modulo een vast getal nemen (als je modulo 2 rekent kijk je dus of een getal even of oneven is).

In toestanden die niet bepaald worden door getallen kun je denken aan dingen als kleuringen (zoals we met de loper op het schaakbord deden, maar vaak zijn ingewikkelder kleuringen nodig). Ook het aantal elementen in een goed gekozen verzameling kan invariant zijn (bijvoorbeeld het aantal vingers in de wereld modulo 10 is redelijk invariant onder het sterven en geboren worden van mensen).

Soms zie je de/een invariant direct, maar soms ben je in de situatie dat je wel het idee hebt dat er een invariant is en heb je het gevoel dat die invariant een globale vorm heeft en dan kun je proberen om die globale vorm met nog te bepalen constantes in te vullen en dan te kijken welke constantes een invariant creëren. Ook gebeurt het dat je denkt dat een bepaalde kleuring wel een goede invariant oplevert, maar dat je de goede kleuring niet kan vinden. Meerdere kleuringen nemen en die over elkaar leggen (i.e. beide kleuringen tegelijk gebruiken) wil dan wel eens werken.

Tenslotte is het aantal zetten dat gedaan is een heel nuttig getal dat je kan gebruiken in een invariant. Wat blijft namelijk invariant bij het lopen van een paard over het schaakbord?

Voorbeeld 3.3. Elke term in de rij met eerste zes elementen $1, 0, 1, 0, 1, 0$, beginnend met de zevende term, is de som van de zes vorige modulo 10. Bewijs dat het stuk $0, 1, 0, 1, 0, 1$ nooit voorkomt.

Bewijs. Als toestand bekijken we de laatste zes getallen in de rij en als bewerking hebben we het kijken naar de laatste zes getallen een punt verder in de rij, ofwel

$$T\colon (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \mod 10).$$

Ik zie hier niet direct een goede invariant, maar een lineaire combinatie van de losse getallen modulo 10 zou best wel eens kunnen werken (modulo 10, aangezien je het laatste getal al modulo 10 neemt en je invariant dus niet zou moeten veranderen als het laatste getal een veelvoud van 10 verandert). Dus proberen we als invariant S de functie

$$S\colon (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 \mod 10,$$

waar de a_i nog te bepalen constanten zijn. Nu bekijken we de functie $S \circ T - S$, waarvan we willen dat die identiek nul is, want dan is S een invariant. ($S \circ T$ betekent eerst T uitvoeren en dan S, ofwel dit is de waarde van de invariant na de bewerking). Enig rekenen geeft

$$\begin{aligned} S \circ T - S\colon (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \quad \mapsto \quad & (a_6 - a_1)x_1 + (a_6 + a_1 - a_2)x_2 \\ & + (a_6 + a_2 - a_3)x_3 + (a_6 + a_3 - a_4)x_4 \\ & + (a_6 + a_4 - a_5)x_5 + a_5x_6 \mod 10. \end{aligned}$$

We willen dat elke coefficient aan de rechterzijde nul is, ofwel dat

$$\begin{aligned} a_6 - a_1 &= 0 \mod 10, \\ a_6 + a_1 - a_2 &= 0 \mod 10, \\ a_6 + a_2 - a_3 &= 0 \mod 10, \\ a_6 + a_3 - a_4 &= 0 \mod 10, \\ a_6 + a_4 - a_5 &= 0 \mod 10, \\ a_5 &= 0 \mod 10. \end{aligned}$$

Als we alle 6 vergelijkingen bij elkaar optellen, zien we dat $5a_6 = 0 \mod 10$, ofwel dat $a_6 = 0, 2, 4, 6$ of 8. Met behulp van a_6 kunnen we dan de andere coefficienten oplossen en zien we dat $a_i = ia_6 \mod 10$. Als $a_6 = 0$ is de invariant S zelf identiek nul. Natuurlijk is dit een invariant maar erg nuttig is hij niet. Echter, als $a_6 = 2$ krijgen we als invariant voor S de functie

$$S\colon (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + 2x_6 \mod 10.$$

Als we dit uitrekenen in de beginsituatie krijgen we de waarde $S(1,0,1,0,1,0) = 8 \mod 10$. In de beoogde eindsituatie is de waarde $S(0,1,0,1,0,1) = 4 \mod 10$. Aangezien de invariant verschillende waardes aanneemt in de beginsituatie en de beoogde eindsituatie zal die beoogde eindsituatie nooit bereikt worden. □

Halfvarianten

Er zijn ook invarianten die wel veranderen, maar slechts één richting op. In dat geval noemen we zo'n functie een halfvariant. Het aantal stukken op een schaakbord is bijvoorbeeld een (dalende) halfvariant. Als de halfvariant daalt en in de beoogde eindsituatie een hogere waarde heeft dan in de beginsituatie dan zul je nooit in die eindsituatie komen. Omgekeerd, als je een stijgende halfvariant hebt zul je nooit in een toestand komen met een lagere waarde.

Een belangrijke toepassing van halfvarianten is dat het gebruikt kan worden om aan te tonen dat een bepaald algoritme stopt. Als je halfvariant bijvoorbeeld altijd een positief geheel getal is en de waarde ervan strikt daalt (dit betekent dat het altijd echt kleiner wordt en niet gelijk blijft) door een bewerking, dan weet je dat na een eindig aantal keer je die bewerking niet meer kan uitvoeren, omdat anders de invariant een keer negatief zou moeten worden.

Voorbeeld 3.4. In het parlement van Sikkeneure heeft elke parlementariër ten hoogste drie vijanden. Bewijs dat je het parlement zo in twee kamers kan verdelen zodat elk lid ten hoogste één vijand in zijn eigen kamer heeft.

Bewijs. Om te beginnen verdelen we het parlement willekeurig in twee kamers. De som van het aantal vijanden dat elk lid in zijn eigen kamer heeft zitten noemen we H. Stel dat parlementarier A twee of meer vijanden in zijn kamer heeft zitten. Door A van kamer te laten wisselen daalt H dan. Zo lang er nog een parlementarier is die meer dan één vijand in zijn eigen kamer heeft kunnen we die van kamer laten wisselen en H laten dalen. Aangezien H altijd een niet-negatief geheel getal is moet het een keer stoppen (anders wordt H op een gegeven moment negatief). In de eindsituatie heeft elke parlementarier ten hoogste één vijand in zijn eigen kamer. □

Overigens zijn niet alle opgaven op te lossen met ideeën die net zijn beschreven, maar gebruik je fantasie en je komt een eind.

Opgaven

Vraag 3.1. Een cirkel is verdeeld in zes sectoren. In elke sector staat een pion. Per zet mogen we twee willekeurige pionnen verplaatsen naar een buursector. Kunnen we alle pionnen in een sector krijgen?

Vraag 3.2. In een rij van tien bomen zit in elke boom een spreeuw. Op het moment dat een spreeuw een willekeurig aantal bomen naar rechts vliegt, vliegt een andere spreeuw evenveel bomen naar links. Kunnen alle spreeuwen uiteindelijk in één boom komen? En wat is het antwoord op deze vraag als er elf bomen zijn?

Vraag 3.3. Op een 8×8-schaakbord zijn alle vakjes wit gekleurd op een zwart vakje na. Laat zien dat je niet alle vakjes wit kunt maken, door alleen hele rijen en kolommen te herkleuren (herkleuren betekent hier alle witjes vakjes in de rij/kolom zwart kleuren en vice versa).

Vraag 3.4. De getallen $1, 2, \ldots, 1989$ worden op een bord gezet. Twee getallen mag je vervangen door hun verschil. Kun je een situatie bereiken met alleen maar nullen?

Vraag 3.5. In Chromaland wonen 13 grijze, 15 bruine en 17 rode kameleons. Als twee kameleons met verschillende kleur elkaar tegenkomen, veranderen ze hun kleur in de derde kleur. Kunnen op een gegeven moment alle kameleons dezelfde kleur krijgen?

Vraag 3.6. Van een regelmatige 12-hoek krijgt elk punt een getal. Elf krijgen het getal $+1$ en de laatste het getal -1. Bij een gegeven getal k mag je het teken veranderen van k willekeurige opeenvolgende hoekpunten. Kun je het getal -1 door dit een aantal malen te doen een plaats doen opschuiven voor

(a) $k = 3$?

(b) $k = 4$?

(c) $k = 5$?

Vraag 3.7. Een rechthoekig bord is gevuld met 1×4 en 2×2 tetrisblokjes. Alle stenen worden ervan afgehaald, waarbij er een 2×2 steen kwijt raakt. In plaats daarvan word er een 1×4 steen toegevoegd. Laat zien dat je het oorspronkelijke bord dan niet meer kunt bedekken.

Vraag 3.8. Een pion op ons schaakbord mag drie verschillende zetten doen, een vakje naar rechts, een vakje omhoog of een vakje diagonaal naar linksonder. Kan de pion alle vakjes van het schaakbord precies één keer bezoeken en eindigen een vakje rechts van het beginvakje?

Vraag 3.9. Kan een schaakpaard alle velden van een $4 \times N$ schaakbord tijdens een reeks zetten precies één keer bezoeken en daarna weer op zijn beginvakje terugkeren?

Vraag 3.10. We hebben drie machines. De eerste neemt een kaart met de getallen a en b en geeft een kaart terug met de getallen $a + 1$ en $b + 1$. De tweede neemt een kaart met twee even getallen a en b en levert een kaart met de getallen $a/2$ en $b/2$. De laatste machine neemt twee kaarten met de getallen a, b en de getallen b, c respectievelijk en geeft een kaart terug met de getallen a, c. Bovendien geven alle machines ook nog de kaarten terug die ingevoerd worden. Kun je beginnend met een kaart met de getallen 5 en 19 een kaart krijgen met de de getallen 1 en 1988?

Vraag 3.11. Van een $n \times n$-schaakbord is een aantal vakjes ziek. Deze ziekte is erg besmettelijk. Als aan een vakje minstens twee zieke vakjes grenzen (met een hele zijde) wordt dat vakje ook ziek. Aan het eind van de epidemie blijkt elk vakje ziek te zijn. Hoeveel vakjes waren er aan het begin minstens ziek?

Vraag 3.12. Zeven nullen en een één staan op de hoekpunten van een kubus. Per zet mag je bij de eindpunten van een willekeurige zijde 1 optellen. Kun je de getallen op elk hoekpunt gelijk maken? Kun je alle hoekpunten deelbaar door 3 maken?

Vraag 3.13. Op tafel ligt een stapel met 1001 stenen. Je mag per zet een stapel uitkiezen waar meer dan 2 stenen inzitten, er een van weggooien en er twee kleinere stapels van maken. Kun je eindigen met alleen maar stapels van 3 stenen?

Vraag 3.14. De getallen $1, 2, \ldots, n$ worden in deze volgorde in een rij geschreven. Je mag telkens twee getallen verwisselen. Kun je na 2003 verwisselingen weer op de oorspronkelijke rij uitkomen?

Vraag 3.15. Gegeven is een drietal getallen. Nu mag je er telkens twee uitkiezen, zeg a en b, en deze vervangen door $(3a + 4b)/5$ en $(4a - 3b)/5$. Kun je het drietal $(3, 4, 12)$ in een aantal stappen veranderen in het drietal $(5, 7, 10)$?

Vraag 3.16. Beschouw alle roosterpunten in het positieve kwadrant (i.e. alle paren getallen (a, b) met $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). We kleuren de roosterpunten $(0, 0), (1, 0), (0, 1)(2, 0), (1, 1)$ en $(0, 2)$ zwart en leggen op elk van deze zes punten een fiche. Bij elke stap mag je een fiche pakken dat op het punt (x, y) ligt en vervangen door een fiche op $(x + 1, y)$ en een op $(x, y + 1)$, als tenminste die laatste twee punten wel leeg zijn. Kun je nu alle fiches uit het zwart gekleurde gebied bewegen?

Als je begint met slechts één fiche op $(0, 0)$ kun je dan zorgen dat er geen fiches meer op het zwart gekleurde gebied liggen?

Vraag 3.17. Op alle roosterpunten in het onderhalfvlak (i.e. alle paren getallen (a, b) met $a, b \in \mathbb{Z}_{<0}$) staat een pion (en alle andere roosterpunten zijn leeg). Bij een stap mag je een pion nemen en die in horizontale of verticale richting over een buur heen laten springen naar een leeg veld (dat dus exact afstand 2 tot zijn oude positie heeft) en vervolgens de pion waar je overheen bent gesprongen weghalen. Op welke punten in het rooster $\mathbb{Z}^2$ kun je een pion krijgen?

Vraag 3.18 (IMO 1993-3)**.** Op een oneindig schaakbord wordt het volgende spel gespeeld. Bij het begin staan er n^2 stukken op het bord in een $n \times n$ vierkant van velden, op elk veld één stuk. Een zet van het spel bestaat uit een sprong in horizontale of verticale richting over een aangrenzend bezet veld naar een onbezet veld daar direct naast. Het stuk waar overheen gesprongen is, wordt van het bord verwijderd. Bepaal de waarden van n waarvoor het spel kan eindigen met slechts één stuk op het bord.

Vraag 3.19 (IMO 1995-4)**.** Bepaal de grootste waarde van $x_0 \in \mathbb{R}_+$ waarvoor er een rij van positieve reële getallen $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ bestaat met de volgende eigenschappen:

1) $x_0 = x_{1995}$;

2) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ voor $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

Vraag 3.20 (IMO 1996-1)**.** Een rechthoekig bord $ABCD$ met $AB = 20$ en $BC = 12$ is verdeeld in 20×12 eenheidsvierkanten. Op dit bord zijn de volgende zetten toegestaan: men mag van een eenheidsvierkant naar een ander indien de afstand tussen de twee middelpunten van deze vierkanten gelijk is aan $\sqrt{r}$, waarin r een gegeven positief geheel getal is. Men probeert nu een serie zetten te vinden, die achtereenvolgens uitgevoerd leidt van het eenheidsvierkant met hoekpunt A naar het eenheidsvierkant met hoekpunt B.

(a) Laat zien dat zo'n serie zetten niet bestaat als r deelbaar is door 2 of door 3.

(b) Bewijs dat zo'n serie zetten wel bestaat als $r = 73$.

(c) Bestaat er zo'n serie zetten als $r = 97$?

Vraag 3.21 (IMO 1986-3)**.** Aan elk hoekpunt van een regelmatige vijfhoek wordt een geheel getal toegevoegd zo, dat de som van deze vijf getallen strikt positief is. Indien aan drie opeenvolgende hoekpunten respectievelijk de getallen x,y en z toegevoegd zijn waarbij $y < 0$, dan is de volgende bewerking toegelaten: het drietal (x, y, z) wordt vervangen door het drietal $(x+y, -y, y+z)$. Deze bewerking wordt uitgevoerd zolang ten minste één van de vijf getallen strikt negatief is. Bepaal of dit procedé noodzakelijkerwijs stopt na een eindig aantal van deze bewerkingen.

4 Puzzels en spelletjes

Een hoofdstuk over puzzels en spelletjes, variërend van leuke raadseltjes tot IMC-opgaven.

Bij het analyseren van een spel, kun je het beste gestructureerd de mogelijkheden afgaan. Een goede manier om dat te doen is door een gerichte graaf te tekenen van de mogelijke situaties (met als punten de toestanden van het spel en als pijlen de mogelijke zetten van de twee spelers). Vervolgens kun je vanaf de mogelijke eindsituaties terugredeneren.

Van eindsituaties weet je wie er wint. Als je een situatie hebt waarbij elke zet leidt tot een toestand waarvan je de einduitslag weet, kun je ook bepalen wie (onder perfect spel) in die situatie moet winnen. Als de speler aan zet van die situatie alleen naar situaties kan waarin hij verliest is het een verloren positie, maar als er ook maar één mogelijkheid is waarmee hij wint dan is de situatie gewonnen voor hem.

In de praktijk zijn deze grafen vaak te groot om praktisch mee te kunnen werken, maar het idee blijft bestaan. Een winnende tactiek kan dan vaak beschreven worden met behulp van invarianten: de speler moet om te winnen een bepaalde invariant in stand houden.

De belangrijkste truc bij het oplossen van opgaven in de trant van "Is er een manier om ... te doen in x aantal zetten?" is het tellen hoeveel informatie er per zet verkregen kan worden. Als je elke zet een antwoord op een ja/nee vraag krijgt zijn er maar na n zetten maar 2^n verschillende series antwoorden. Dus je kunt ook maar 2^n verschillende toestanden onderscheiden.

Naast laten zien dat er een zeker minimum aantal zetten nodig is, is dit ook een leidraad voor het vinden van een goed strategie: je moet ervoor zorgen zoveel mogelijk informatie uit één vraag te halen. In feite wil je dat (met ja/nee vragen) alle nog mogelijke begintoestanden in twee even grote groepen worden verdeeld door jouw vraag.

Het is niet altijd even gemakkelijk om in te zien wat wel en wat geen informatie is. Raadsels zoals het onderstaande grapje zijn daarop gebaseerd:

Voorbeeld 4.1. Drie logici zitten in een café. De serveerster vraagt: 'Wil iedereen koffie?' De eerste logicus antwoordt: "Dat weet ik niet." De tweede antwoordt: "Dat weet ik niet." Dan zegt de derde: "Ja."

Probeer bij een dergelijk raadsel zo helder mogelijk op een rijtje te zetten wat iedereen weet, en wat elke stap aan de kennis van alle aanwezigen toevoegt. Als A leert dat B iets ook niet weet, dan is dat nog altijd informatie.

Tenslotte kan het voor een spelletjesopgave natuurlijk ook erg nuttig zijn het spel ook daadwerkelijk even te spelen. Vaak kan dit door je zetten gewoon op te schrijven, maar je kunt natuurlijk ook best met een schaar wat speelkaarten knippen als dit je goed uitkomt.

Opgaven

Vraag 4.1. Het volgende probleem werd begin 2015 bekend op social media.

Cheryl heeft twee vrienden, Albert en Bernard. Ze zijn benieuwd naar haar verjaardag. "Dat zeg ik jullie niet", zegt Cheryl, "maar ik zal jullie een hint geven".

Ze schrijft tien mogelijke data op: 15, 16 en 19 mei, 17 en 18 juni, 14 en 16 juli en 14, 15 en 17 augustus. Vervolgens vertelt ze aan Albert alleen de goede maand, en aan Bernard alleen de goede dag. Dan zegt Albert: "Ik weet het niet, maar ik weet dat Bernard het ook niet weet". Vervolgens reageert Bernard: "Eerst wist ik het ook niet, maar nu weet ik het wel". En dan zegt Albert meteen: "Dan weet ik het nu ook". Op welke dag is Cheryl jarig?

Vraag 4.2. Twee spelers pakken achtereenvolgens 1, 2, 3 of 4 stenen van een stapel met in het begin 101 stenen. De speler die de laatste steen pakt, wint. Stel dat beide spelers perfect spelen, wint dan de eerste of tweede speler?

Wat als de speler die de laatste steen pakt verliest?

Vraag 4.3. Gegeven een zandloper van 7 minuten en een van 11 minuten. Wat is de snelste manier om een ei te koken voor 2 minuten? Hierbij mag je een zandloper alleen omdraaien als al het zand op de bodem ligt.

Verandert er iets als je de zandlopers ook mag omdraaien als ze niet helemaal doorgelopen zijn?

Vraag 4.4. Tijdens een boswandeling kom je bij een splitsing op de weg. Bij de splitsing staan twee dwergen. Je weet dat de ene altijd de waarheid spreekt, en de andere altijd liegt, maar niet welke dwerg welke is. Je mag één van de dwergen één vraag stellen. Welke vraag moet je stellen om erachter te komen welke route je het bos uit leidt?

Vraag 4.5. Wat is het kleinste aantal gewichten dat nodig is om elk geheel aantal tussen 1 en 63 gram te wegen, als de gewichten alleen aan één kant van een balans geplaatst mogen worden? Generaliseer naar een willekeurig aantal grammen.

Wat is het minimale aantal gewichten om elk geheel aantal tussen 1 en 40 te kunnen wegen als je de gewichten aan beide zijden van de balans mag plaatsen? Generaliseer weer.

Vraag 4.6. Een apotheker ontvangt 10 flessen met 1000 pillen, volgens het label weegt elke pil 1 gram. Hij krijgt echter een bericht van de pharmaceut dat er een fles tussen zit waarvan de pillen 10 milligram te zwaar zijn. Hoe kan de foute fles er met één weging uitgehaald worden?

Kan het ook in één weging als de apotheker alleen weet dat er flessen met foute pillen zijn, maar niet weet dat het er maar één is?

Vraag 4.7. Spelers $1, 2, \ldots, n$ zitten rond een (ronde) tafel met elk een cent voor de neus. Speler 1 geeft één cent aan zijn buur, speler 2, die vervolgens 2 centen doorgeeft aan speler 3, die weer één cent aan 4 geeft, die weer 2 cent aan 5 geeft etc. waarbij om de buurt steeds 1 of 2 cent wordt doorgegeven. Een speler die geen geld meer heeft stapt van de tafel weg en doet niet meer mee. Vind een oneindig aantal waarden voor n waarvoor een speler uiteindelijk al het geld krijgt.

Vraag 4.8. Je doet mee aan een quiz die een vaste formule volgt. Als je een reeks vragen goed beantwoordt, mag je één van de drie deuren kiezen. Achter één van deze deuren zit een prijs.

Na je keuze opent de quizmaster één van de andere twee deuren, en laat zien dat hier niets achter ligt. Hij geeft je de kans nog van keuze te wisselen tussen de twee ongeopende deuren. Kun je dit beter wel of niet doen?

Vraag 4.9. Beschouw het volgende spel met $2n$ kaarten, genummerd 1 tot en met $2n$. Het pak kaarten wordt geschud en twee spelers A en B krijgen elk n kaarten. Vervolgens leggen beide spelers om de beurt een kaart weg. Iemand wint als de som van de afgelegde kaarten na zijn beurt een veelvoud is van $2n + 1$. Heeft één van de spelers een winnende strategie?

Vraag 4.10. Beschouw een veelvlak met minstens 5 vlakken, zodat in elk hoekpunt precies 3 zijden samenkomen. Twee spelers spelen het volgende spel:

Om de beurt kleuren beide spelers een vlak in hun kleur. De winnaar is de eerste speler die drie vlakken gekleurd heeft die samenkomen in een hoekpunt.

Laat zien dat de eerste speler een winnende strategie heeft.

Vraag 4.11. Iemand heeft 12 munten, waarvan 1 vals is en daarom lichter of zwaarder is dan de andere 11. Wat is het minimale aantal wegingen nodig om de valse munt te vinden en te weten of hij zwaarder of lichter is dan de andere?

Voor een gegeven $k \in \mathbb{N}$. Stel dat je n munten krijgt met één valse (dus weer zwaarder of lichter dan de andere). Wat is de grootste n zodat je in k wegingen kunt bepalen welke munt vals is en of de valse munt te ligt of te zwaar is?

Vraag 4.12. In determinant boter, kaas en eieren zetten twee spelers om de beurt een 1 (speler 1) of een 0 (speler 2) in een 3×3 matrix totdat de matrix vol staat met enen en nullen. Speler 2 wint als de determinant van die matrix 0 is en speler 1 wint als de determinant niet nul is. Wie heeft een winnende strategie en wat is die?

Vraag 4.13. Piet heeft op het voorhoofd van Anna en Bert een geheel positief getal geschreven en zegt dat de som van de twee getallen gelijk is aan 100 of 101. Vervolgens vraagt hij aan Anna of zij het getal op haar voorhoofd weet, waarop zij "Nee" antwoordt. Vervolgens vraagt hij het aan Bert, en ook hij antwoordt "Nee", enzovoorts. Stel dat zowel Anna als Bert perfect logisch kunnen rederenen. Laat zien dat op een gegeven moment één van de twee "Ja" zegt.

Vraag 4.14 (IMC 1999)**.** Zij S de verzameling van alle woorden (i.e. eindige rijtjes letters) gemaakt met de letters x, y en z en beschouw een equivalentierelatie $\sim$ op S die voldoet aan de volgende eigenschappen

1) $uu \sim u$ voor alle $u \in S$;
2) Als $v \sim w$ dan ook $uv \sim uw$ en $vu \sim wu$ voor alle $u, v, w \in S$.

Laat zien dat elk woord in S equivalent is aan een woord van lengte hoogstens 8.

Vraag 4.15. Zij G een eindige simpele graaf (dus zonder meervoudige zijden of loops) en v een punt van G. De omgeving $N(v)$ van v bestaat uit v en alle punten die met v verbonden zijn door een zijde. Laat zien dat er een deelverzameling S van de punten uit G bestaat zodat $|S \cap N(v)|$ oneven is voor alle hoekpunten v uit G.

Vraag 4.16 (IMC 2012)**.** Homer Simpson en Albert Einstein spelen een spel. Om en om geven ze een coëfficiënt a_i van het polynoom

$$p(x) = x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \ldots + a_1 x + a_0$$

een reële waarde. Als een coëfficiënt eenmaal een waarde heeft, mag die niet meer worden veranderd. Homer begint. Het is zijn doel om te zorgen dat $p(x)$ deelbaar is door een polynoom $m(x)$; Albert moet dit zien te voorkomen. Wie heeft er een winnende strategie als

(a) $m(x) = x - 2015$ en wie als
(b) $m(x) = x^2 + 1$?

Vraag 4.17. Tien kabouters worden op een trap gezet, ieder op een trede. Ze kijken omlaag en kunnen dus hun medekabouters op lagere treden zien, en die op hogere treden niet. Elke kabouter krijgt een muts op, die rood, wit of blauw kan zijn. Van bovenaf wordt de kabouters één voor één gevraagd welke kleur de muts op hun hoofd is.

Als de kabouters vooraf de spelregels weten en een strategie kunnen afspreken, hoeveel kabouters kunnen de vraag dan goed beantwoorden?

Opmerking: als antwoord op de vraag mag een kabouter alleen 'rood' , 'wit' of 'blauw' zeggen. De overige kabouters kunnen dit antwoord horen.

Vraag 4.18. Aftelbaar veel kabouters worden op een aftelbare trap gezet, met hun blik naar beneden gericht. De krijgen allemaal een muts op, die rood, wit of blauw kan zijn. Van bovenaf aan wordt één voor één aan de kabouters gevraagd welke kleur hun muts is.

De kabouters krijgen de spelregels vooraf te horen en mogen een strategie afspreken. Ze hebben bijzonder goede zintuigen en kunnen alle kabouters op lagere treden zien, en alle kabouters op hogere treden horen. Bovendien kunnen ze het keuze-axioma uitvoeren en aan elkaar communiceren.

Hoeveel kabouters kunnen de vraag goed beantwoorden?

Vraag 4.19. Hoe verandert de vorige vraag als alle kabouters tegelijk antwoord moeten geven?

En wat als er niet 3, maar aftelbaar veel kleuren mutsen zijn?

Lineaire algebra

5 Lineaire afbeeldingen

Veel IMC-opgaven gaan over lineaire algebra. In principe is lineaire algebra de studie van lineaire afbeeldingen tussen vectorruimtes. Een eigenschap van deze afbeeldingen is dat ze gerepresenteerd kunnen worden door een blok getallen (een matrix), nadat een basis is gekozen. Een matrix A is dus een lineaire afbeelding $L\colon V \to W$ tezamen met bases voor de vectorruimtes V en W. Omdat matrices makkelijk zijn om mee te werken, wordt er vaak over de matrix gesproken in plaats van over de bijbehorende lineaire afbeelding. Een eigenschap van de matrix A kan echter pas gezien worden als een eigenschap van de lineaire afbeelding L als de eigenschap *basisonafhankelijk* is. Bij opgaven over lineaire algebra is het soms goed om over matrices na te denken als lineaire afbeeldingen en andersom.

Rang en inverteerbare matrices

De *rang* van een lineaire afbeelding $L\colon V \to W$ is de dimensie van het beeld van L. Als A de matrix is die hoort bij L, dan is de rang dus de dimensie van de kolomruimte, of het maximale aantal lineair onafhankelijke kolommen. We noteren de rang van L (of A) als $\operatorname{rk} L$ (of $\operatorname{rk} A$). De *kern* of *nulruimte* van L bestaat uit alle vectoren die naar 0 worden gestuurd. De *nulliteit* van L is de dimensie van de nulruimte en wordt genoteerd als $\operatorname{nul} L$. Deze twee grootheden zijn als volgt gerelateerd:

Stelling 5.1 (Dimensiestelling)**.** *Zij $L\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Dan geldt*

$$\operatorname{rk} L + \operatorname{nul} L = \dim V.$$

We kunnen ons nu ook afvragen wanneer een lineaire afbeelding $L\colon V \to W$ bijectief is. Daarvoor moet L injectief en surjectief zijn, wat betekent dat $\operatorname{nul} L = 0$ en $\operatorname{rk} L = \dim W$. De dimensiestelling zegt dan ook direct dat $\dim V = \dim W$, oftewel de bijbehorende matrix is vierkant. Als L bijectief is, is er een inverse functie $L^{-1}\colon W \to V$. Dit is weer een lineaire afbeelding en er geldt dat $L \circ L^{-1} = \mathrm{id}$ en $L^{-1} \circ L = \mathrm{id}$. Als we dit vertalen naar matrices zien het volgende: als A een $n \times n$-matrix is van rang n, dan bestaat er een $n \times n$-matrix B zodat $AB = I_n$ en $BA = I_n$. In dit geval noemen we de matrix A inverteerbaar. Deze vertaling heeft een nuttig gevolg: als twee vierkante $n \times n$-matrices A en B voldoen aan $AB = I_n$, volgt dat $BA = I_n$ en dus commuteren de matrices A en B (wat over het algemeen niet zo is)!

De rang kan dus nuttig zijn om uit te vinden of een matrix inverteerbaar is, maar het is ook één van de meest eenvoudige eigenschappen van een lineaire afbeelding of een matrix, en komt dus regelmatig terug in opgaven over lineaire algebra. Daarnaast zijn er ook opgaven waarin je de rang van een matrix moet uitrekenen. Daarvoor zijn er de volgende eigenschappen erg nuttig.

Propositie 5.2 (Rekenregels voor de rang)**.** *Gegeven zijn een $k \times m$-matrix A, $m \times n$-matrices B en C, en een $n \times p$-matrix D.*

(i) Er geldt dat $\operatorname{rk}(B + C) \leq \operatorname{rk} B + \operatorname{rk} C$.

(ii) Er geldt dat $\operatorname{rk} AB \leq \min\{\operatorname{rk} A, \operatorname{rk} B\}$.

(iii) Als A rang m heeft, dan geldt $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk}(B)$.

(iv) Als D rang n heeft, dan geldt $\operatorname{rk}(BD) = \operatorname{rk}(B)$.

(v) Er geldt dat $\operatorname{rk} AB \geq \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - m$.

(vi) Er geldt $\operatorname{rk} A = 0$ *precies als* $A = 0$ *en er geldt* $\operatorname{rk} A = 1$ *precies als er niet-nul kolomvectoren $u \in \mathbb{R}^k, v \in \mathbb{R}^m$ bestaan zodat $A = uv^T$.*

Onderdeel (v) bewijs je in Opgave 4.4, de rest laten we over als oefening. In alle gevallen helpt het om de matrices te zien als lineaire afbeeldingen. Om de rang van een matrix uit te rekenen, zijn vooral onderdelen (iii) en (iv) belangrijk, aangezien die heel veel vrijheid geven in de matrix A of D waarmee je vermenigvuldigt. Zie ook het onderstaande voorbeeld.

Soms kan het ook nuttig zijn om de *rijrang* te gebruiken. Dit is het maximaal aantal lineair onafhankelijke rijen in je matrix. Je kunt bewijzen dat de rijrang gelijk is aan de gewone rang.

Voorbeeld 5.3 (IMC, Problem 1)**.** Zij A de $n \times n$ matrix met elementen $A_{ij} = i + j$, waar $n \geq 2$. Bereken $\operatorname{rk}(A)$.

Bewijs. We vermenigvuldigen A aan de rechterkant met de rang n matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dit komt erop neer dat je de eerste kolom van de andere kolommen afhaalt. Op dezelfde manier kunnen we de eerste rij van de andere rijen afhalen, door aan der linkerkant met een rang n matrix te vermenigvuldigen. Volgens de propositie verandert hierbij de rang niet, dus volgt

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots \\ 5 & 6 & 7 & 8 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 3 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 4 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 5 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix} = \operatorname{rk}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 3 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

We zien nu dat de eerste twee kolommen lineair onafhankelijk zijn, en dat daarna elke kolom een veelvoud is van de tweede kolom. Dus de rang is gelijk aan 2.

Een ander manier om het af te maken, is door de matrix kleiner te maken. De laatste matrix kunnen we schrijven als

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

De eerste factor heeft rang 2, dus volgens onderdeel 3 van Propositie 5.2, is het genoeg om de rang van de rechterfactor uit te rekenen. Die kunnen we op zijn beurt weer ontbinden als

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & \cdots \end{pmatrix},$$

waar de rechterfactor rang 2 heeft, dus we hoeven alleen nog de rang van $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ te bepalen (en dat is 2). $\square$

In het volgende voorbeeld blijkt hoe nuttig het is dat een matrix en zijn inverse commuteren.

Voorbeeld 5.4 (IMC 2003)**.** Stel dat A en B reële $n \times n$ matrices zijn zodat $AB+A+B = 0$. Bewijs dat $AB = BA$.

Bewijs. De conditie $AB + A + B = 0$ geeft

$$I = AB + A + B + I = (A + I)(B + I).$$

Dit betekent dat $A + I$ en $B + I$ elkaars inverse zijn, dus ze commuteren. Er geldt dus ook dat

$$I = (B + I)(A + I) = BA + A + B + I$$

en als we de twee bovenstaande vergelijkingen van elkaar aftrekken, dan zien we dat $AB - BA = 0$, oftewel $AB = BA$. $\square$

Inproduct

De vectorruimte $\mathbb{R}^n$ heeft een standaard inproduct, gegeven door

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Voor een willekeurige vectorruimte V over de reële getallen is een inproduct een functie $V \times V \to \mathbb{R}$ die symmetrisch en bilineair is, en zodat $v \cdot v \geq 0$ voor alle $v \in V$, met gelijkheid precies als $v = 0$. Hiervoor zijn meerdere keuzes, maar op $\mathbb{R}^n$ wordt meestal het standaard inproduct gebruikt.

Twee vectoren met inproduct 0 noemen we orthogonaal. De lengte van een vector v is $\|v\| = \sqrt{v \cdot v}$. Het inproduct heeft zelfs nog meer meetkundige interpretatie. Als θ de hoek tussen twee vectoren u en v is, dan geldt $u \cdot v = \|v\| \cdot \|v\| \cos \theta$.

Opgaven

Vraag 5.1 (IMC 1994)**.** (a) Zij A een inverteerbare $n \times n$ matrix met positieve reële elementen. Laat zien dat A^{-1} ten hoogste $n^2 - 2n$ nullen bevat.

(b) Hoeveel nullen bevat de inverse van de $n \times n$-matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \cdots & 1 \end{pmatrix}?$$

Vraag 5.2. Voor $n \geq 3$, bepaal de rang van de $n \times n$-matrix A met elementen $A_{ij} = (i + j - 2)^2$.

Vraag 5.3 (IMC 1998)**.** Zij $V = \mathbb{R}^{10}$ en U_1 en U_2 twee lineaire deelruimtes van dimensies 3, respectievelijk 6 met $U_1 \subset U_2$. Zij $\mathcal{E}$ de verzameling van lineaire afbeeldingen $T\colon V \to V$ die U_1 en U_2 invariant laten (i.e. $T(U_1) \subset U_1$ en $T(U_2) \subset U_2$). Bereken de dimensie van $\mathcal{E}$ als reële vectorruimte.

Vraag 5.4.

- Met de notatie van Propositie 5.2, bewijs dat $\operatorname{nul} AB \leq \operatorname{nul} A + \operatorname{nul} B$.
- Bewijs onderdeel (v) van de propositie.

Vraag 5.5. Zij A, B, C reële $n \times n$ matrices zodat A inverteerbaar is en $(A - B)C = BA^{-1}$. Laat zien dat $C(A - B) = A^{-1}B$.

Vraag 5.6. Gegeven is een $n \times n$ matrix A waarvoor geldt dat $\operatorname{rk}(A - I) + \operatorname{rk}(A + I) = n$. Bewijs dat $A^2 = I$.

Vraag 5.7 (IMC 2018)**.** (a) Zij k een positief geheel getal. Vind het kleinste gehele getal n waarvoor er k niet-nul vectoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ bestaan zoudat voor elk paar indices i, j met $|i - j| > 1$ de vectoren v_i en v_j orthogonaal zijn.

(b) Vind ook de kleinste n als v_i en v_j orthogonaal moeten zijn dan en *slechts dan als* $|i - j| > 1$.

Vraag 5.8. Gegeven is een vierkante $n \times n$-matrix A. Bewijs dat $\operatorname{rk} A^n = \operatorname{rk} A^{n+1}$.

Vraag 5.9 (IMC 2004)**.** Zij A een reële 4×2 matrix en B een reële 2×4 matrix zodat

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vind BA.

Vraag 5.10. Laat P en Q beide vierkante matrices van dezelfde grootte zijn, waarvoor geldt dat $P^2+P=Q^2+Q$ en dat $P+Q+I$ inverteerbaar is. Bewijs dat P en Q gelijke rang hebben.

Vraag 5.11. Laat $A=(a_{ij})$ en $B=(b_{ij})$ twee reële 10×10 matrices zodat $a_{ij}=b_{ij}+1$ voor alle i,j en $A^3=0$. Laat zien dat B niet inverteerbaar is.

Vraag 5.12 (IMC 2007)**.** Zij A een $n\times n$ matrix met de getallen $1,2,3,\ldots,n^2$ als elementen. Wat is de minimale waarde en de maximale waarde van $\operatorname{rk} A$?

Vraag 5.13. Zij A en B *verschillende* $n\times n$ matrices met reële coëfficiënten. Als $A^3=B^3$ en $A^2B=B^2A$, kan A^2+B^2 dan inverteerbaar zijn?

Vraag 5.14. Gegeven zijn $n\times n$-matrices A,B,C zodat $AC=CA$, $BC=CB$, $C^2=I$ en $AB=2(A+B)C$.

(a) Bewijs dat $AB=BA$.

(b) Als $A+B+C=0$, bewijs dat $\operatorname{rk}(A-C)+\operatorname{rk}(B-C)=n$.

Vraag 5.15 (IMC 2016)**.** Laat k en n gehele getallen zijn. Een rij $(A_1,\ldots,A_k)$ van reële $n\times n$ matrices is een favoriet van Chris Zaal als $A_i^2\neq 0$ voor $i\in\{1,2\ldots,k\}$ maar $A_iA_j=0$ voor alle $i\neq j$ in $\{1,2\ldots,k\}$. Laat zien dat in alle favoriete rijtjes van Chris geldt dat $k\leq n$ en geef voor iedere n een voorbeeld waar $k=n$.

Vraag 5.16 (IMC 2012)**.** Zij n een geheel getal. Een $n\times n$-matrix heeft op de hoofddiagonaal enkel nullen, terwijl de overige elementen positieve getallen zijn. Wat is de minimale rang van deze matrix?

Vraag 5.17. Vind alle inverteerbare matrices A met niet-negatieve reële entries, zodanig dat A^{-1} ook niet-negatieve entries heeft.

Vraag 5.18. Laat A en B reële $n\times n$ matrices zijn zodanig dat $AB=A+B$. Toon aan dat $\operatorname{rk} A=\operatorname{rk} B$.

Vraag 5.19. Gegeven zij een 3×2-matrix A en een 2×3-matrix B zodat

$$AB=\begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bepaal BA.

Vraag 5.20. De elementen van een $n\times n$-matrix A zijn allemaal gelijk aan 0 of 1. Alle elementen op de hoofddiagonaal zijn 0 en verder geldt $A_{ij}+A_{ji}=1$ voor alle $i\neq j$. Bewijs dat $\operatorname{rk} A\geq n-1$.

Vraag 5.21. Stel dat $v_1,\ldots,v_d$ eenheidsvectoren in $\mathbb{R}^d$ zijn. Bewijs dat er een eenheidsvector u bestaat zodat

$$|u\cdot v_i|\leq 1/\sqrt{d}$$

voor alle $i=1,\ldots,d$.

6 Eigenwaarden

In dit hoofdstuk kijken we naar lineaire afbeeldingen van een vectorruimte naar zichzelf. Deze afbeeldingen corresponderen dus met vierkante matrices. De eigenschappen van deze matrices worden voor een groot deel bepaald door hun eigenwaarden.

Spoor en determinant

Het *spoor* (in het Engels 'trace') van een vierkante matrix A is gedefinieerd als de som van de diagonaalentries, oftewel $\operatorname{tr}(A) = \sum_i A_{ii}$.

Propositie 6.1 (Eigenschappen van het spoor)**.** *Gegeven zijn $n \times n$-matrices A en B.*

(i) Het spoor is lineair, oftewel $\operatorname{tr}(\mu A + \lambda B) = \mu \operatorname{tr} A + \lambda \operatorname{tr} B$.

(ii) Er geldt $\operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$.

(iii) Er geldt $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.

(iv) Het spoor is basisonafhankelijk: als B inverteerbaar is geldt $\operatorname{tr}(BAB^{-1}) = \operatorname{tr} A$.

De eerste drie onderdelen zijn eenvoudig te bewijzen door de definitie uit te schrijven. Je ziet zelfs dat onderdeel (iii) opgaat als A en B niet per se vierkant zijn (maar wel zo dat je ze kunt vermenigvuldigen). Het laatste onderdeel volgt eenvoudig uit (iii): door B en AB^{-1} om te draaien zie je dat $\operatorname{tr}(BAB^{-1}) = \operatorname{tr}(AB^{-1}B) = \operatorname{tr}(A)$.

De *determinant* van een vierkante matrix A is natuurlijk wel-bekend, maar er is geen eenvoudige definitie. We geven de meest directe, maar niet per se de meest nuttige:

Definitie 6.2. Zij A een $n \times n$ matrix en S_n de symmetrische groep van alle permutaties op n elementen. Dan is

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)},$$

waar $\operatorname{sgn}(\sigma)$ het teken van σ voorstelt.

Je kunt laten zien dat deze functie de volgende eigenschappen heeft:

1) $\det I = 1$;
2) de determinant is lineair in elke kolom, dat wil zeggen dat

$$\begin{aligned}&\det(A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid \mu A_i + \lambda A_i' \mid \cdots \mid A_n) = \\ &\qquad \mu \det(A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_i \mid \cdots \mid A_n) + \lambda \det(A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_i' \mid \cdots \mid A_n);\end{aligned}$$

3) een matrix met twee gelijke kolommen heeft determinant 0.

Maar andersom zijn deze eigenschappen genoeg om van elke matrix de determinant te kunnen uitrekenen. Met de tweede eigenschap kun je namelijk elke kolom schrijven als lineaire combinatie van de kolommen van I en uitschrijven in determinanten met die kolommen. Elke matrix die zo ontstaat met twee dezelfde kolommen heeft determinant 0. Uit de laatste eigenschap volgt ook dat het verwisselen van twee kolommen de determinant vermenigvuldigt met -1:

$$\begin{aligned}
0 &= \det(A_1 + A_2 \mid A_1 + A_2 \mid \cdots) \\
&= \det(A_1 \mid A_1 + A_2 \mid \cdots) + \det(A_2 \mid A_1 + A_2 \mid \cdots) \\
&= \det(A_1 \mid A_1 \mid \cdots) + \det(A_1 \mid A_1 \mid \cdots) + \det(A_1 \mid A_2 \mid \cdots) + \det(A_2 \mid A_2 \mid \cdots) \\
&= \det(A_1 \mid A_2 \mid \cdots) + \det(A_2 \mid A_1 \mid \cdots).
\end{aligned}$$

Daarmee kun je alle determinanten reduceren tot de determinant van I. Deze drie eigenschappen leggen de determinant dus precies vast.

Hieronder volgen nog meer nuttige eigenschappen van de determinant.

Propositie 6.3 (Eigenschappen van de determinant)**.** *Gegeven zijn twee $n \times n$-matrices A en B.*

(i) Er geldt $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

(ii) De determinant is basisonafhankelijk; als B inverteerbaar is geldt $\det(BAB^{-1}) = \det A$.

(iii) De matrix A is inverteerbaar dan en slechts dan als $\det A \neq 0$.

(iv) Er geldt $\det A = \det A^T$.

(v) Als A beneden- of bovendriehoeks is, dan is $\det A$ *het product van de diagonaalelementen.*

De eerste eigenschap volgt door te kijken naar de afbeelding $M \to \det(AM)/\det(A)$. Deze afbeelding voldoet aan de eigenschappen 1), 2) en 3) hierboven die de determinant vastleggen, dus er moet wel gelden dat $\det(AM)/\det(A) = \det(M)$. Hieruit volgt ook direct dat voor een inverteerbare matrix A geldt dat $\det(A) \neq 0$. De omgekeerde bewering volgt al uit eigenschappen 2) en 3) hierboven: als één kolom een lineaire combinatie is van andere kolommen, geeft de lineariteit van de determinant een uitdrukking in determinanten waar steeds een kolom twee keer voorkomt. Dus wordt de determinant inderdaad 0.

Eigenwaarden en -vectoren

We noemen λ een *eigenwaarde* van een vierkante $n \times n$-matrix A, als er een niet-nul vector v bestaat zodat $Av = \lambda v$. De vector v noemen we een *eigenvector* bij de eigenwaarde λ.

Aangezien de matric A een eenvoudige werking heeft op de eigenvectoren, is het erg handig als $\mathbb{R}^n$ een basis heeft bestaande uit eigenvectoren van A. In die basis is A namelijk een diagonale matrix, en er bestaat dus een inverteerbare matrix P zodat $P^{-1}AP$ diagonaal is. Als dit het geval is, noemen we A *diagonaliseerbaar* en staan op de diagonaal precies de eigenwaarden van A. De kolommen van P geven de bijvehorende eigenvectoren.

Niet alle matrices zijn diagonaliseerbaar, maar onderstaande stelling geeft een belangrijke klasse matrices die dat wel zijn.

Stelling 6.4 (Spectraalstelling)**.** *Gegeven is een vierkante, reële matric A. Als A symmetrisch is, dan is A diagonaliseerbaar met een orthogonale matrix en zijn alle eigenwaarden reëel.*

Een analoge stelling geldt voor complexe matrices. De aanname is dan dat A Hermitisch is (dus $A = \overline{A}^T$), en A is dan diagonaliseerbaar met een unitaire matrix. Aangezien de resulterende diagonaalmatrix nog steeds Hermitisch is, zijn ook weer alle eigenwaarden reëel.

In het volgende voorbeeld is het toepassen van deze stelling cruciaal.

Voorbeeld 6.5 (IMC 2012, Vraag 1)**.** Laat A en B twee reële symmetrische matrices zijn waarvan alle eigenwaardes strikt groter zijn dan 1. Zij λ een eigenwaarde van AB. Bewijs dat $|\lambda| > 1$.

Bewijs. Vanwege de spectraalstelling vinden we orthogonale matrices P en Q en diagonaalmatrices Λ en Σ zodanig dat

$$A = P\Lambda P^{-1} \quad \text{en} \quad B = Q\Sigma Q^{-1}.$$

Door de kolommen van P en Q zo nodig door hun norm te delen mogen we aannemen dat P en Q zelfs ortho*normaal* zijn. Het is nu cruciaal om in te zien dat orthonomale matrices normbehoudend zijn, i.e. $\|Pv\| = \|v\| = \|Qv\|$ voor iedere vector $v \in \mathbb{R}^n$. Het idee is nu dat A en B alle vectoren 'vergroten' omdat alle eigenwaarden strikt groter dan 1 zijn. Er geldt voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$ dat $\|Q^{-1}v\| = \|v\|$ en omdat diagonaalentries van Σ allemaal strikt groter dan 1 zijn (het zijn de eigenwaarden van B) zien we dat $\|\Sigma Q^{-1}v\| > \|Q^{-1}v\| = \|v\|$. Omdat Q orthonormaal is, volgt $\|Bv\| = \|Q\Sigma Q^{-1}v\| = \|\Sigma Q^{-1}v\| > \|v\|$, dus B vergroot alle vectoren. Op dezelfde manier vergroot A alle vectoren, dus ook AB: $\|ABv\| > \|v\|$ voor iedere $v \in \mathbb{R}^n$. Zij nu λ een eigenwaarde van AB met eigenvector w. Dan geldt er dus dat $|\lambda|\,\|w\| = \|\lambda w\| = \|ABw\| > \|w\|$, dus $|\lambda| > 1$, zoals verlangd. $\square$

Polynomen van matrices

Om de eigenwaarden van een matrix te vinden, introduceren we het *karakteristiek polynoom* van een $n \times n$-matrix A als $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$. Als λ een eigenwaarde van A is, dan weten we dat $\lambda I - A$ een niet-triviale nulruimte heeft, dus dan is λ een nulpunt van χ_A. We kunnen het karakteristiek polynoom dus schrijven als $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$, waar de λ_i de eigenwaarden van A zijn. Het kan dus zijn dat een eigenwaarde vaker voorkomt, dit aantal noemen we de *algebraïsche multipliciteit* van een eigenwaarde (maar dat betekent niet per se dat het ook meer onafhankelijke eigenvectoren heeft!).

Het karakteristiek polynoom bevat in zijn coëfficiënten nog meer informatie van de matrix A. Zo volgt uit de definitie van het karakteristiek polynoom dat

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n - \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det A.$$

Samen met de ontbinding in eigenwaarden, volgt dus dat $\operatorname{tr} A$ de som van alle eigenwaarden is, en dat $\det A$ het product van alle eigenwaarden is. De volgende twee stellingen geven verder nog nuttige eigenschappen van het karakteristiek polynoom.

Stelling 6.6. *Laat A, B twee $n \times n$-matrices zijn, dan geldt $\chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$.*

Stelling 6.7 (Cayley-Hamilton)**.** *Laat A een vierkante matrix zijn, dan geldt $\chi_A(A) = 0$.*

De eerste stelling is redelijk eenvoudig als A inverteerbaar is. Dan geldt er namelijk $AB - \lambda I = A(BA - \lambda I)A^{-1}$, dus hebben $AB - \lambda I$ en $BA - \lambda I$ dezelfde determinant. Voor andere gevallen is het bewijs iets technischer. De stelling van Cayley-Hamilton is eenvoudig in te zien als A diagonaal is, want dan pas je χ_A gewoon toe op de diagonaalelementen. Als A diagonaliseerbaar is, kun je reduceren naar dit geval, maar het algemene geval is ook weer lastiger.

Er is dus altijd een polynoom van graad n, waar A een 'nulpunt' van is. We kunnen ons afvragen of er nog een polynoom van lagere graad is. We definiëren het *minimumpolynoom* μ_A als het monische polynoom met de kleinste graad waarvoor geldt dat $\mu_A(A) = 0$.

Voorbeeld 6.8. Beschouw de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan $\mu_A(x) = (x-1)(x-2)$ en $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$.

Propositie 6.9 (Eigenschappen van het minimumpolynoom)**.** *Zij A een vierkante matrix.*

(i) Als p een polynoom is zodat $p(A) = 0$, dan is p deelbaar door μ_A.

(ii) Alle eigenwaarden van A zijn nulpunten van μ_A.

(iii) De matrix A is diagonaliseerbaar dan en slechts dan als μ_A geen dubbele nulpunten heeft.

Vooral deze laatste eigenschap maakt het minimumpolynoom erg nuttig. Gecombineerd met de eerste zie je dat het genoeg is om een polynoom zonder dubbele nulpunten te vinden, waar A een 'nulpunt' van is. Dan weet je namelijk direct dat je A kunt diagonaliseren, en gaat het dus alleen nog om de eigenwaarden van de matrix A.

Voorbeeld 6.10. Laat zien dat er geen 2×2 matrices A bestaan zodat $A^3 + A = 2A^2$ en $\operatorname{tr}(A) = 3$.

Bewijs. Stel dat A een matrix is zodat $p(A) = A^3 - 2A^2 + A = 0$. We zien dat $p(x) = x(x-1)^2$, dus de eigenwaarden λ_1 en λ_2 van A zijn bevat in $\{0, 1\}$ wegens bovenstaand gevolg. Op geen enkele manier kan nu $\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$ gelden. $\square$

Een laatste stelling die nuttig kan zijn bij het werken met eigenwaarden, is de volgende generalisatie van de spectraalstelling.

Lemma 6.11 (Schur's lemma)**.** *Gegeven is een vierkante matrix A, dan bestaat er een unitaire matrix Q zodat $Q^{-1}AQ$ een bovendriehoeksmatrix is.*

Het is niet eens zo belangrijk dat Q unitair is, het gaat er vooral om dat A gelijkvormig is met een bovendriehoeksmatrix. In die vorm kun je namelijk de eigenwaarden op de diagonaal zien (kijk naar het karakteristiek polynoom). Zo zie je bijvoorbeeld ook dat de eigenwaarden van A^2 precies de eigenwaarden van A in het kwadraat zijn, met dezelfde multipliciteit.

Voorbeeld 6.12. Voor een reële 3×3-matrix A geldt dat

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wat zijn de mogelijke waarden van $\mathrm{tr}\, A$?

Bewijs. De eigenwaarden van A^2 zijn $4, 4, 1$, dus de eigenwaarden van A zijn $\pm 2, \pm 2, \pm 1$. Als alle eigenwaarden van A verschillend zijn, dan heeft het karakteristiek polynoom geen dubbele nulpunten en dus is A diagonaliseerbaar. Maar dan moet A^2 ook diagonaliseerbaar zijn en dat is het niet: er zijn geen twee onafhankelijke eigenvectoren met eigenwaarde 4. De eigenwaarden van A zijn dus $2, 2 \pm 1$ of $-2, -2, \pm 1$. Al deze mogelijkheden kunnen ook voorkomen: de eerste mogelijkheid zie je bij

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

en de tweede volgt door alles met -1 te vermenigvuldigen. Het spoor is de som van de eigenwaarden, dus is ± 3 of ± 5. $\square$

Continuïteitsargumenten (niet voor eerstejaars)

Op de ruimtes $Mat_n(\mathbb{R})$ en $Mat_n(\mathbb{C})$ van reële en complexe $n \times n$ matrices kunnen we de Euclidische topologie leggen (dus we beschouwen ze als $\mathbb{R}^{n^2}$ en $\mathbb{C}^{n^2}$). Polynomen in de entries van een matrix, zoals het spoor en de determinant, zijn hierop dus continue functies. In het bijzonder zien we dat

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in Mat_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$$

een open deelverzameling is. Als we de entries van een matrix niet te veel veranderen, verandert de determinant ook niet zo veel. Daaruit zie je het volgende.

Propositie 6.13. *De ruimte $GL_n(\mathbb{R})$ ligt dicht in $Mat_n(\mathbb{R})$. Hetzelfde geldt voor $GL_n(\mathbb{C}) \subset Mat_n(\mathbb{C})$.*

Dit kun je als volgt gebruiken. Stel dat je een polynomiale uitdrukking voor alle matrices wil bewijzen, maar je kunt het alleen voor inverteerbare matrices. Dan ben je klaar vanwege continuïteit en bovenstaande propositie.

Voorbeeld 6.14. We laten zien dat $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ voor alle matrices A en B. Kies B vast. Als A inverteerbaar is, hebben we het al gezien. Maar iedere coëfficiënt van χ_{AB} en van χ_{BA} is een polynomiale uitdrukking in de entries van A. Vanwege continuïteit geldt gelijkheid van de i-de coëfficiënt van χ_{AB} en de i-de coëfficiënt van χ_{BA}, voor iedere i.

Er zijn meer soorten matrices die dicht liggen.

Propositie 6.15. *De verzameling (reële) $n \times n$ matrices met n verschillende eigenwaarden, ligt open en dicht in de verzameling (reële) $n \times n$ matrices. In het bijzonder liggen ook de diagonaliseerbare matrices dicht.*

Een matrix A heeft n verschillende eigenwaarden dan en slechts dan als $\mathrm{disc}(\chi_A) \neq 0$. De coëfficiënten van χ_A zijn polynomiale functies in de entries van A, dus ook $\mathrm{disc}(\chi_A)$ is dat. Daaruit volgt de propositie.

Zolang je dus iets polynomiaals probeert te bewijzen voor alle matriecs, mag je gratis en voor niks aannemen dat de matrices inverteerbaar zijn en n verschillende eigenwaarden hebben!

Opgaven

Vraag 6.1. Gegeven is een $n \times n$ matrix A. We noemen A *nulpotent* als er een geheel getal k is zodat $A^k = 0$. Bewijs dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

1) A is nulpotent;
2) $A^n = 0$;
3) de enige eigenwaarde van A is 0;
4) $\chi_A(\lambda) = \lambda^n$.

Bewijs ook dat $\mathrm{tr}\, A^k = 0$ voor $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. (Bonus: laat zien dat deze uitspraak ook equivalent is met alle bovenstaande.)

Vraag 6.2. Een $n \times n$ matrix A heet een *involutie* als $A^2 = I$. Laat zien dat involuties diagonaliseerbaar zijn.

Vraag 6.3. Laat zien dat er geen vierkante matrices A en B bestaan zodat $AB - BA = I$.

Vraag 6.4. Zij $a, d \in \mathbb{R}$ en A de $n \times n$ matrix gegeven door $A_{ij} = a + |i - j| \cdot d$. Bepaal $\det A$.

Vraag 6.5. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en laat n oneven zijn. Bewijs dat $\det(A - A^T) = 0$.

Vraag 6.6 (IMC 1999)**.** (a) Laat zien dat voor iedere $n \geq 1$, er een reële $n \times n$ matrix A bestaat zodanig dat $A^3 = A + I$.

(b) Laat zien dat $\det A > 0$ wanneer A een reële matrix is met $A^3 = A + I$.

Vraag 6.7. Zij A de $n \times n$ matrix gegeven door $A_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i-j} & \text{als } i \neq j \\ 2 & \text{als } i = j \end{cases}$. Bepaal $\det A$.

Vraag 6.8 (IMC 2014, Vraag 1)**.** Bepaal alle paren (a, b) van reële getallen waarvoor er een unieke symmetrische 2×2 matrix M met reële entries bestaat zodanig dat $\operatorname{tr}(M) = a$ en $\det(M) = b$.

Vraag 6.9. Voor een geheel getal n definiëren we de $n \times n$-matrix A door $A_{i+1,i} = A_{i,i+1} = i + 1$ en $A_{i,i} = i^2 + 1$ voor $i = 1, 2, \ldots, n-1$, en $A_{n,n} = n^2$. Bepaal $\det A$.

Vraag 6.10. Een reële $n \times n$-matrix voldoet aan $A_{ii} = 1$ voor alle $i = 1, 2, \ldots, n$ en $A_{ij} + A_{ji} = 1$ voor alle $1 \leq i < j \leq n$. Bewijs dat $\det A > 0$.

Vraag 6.11. Zij P een vierkante matrix waarvoor de som van de entries uit iedere kolom gelijk is aan 1. Laat zien dat 1 een eigenwaarde is van P.

Vraag 6.12. Zij X een inverteerbare $n \times n$ matrix met kolommen $X_1, X_2, \ldots X_n$ en zij Y de matrix met kolommen $X_2, X_3, \ldots, X_n, 0$. Definieer $A = YX^{-1}$ en $B = X^{-1}Y$. Vind de rangen en eigenwaarden van A en B.

Vraag 6.13. Aan elke positief getal van n^2 cijfers voegen we de determinant toe van de matrix verkregen door de cijfers van het getal in volgorde op te schrijven langs de rijen. Bijvoorbeeld aan 8617 voegen we det $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ toe. Bepaal, als functie van n, de som van de determinanten toegevoegd aan alle getallen van n^2 cijfers. (We bekijken alleen getallen zonder voorafgaande nullen, voor $n = 2$ zijn er zo 9000 determinanten.)

Vraag 6.14. (a) Laat zien dat voor iedere twee commuterende nulpotente matrices A and B geldt dat $A + B$ ook nulpotent is.

(b) Geef een voorbeeld van twee nulpotente matrices A en B zodanig dat $A + B$ *niet* nulpotent is (in het bijzonder kunnen A en B dus niet commuteren).

Vraag 6.15. Zij $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ een matrix zodanig dat voor alle spoorloze matrices X (dus $\operatorname{tr} X = 0$) geldt dat $\operatorname{tr}(AX) = 0$. Bewijs dat A een diagonaalmatrix is.

Vraag 6.16. Zij $f\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ lineair (i.e. $f(\alpha A + \beta B) = \alpha f(A) + \beta f(B)$) voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ en alle $n \times n$ matrices A en B).

(a) Laat zien dat er een unieke matrix C bestaat, zodanig dat$f(A) = \operatorname{tr}(AC)$.

(b) Laat zien dat als bovendien $f(AB) = f(BA)$, dan $f(A) = \lambda \operatorname{tr} A$.

Vraag 6.17. Laat A en B complexwaardige vierkante matrices zijn van dezelfde grootte en stel dat $\operatorname{rk}(AB - BA) = 1$. Laat zien dat $(AB - BA)^2 = 0$.

Vraag 6.18. Zij A en B twee 2×2 matrices met gehele coëfficienten zodat $A + kB$ voor $k = 0, 1, \ldots, 4$ allen inverteerbaar zijn en dat hun inverses ook gehele coëfficienten hebben. Laat zien dat ook $A + 5B$ inverteerbaar is en dat de inverse ook gehele coëfficienten heeft.

Vraag 6.19 (IMC 2011, vraag 2)**.** Laat zien dat er geen reële 3×3 matrix A bestaat zodat $A^2 + A^T = I$ en $\operatorname{tr} A = 0$.

Vraag 6.20 (IMC 2014)**.** Zij $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ een symmetrische $n \times n$ matrix met reële entries en eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Toon aan dat

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ii} a_{jj} \geq \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_i \lambda_j$$

en bepaal alle matrices waarvoor gelijkheid geldt.
Hint: $(x_1 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2\sum_{i<j} x_i x_j$ *voor alle* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

Vraag 6.21 (IMC 2005, Vraag 3)**.** In de lineaire ruimte van alle $n \times n$ matrices, vind de grootst mogelijke dimensie van een lineaire deelruimte V zodanig dat

$$\operatorname{tr}(XY) = 0 \text{ voor alle } X, Y \in V.$$

Hint: bereken eens $\operatorname{tr}(AA^T)$.

Vraag 6.22. Zij $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Schrijf A_k voor de matrix die je krijgt als je de eerste kolom van A vervangt door de k-de kolom van B, en symmetrisch B_k. Bewijs:

$$\det(A) \cdot \det(B) = \sum_{k=1}^{n} \det(A_k) \cdot \det(B_k).$$

Vraag 6.23. Bewijs dat $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^2$ dan en slechts dan als $\lim_{\lambda \to 0}(A + \lambda I)^{-1} A$ bestaat.

Vraag 6.24. Stel dat A een matrix is zodat $3A^3 = A^2 + A + I$. Laat zien dat $\lim_{k \to \infty} A^k$ bestaat en idempotent is (i.e. als $L = \lim_{k \to \infty} A^k$, dan $L^2 = L$).

Vraag 6.25. Herinner je dat de e-macht vaak gedefinieerd wordt als $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Met dit in gedachten, definieer voor een vierkante matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de e-macht als de matrix $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Bewijs dat

$$\det(e^A) = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

Vraag 6.26. Definieer voor een vierkante matrix A de sinus als

$$\sin(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

Bestaat er een 2×2 matrix A zodat

$$\sin(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1996 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}?$$

Vraag 6.27 (IMC 2009)**.** Laat A en B twee $n \times n$ matrices zijn zodanig dat $A^2B + BA^2 = 2ABA$. Laat zien dat er een $k \geq 1$ is zodanig dat $(AB - BA)^k = 0$.

Vraag 6.28. Laat A en B twee reële $n \times n$ matrices zijn zodanig dat $A + t_i B$ nulpotent is voor $n+1$ verschillende reële getallen $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$. Bewijs dat A en B ook nulpotent zijn.
Hint: Probeer de conditie "$A+tB$ is nulpotent" uit te drukken in een aantal polynomiale condities op t.

Vraag 6.29. Laat S de verzameling van 2×2 matrices van de vorm

$$M = \begin{pmatrix} a & a+d \\ a+2d & a+3d \end{pmatrix}.$$

Vind alle matrices M in S zodat er een geheel getal $k > 1$ bestaat zodat M^k ook in S zit.

Vraag 6.30. Zij n een positief geheel getal. Stel dat A, B, en M alledrie $n \times n$ matrices zijn met reële entries, zodanig dat $AM = MB$ en dat A en B hetzelfde karakteristieke polynoom hebben. Bewijs dat $\det(A - MX) = \det(B - XM)$ voor iedere $n \times n$ matrix X met reële entries.

Vraag 6.31. Zij A een vierkante, complexe matrix. Schur's lemma zegt dat A gelijkvormig is met een bovenhdriehoeksmatrix.

(a) Laat zien dat A zelfs gelijkvormig is met een matrix van de vorm

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

waar elke A_i een bovendriehoeksmatrix is waarvan alle diagonaalelementen gelijk zijn.

(b) Bewijs de stelling van Cayley-Hamilton.

(c) Bewijs dat A diagonaliseerbaar is, precies als zijn minimaalpolynoom geen dubbele nulpunten heeft.

(d) Stel dat B een nulpotente matrix is. Vind een basis $e_1, \ldots, e_n$ waarin voor elke i geldt $B(e_i) = 0$ of $B(e_i) = e_{i-1}$. Hoe ziet de matrix van B eruit in deze basis?

(e) Bewijs dat de blokken A_i zo gekozen kunnen worden dat ze diagonaal zijn, behalve eventuele 1'en direct boven de diagonaal. Dit is een *Jordan-vorm* van A.

(f) Bewijs dat A en A^T gelijkvormig zijn.

Analyse

7 Rijen, reeksen en limieten

Rijen

Rijen komen vaak terug in IMC-opgaven en vaak op verschillende manieren. Zo zul je vaak een limiet van een rij moeten uitrekenen, of achterhalen of een bepaalde rij convergeert. Hieronder zijn twee belangrijke criteria om convergentie van rijen te bewijzen.

1) Een begrensde, monotone rij is convergent (monotone convergentie).

2) Elke begrensde rij bevat een convergente deelrij (Bolzano-Weierstrass).

Het eerste punt is equivalent met het feit dat de reële getallen *compleet* zijn. De stelling van Bolzano-Weierstrass volgt hieruit; je kunt namelijk met het ladenprincipe bewijzen dat elke rij een monotone deelrij heeft.

Per definitie mag je ook continue functies en limieten omdraaien: als $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = f(a).$$

Dit heeft tot gevolg dat je in het geval van een recursief gedefinieerde rij gemakkelijk de mogelijke limietwaarden kunt bepalen. Stel dat een rij a_n gegeven is door de recurrente betrekking $a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$ voor een zekere $k > 0$ en een functie f die in iedere variabele continu is, bijvoorbeeld $f(x, y) = 2x + 3xy$. Als L de limiet is, dan geldt er dat

$$L = \lim_n a_n = \lim f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}) = f(\lim a_{n-1}, \ldots, \lim a_{n-k}) = f(L, L, \ldots, L).$$

Dit geeft je een vergelijking voor L, van waaruit je de mogelijke waardes van L vaak kan bepalen. Let wel op: je bewijst zo niet dat de rij ook naar L *convergeert*; dit zul je apart moeten aantonen. Als $k = 1$ en f een *contractie* is, dan kunnen we meer zeggen.

Stelling 7.1 (Banach fixpuntstelling)**.** *Zij X een gesloten interval in $\mathbb{R}$, of $X = \mathbb{R}$ of $X = \mathbb{C}$. Als $f\colon X \to X$ een* contractie *is, dat wil zeggen dat er een $c \in [0, 1)$ bestaat zodanig dat*

$$|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y| \quad \textit{voor alle } x, y \in X,$$

dan is er een uniek fixpunt *van f, i.e. een uniek punt $x^* \in X$ zodanig dat $f(x^*) = x^*$. Bovendien geldt er voor iedere $x_0 \in X$ dat de rij gedefinieerd door $x_n = f(x_{n-1})$ convergeert naar x^*.*

Deze stelling ziet er ingewikkeld uit, maar het bewijs is niet zo moeilijk. Je kan met inductie bewijzen dat $|x_{n+1} - x_n| \leq c^n\,|x_1 - x_0|$ en daarmee laten zien dat de rij Cauchy is. Als je wil bewijzen dat een functie f een contractie is, dan komt de middelwaardestelling vaak goed van pas.

Voorbeeld 7.2. Zij (x_n) de rij gedefinieerd door $x_0 = 1$ en $x_{n+1} = \frac{1}{2}\sin(x_n)$. Laat zien dat (x_n) convergeert en bepaal de limiet.

Bewijs. We bekijken $X = [0,1]$ en de functie $f\colon [0,1] \to [0,1]$ gegeven door $f(x) = \frac{1}{2}\sin(x)$. We zien dan met de middelwaardestelling dat er voor alle $x, y \in [0,1]$ een $\xi \in (x,y)$ bestaat zodanig dat

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)|\,|x-y| \leq \frac{1}{2}\,|x-y|\,,$$

wat aantoont dat f een contractie is. De Banach fixpuntstelling zegt dus dat de rij (x_n) convergeert naar het unieke fixpunt van f op $[0,1]$. We zien dat $f(0) = 0$, dus de rij convergeert naar 0. $\square$

Een andere handige stelling voor het berekenen van limieten is de volgende.

Stelling 7.3 (l'Hôpital)**.** *Zij f, g differentieerbare functies op een verzameling $S \subset \mathbb{R}$ zodanig dat de limiet*

$$L = \lim_{x\to s} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

bestaat. Als $\lim_{x\to s} f(x) = \lim_{x\to s} g(x) = 0$ of $\lim_{x\to s} |g(x)| = +\infty$, dan

$$\lim_{x\to s} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Hierbij mag $s \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Deze stelling zegt dus dat je onder goede voorwaarden boven en onder mag differentiëren en die limiet kunt uitrekenen. Ook voor rijtjes is dit handig.

Voorbeeld 7.4. Als $d > 0$, bewijs dan dat

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{d}{n}\right)^n = e^d.$$

Bewijs. We definiëren de functie $f(x) = x\log(1 + d/x) = g(x)/h(x)$, waar $g(x) = \log(1 + d/x)$ en $h(x) = 1/x$. Omdat $h(x), g(x) \to 0$ als $x \to \infty$, mogen we l'Hospital toepassen om te verkrijgen dat

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{d}{1 + d/x} = d.$$

Er volgt uit continuïteit dus dat

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{d}{n}\right)^n = \exp(\lim_{n\to\infty} f(n)) = e^d. \qquad \square$$

Reeksen

Voor een rij $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ noemen we $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ een *reeks* , en we zeggen dat de reeks convergeert als er een eindige waarde uitkomt. Het uitrekenen van de waarde van een reeks is een speciaal geval van het uitrekenen van de limiet van een rij, maar desalniettemin zijn er allerlei nuttige stellingen voor het uitrekenen van reeksen. Als de reeks convergeert naar de eindige waarde S, dan zien we dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S - S = 0.$$

Maar andersom zien we dus ook, als de termen van de rij niet naar 0 convergeren, dat de reeks niet kan convergeren. Een van de belangrijkste reeksen is de *meetkundige reeks.*

Stelling 7.5 (meetkundige reeks)**.** *Als $x \neq 1$, dan geldt voor iedere $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ dat*

$$\sum_{k=1}^{n-1} x^k = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Als $|x| < 1$, dan volgt er dus dat $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Om te bepalen of een reeks convergeert, is het soms mogelijk om de termen te vergelijken met een meetkundige reeks. Twee bekende toepassingen daarvan zijn de worteltest en de ratiotest: als $\limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| < 1$ of $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, dan convergeert de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Een andere veel voorkomende test, is het vergelijken met een integraal. Op die manier kun je soms zelfs een expliciete boven- of ondergrens geven. Je kunt die grens daarna nog scherper maken door de eerste paar termen al op te tellen, en alleen de rest af te schatten met een integraal.

Verder kan het handig zijn om de volgende reeksen te onthouden.

- De reeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ convergeert dan en slechts dan als $\alpha > 1$;
- $\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ voor alle x met $|x| < 1$;
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ voor alle $x \in \mathbb{C}$;
- $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ voor alle $x \in \mathbb{C}$;
- $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ voor alle $x \in \mathbb{C}$.

Vaak moet je een slimme afschatting bedenken om te laten zien dat een bepaalde reeks wel of niet convergeert.

Voorbeeld 7.6. Laat zien dat de som

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n^\alpha}$$

convergeert als $\alpha > 0$.

Bewijs. We definiëren $a_n = (-1)^n \frac{\log n}{n^\alpha}$ en we nemen aan dat $\alpha > 0$.

Vanwege de alternating series test weten we dat de som zou convergeren als de term $\log n$ er niet zou staan. Het idee is dat deze term er niet toe doet. De term $(-1)^n$ suggereert dat we naar twee opeenvolgende waarden moeten kijken. Beschouw dus

$$a_{2n-1} + a_{2n} = (-1)^{2n-1}\frac{\log(2n-1)}{(2n-1)^\alpha} + (-1)^{2n}\frac{\log(2n)}{(2n)^\alpha} = \frac{\log(2n)}{(2n)^\alpha} - \frac{\log(2n-1)}{(2n-1)^\alpha}.$$

Deze uitdrukking is van de vorm $f(2n) - f(2n-1)$, waar $f(x) = \frac{\log x}{x^\alpha}$. Vanwege de middelwaardestelling kunnen we voor iedere n een $x_n \in (2n-1, 2n)$ vinden zodat $f(2n) - f(2n-1) = f'(x_n)$. Laten we $f'(x)$ dus eens berekenen:

$$|f'(x)| = \left| \frac{\frac{1}{x} \cdot x^\alpha - \alpha x^{\alpha-1}\log x}{x^{2\alpha}} \right| \leq C_0 \frac{\log x}{x^{1+\alpha}} \leq C_1 \frac{1}{x^{1+\alpha/2}},$$

waar de C_i constantes zijn; we zijn alleen geïnteresseerd in het gedrag voor grote x. We vinden dat $f(2n) - f(2n-1)$ begrensd wordt door $\frac{C}{(2n-1)^{1+\alpha/2}}$. Omdat we weten dat $\sum_n \frac{1}{n^{1+\alpha/2}}$ convergeert, doet $\sum_n a_n$ dat ook. $\square$

Vermomde Riemannsommen

Als $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continu is, dan geldt er dat reeksen van de vorm

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_{i+1} - a_i)$$

met $x_i \in [a_i, a_{i+1}]$ en $a = a_0 < \ldots < a_{n+1} = b$ convergeren naar $\int_a^b f(x)\,dx$ als de partitielengte naar nul gaat wanneer $n \to \infty$. Dit kunnen we ook omdraaien: gegeven een reeks, kunnen we die misschien wel zien als Riemannsom en zo de limiet bepalen.

Voorbeeld 7.7. We bepalen de volgende limiet:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^1 \left(\frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(\frac{n}{n}\right)^n \right)^{1/n^2}.$$

Neem eerst eens de logaritme. Die is continu, dus dan krijgen we

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \log\frac{k}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n} \log\frac{k}{n}.$$

Neem dus $f(x) = x\log x$, $a_k = (k-1)/n$ en $x_k = k/n$. Dan zien we de a_k-tjes het interval $[0,1]$ partitioneren en dat bovenstaande uitdrukking een Riemannsom is. Dit convergeert dus naar

$$\int_0^1 x\log x\,dx = -\frac{1}{4}.$$

De integraal kun je uitrekenen door partieel te integreren en op te merken dat $\lim_{x\to 0} x^2 \log x = 0$ met behulp van l'Hôpital. We hadden de logaritme genomen, dus het eindantwoord is $e^{-1/4}$.

Omdraaistellingen

Vaak zul je in een argument willen dat je de termen van een reeks van volgorde kunt verwisselen, of misschien dat je een limiet en integraal kunt omdraaien. Dit kan niet altijd, een interessant voorbeeld is de alternerende harmonische reeks $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ De waarde van deze reeks is $\log 2$, maar als ik maar genoeg termen ga verwisselen, kan ik elke willekeurige waarde uit de reeks krijgen. Dat komt omdat de reeks niet *absoluut convergent* is: als ik van elke term de absolute waarde neem, is de reeks niet meer convergent. Dat betekent dat de positieve termen optellen tot willekeurig grote waarden, net als de negatieve termen. Je kunt dan de volgorde altijd zo kiezen dat ze blijven alterneren om een reëel getal r, en zelfs zorgen dat de reeks naar r convergeert.

Gelukkig zijn er veel gevallen waar je wel dingen mag omwisselen, en bij het oplossen van een opgave is het goed om altijd te doen alsof je dingen mag omwisselen. Als het oplossen is gelukt, kun je altijd nog nadenken of je de dingen wel echt kon omwisselen. De volgende stellingen kunnen daarbij helpen.

Stelling 7.8. *(i) Gegeven is een rij (a_n) zodat de reeks $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ convergeert. Dan convergeert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, en de waarde is onafhankelijk van de volgorde van de termen.*

(ii) Gegeven zijn reële getallen $(a_{m,n})_{m,n}$, zodat de dubbele reeks $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{m,n}|$ convergeert. Dan geldt dat $\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,n}$.

(iii) (Fubini) Gegeven zijn twee intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ en een functie $f : I \times J \to \mathbb{R}$ zodat $\int_I \int_J |f(x, y)| \, dy \, dx < \infty$. Dan geldt dat $\int_I \int_J f(x, y) \, dy \, dx = \int_J \int_I f(x, y) \, dx \, dy$.

Stelling 7.9 (Lebesgue gedomineerde-convergentiestelling)**.** *Gegeven zijn functies $f_n(x)$, $g(x)$ zodat $|f_n(x)| \leq g(x)$ voor alle n, $\int_a^b g(x) \, dx < \infty$ en de puntsgewijze limiet $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ bestaat voor elke $x \in (a, b)$. Dan geldt dat*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x) \, dx.$$

Opgaven

Vraag 7.1. Bepaal $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Vraag 7.2. Zij $x \in (0, 1)$. Bereken het product

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right).$$

Vraag 7.3. Zij $x, y > 0$. Bepaal twee rijtjes r_n en m_n door $r_1 = \frac{x+y}{2}$, $m_1 = \sqrt{xy}$ en $r_{n+1} = \frac{r_n + m_n}{2}$ en $m_{n+1} = \sqrt{r_n m_n}$ voor $n \geq 0$. Bewijs dat $\lim_{n\to\infty} r_n$ en $\lim_{n\to\infty} m_n$ bestaan en gelijk zijn.

Vraag 7.4. Stel dat $\{f_n\}_{n\geq 1}$ een rij continue functies op het interval $[0,1]$ is, zodat

$$\int_0^1 f_m(x)f_n(x)\,dx = \delta_{n,m},$$

waar $\delta_{n,m} = 1$ als $n = m$ en $\delta_{n,m} = 0$ anders. Stel bovendien dat

$$\sup\{|f_n(x)| \mid x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Laat zien dat $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ niet voor alle $x \in [0,1]$ bestaat.
Hint: dit ruikt naar de gedomineerde-convergentiestelling.

Vraag 7.5 (IMC 2016, Dag 2 vraag 1)**.** Zij (x_n) een rij positieve getallen zodanig dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2n-1} = 1$. Laat zien dat

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x_n}{k^2} \leq 2.$$

Vraag 7.6. Laat zien dat de rij (a_n) gegeven door

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \ldots + \sqrt{n}}}}$$

convergeert.
Hint: pas de worteltruc toe op $a_{n+1} - a_n$.

Vraag 7.7 (IMC 2014, vraag 2)**.** Beschouw de volgende rij

$$(a_n) = (1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots).$$

Vind alle paren (α, β) van positieve reële getallen zodat $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n^\alpha} = \beta$.
Hint: bekijk eerst een deelrij van (a_n) die makkelijker te bepalen is.

Vraag 7.8. Zij $\pi\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ een bijectie. Laat zien dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2}$$

divergeert.
Hint: zoek een universele ondergrens voor $\sum_{n=N}^{2N} \frac{\pi(n)}{n^2}$.

Vraag 7.9. Zij $B(n)$ het aantal enen in de binaire expansie van n. Bepaal of

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(n)}{n(n+1)}\right)$$

een rationaal getal is.

Vraag 7.10. Laat $\alpha(n)$ het aantal nullen zijn in de expansie van n in het 3-tallig stelsel. Voor welke positieve x convergeert de rij

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\alpha(n)}}{n^3}?$$

Vraag 7.11. Zij $d \in \mathbb{R}$. Voor elk geheel getal $m \geq 0$ definiëren we een rij $(a_m(j))_{j\geq 0}$ door $a_m(0) = d \cdot 2^{-m}$ en $a_m(j+1) = a_m(j)^2 + 2a_m(j)$ voor $j \geq 0$. Bepaal $\lim_{n\to\infty} a_n(n)$.

Vraag 7.12 (IMC 1999)**.** Stel dat een functie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voldoet aan

$$\left| \sum_{k=1}^{n} 3^k (f(x+ky) - f(x-ky)) \right| \leq 1,$$

voor $n \in \mathbb{N}$ en alle $x, y \in \mathbb{R}$. Bewijs dat f constant is.
Hint: probeer het somteken in de voorwaarde weg te werken, zodat je een bovengrens vindt voor $\left|3^k(f(x+ky) - f(x-ky))\right|$.

Vraag 7.13. Gegeven $\alpha \in \mathbb{R}$ definieer de rij a_n door $a_0 = \alpha$, $a_1 = 1$ en $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$ voor $n \geq 0$. Voor welke α bevat deze rij gelijke termen?

Vraag 7.14. Zij $f \colon [0,1] \to [0,1]$ een continue functie. Definieer een rij x_n door $x_{n+1} = f(x_n)$ voor $n \geq 1$, waar $x_1 \in [0,1]$ willekeurig gekozen kan worden. Bewijs dat x_n convergeert dan en slechts dan als

$$\lim x_{n+1} - x_n = 0.$$

Vraag 7.15. Stel dat $(a_n)_{n\geq 1}$ een stijgende rij positieve reëele getallen is zodat $\lim a_n/n = 0$. Bestaan er oneindig veel positieve gehele getallen n zodat $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$ voor $i = 1, 2, \ldots, n-1$?

Vraag 7.16. [IMC 2002 A4] Zij $f \colon [a,b] \to [a,b]$ een continue functie en zij $p \in [a,b]$. Definieer $p_0 = p$ en $p_{n+1} = f(p_n)$ voor $n \geq 0$. Stel dat de verzameling $T_p = \{p_n \mid n = 0, 1, 2, \ldots\}$ gesloten is. Laat zien dat T_p maar eindig veel elementen bevat.

NB: een verzameling $T \subset \mathbb{R}$ noemen we gesloten als het de limieten bevat van alle rijtjes s_n met $s_n \in T$ voor alle n.

Vraag 7.17. [IMC 2003 A5] Zij $g \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ een continue functie en definieer de rij functies $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ door $f_0(x) = g(x)$ en

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f_n(t)\, dt$$

voor $x \in (0,1]$ en $n \geq 0$. Bepaal $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ voor elke $x \in (0,1]$.

Vraag 7.18. Zij $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ een bijectie van de natuurlijke getallen naar zichzelf. Zij bovendien $\{x_n\}_{n\geq 1}$ een rij reëele getallen zodat

1) $|x_n|$ een dalende functie is van n;

2) $|\sigma(n) - n| \cdot |x_n| \to 0$ als $n \to \infty$;

3) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k = 1$.

Zijn deze condities voldoende om te laten zien dat $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} = 1$?

Vraag 7.19. Laat zien dat

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}} = 3.$$

Vraag 7.20. Zij $b_0 = 1$ en $b_{n+1} = 2 + \sqrt{b_n} - 2\sqrt{1 + \sqrt{b_n}}$. Bepaal $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n$.

Vraag 7.21. Bepaal

$$\lim_{x\to 1^-} (1-t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{1+t^n}.$$

Vraag 7.22. Laat zien dat

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2+x)^2} = \frac{1}{2}$$

Vraag 7.23. Zij ϵ_n een rij positieve getallen zodanig dat $\epsilon_n \to 0$ wanneer $n \to \infty$. Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \log\left(\frac{k}{n} + \epsilon_n\right).$$

8 Functies en continuïteit

Introductie

Een functie f van een verzameling A naar een verzameling B, is een voorschrift dat aan ieder element van A precies één element van de verzameling B toekent. Als f aan $a \in A$ het element $b \in B$ toekent, schrijven we $f(a) = b$. In dit hoofdstuk zijn A en B meestal deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

De polynomen uit het vorige hoofdstuk, zijn bijvoorbeeld functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}$ die heel mooie eigenschappen hebben.

Continuïteit

Één van de eigenschappen waarin we geïnteresseerd zijn, is continuïteit. Intuïtief kun je zeggen dat een functie f continu is als je zijn grafiek kunt tekenen zonder te potlood van het papier op te tillen. Deze definitie werkt prima om over na te denken, maar iets minder makkelijk voor een formeel bewijs.

Definitie 8.1. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, en laat $x \in \mathbb{R}$. De functie f is continu in x als:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in \mathbb{R} \; : \; |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

De functie f heet continu als hij in ieder punt $x \in \mathbb{R}$ continu is.

Bovenstaande definitie kan een beetje worden aangepast als je naar een functie $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ of iets dergelijks wil kijken.

Soms is het makkelijker om de volgende equivalente definitie te gebruiken, die met rijtjes en limieten werkt:

Definitie 8.2. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie, en laat $x \in \mathbb{R}$. De functie f is continu in x als voor ieder rijtje $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ dat naar x convergeert, geldt dat het rijtje $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ naar $f(x)$ convergeert.

De functie f heet continu als hij in ieder punt $x \in \mathbb{R}$ continu is.

En wie het vak topologie heeft gevolgd, kan desgewenst ook werken met open en gesloten verzamelingen:

Definitie 8.3. Zij $f\colon A \to B$ een functie tussen twee topologische ruimten. Dan heet f continu als $f^{-1}(U)$ open is in A voor elke open deelverzameling $U \subseteq B$.

Continue functies hebben mooie eigenschappen. Een van de meest simpele is de Tussenwaardestelling:

Propositie 8.4 (Tussenwaardestelling)**.** *Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Dan wordt elke waarde tussen $f(a)$ en $f(b)$ ook door f aangenomen op het interval $[a,b]$.*

Op een compact domein, hebben continue functies een paar handige eigenschappen:

Propositie 8.5. *Zij $f\colon A \to B$ een continue functie, waarbij A compact is. Dan neemt f een maximum en een minimum aan op A.*

Herinner je dat voor een deelverzameling A van $\mathbb{R}$ geldt dat A compact is dan en slechts dan als A gesloten en begrensd is. En A is gesloten als het complement van A een (mogelijk oneindige) vereniging van open intervallen is.

Ook kunnen we nog een wat strengere vorm van continuïteit definiëren:

Definitie 8.6. Een functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heet uniform continu als

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ :\ |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Het verschil met de vorige definitie is dat de keuze van δ nu niet langer van x af kan hangen. Op een compact domein, komen de continuïteit en uniforme continuïteit overeen:

Propositie 8.7. *Zij $f\colon A \to B$ een continue functie, waarbij A compact is, en $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dan is f uniform continu.*

Differentieerbaarheid

Nog wat verdergaand dan continuïteit is het concept differentieerbaarheid. Een functie $f\colon A \to \mathbb{R}$ met $A \subseteq \mathbb{R}$ open heet differentieerbaar in een punt $x \in A$ als er een raaklijn aan de grafiek van f bestaat die door het punt $(x, f(x))$ gaat. Een nettere definitie:

Definitie 8.8. Zij $f\colon A \to \mathbb{R}$ een functie, met A een open deelverzameling van $\mathbb{R}$ en $x \in A$. De functie f heet differentieerbaar in x als

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

bestaat (en eindig is). In dat geval wordt deze limiet $f'(x)$ genoemd. De functie f heet differentieerbaar als hij in ieder punt van A differentieerbaar is. Als de afgeleide functie f' bovendien continu is, heet f continu differentieerbaar.

Een differentieerbare functie is in het bijzonder ook altijd continu. Andersom hoeft dat zeker niet waar te zijn. Hieronder volgen een paar nuttige feitjes over differentieerbare functies:

Propositie 8.9 (Middelwaardestelling)**.** *Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differentieerbaar op (a,b) en continu op $[a,b]$. Dan bestaat er een punt $c \in (a,b)$ zodanig dat*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Propositie 8.10. *Zij $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differentieerbaar en naam aan dat f een maximum of minimum heeft in $x \in (a,b)$. Dan geldt $f'(x) = 0$.*

Ondanks dat een afgeleide van een differentieerbare functie f niet continu hoeft te zijn, geldt er toch een soort tussenwaardestelling:

Propositie 8.11 (Stelling van Darboux)**.** *Zij $f\colon A \to \mathbb{R}$ differentieerbaar, met $A \subseteq \mathbb{R}$ open. Voor een interval $[a,b] \subseteq A$ en y een getal tussen $f'(a)$ en $f'(b)$, geldt dan dat er een $x \in (a,b)$ bestaat met $f'(x) = y$.*

Bewijs. We nemen aan dat $f'(a) < y < f'(b)$, en we definiëren de functie $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ door $g(t) = f(t) - yt$. Omdat $[a,b]$ compact is, neemt g een minimum aan. Aangezien $g'(a) = f'(a) - y < 0$ kan g dit minimum niet aannemen in a, en aangezien $g'(b) = f'(b) - y > 0$ kan g het minimum ook niet aannemen in b. Er is dus een $x \in (a,b)$ waar g zijn minimum aanneemt, en volgens Propositie 8.10 geldt dan $g'(x) = 0$. Dit betekent dat $f'(x) = y$ voor een $x \in (a,b)$. $\square$

En als een functie een of meerdere keren kan worden gedifferentieerd, kunnen de de stelling van Taylor gebruiken om de functie te benaderen met een polynoom:

Stelling 8.12 (Stelling van Taylor)**.** *Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie die $k+1$ keer differentieerbaar is, met $k \in \mathbb{N}$. Voor $a, x \in \mathbb{R}$, bestaat er een ξ tussen a en x zodanig dat*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1}.$$

Integreren

Tegenover differentëren staat het concept integreren. Om deze twee concepten te verbinden is er de Hoofdstelling van de Calculus

Stelling 8.13 (Hoofdstelling van de Calculus)**.** *Zij $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een continue functie. Definieer $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ door*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Dan is F continu op $[a,b]$, en op (a,b) is F bovendien differentieerbaar en geldt $F'(x) = f(x)$.

Als f niet continu is, hoeven F' en f niet overeen te komen. Wel blijft F nog altijd continu, zolang f maar Riemann integreerbaar is.

Limieten van functies

Opgaven over functies gaan ook vaak over rijen van functies. In deze context is het nuttig om te kijken naar limieten van degelijke rijtjes, en welke eigenschappen behouden blijven onder het nemen van de limiet.

Definitie 8.14. Laat $A \subseteq \mathbb{R}$ en laat $\{f_n \colon A \to \mathbb{R}\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van functies zijn. We zeggen dat de rij puntsgewijs convergeert naar $f \colon A \to \mathbb{R}$ als voor alle $x \in A$ geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

We zeggen dat de rij uniform convergeert naar $f \colon A \to \mathbb{R}$ wanneer

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N \ \forall x \in A \ : \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

De uniforme convergentie is sterker omdat er nu een minimum convergeertempo moet bestaan dat voor alle punten in A tegelijk geldt. In deze situatie wordt continuïteit behouden onder het nemen van de limiet:

Propositie 8.15. *Laat $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van continue functies van A naar $\mathbb{R}$ zijn, waarbij $A \subseteq \mathbb{R}$. Als alle functies f_n continu zijn, en de rij f_n uniform naar $f \colon A \to \mathbb{R}$ convergeert, dan is f continu.*

Evenzo is de uniforme limiet van een rij Riemann integreerbare functies weer Riemann integreerbaar. Kijk ook nog even terug naar Stelling 7.9 voor een handige voorwaarde om met limieten en integralen te werken.

Vreemde voorbeelden

Ondanks dat continuïteit als een hele mooie eigenschap klinkt, blijken er toch hele vreemde continue functies te bestaan. Een bekend voorbeeld hiervan is de zogenaamde Devil's Staircase. Dit is een continue functie van [0.1] naar $[0, 1]$. Hij is bijna overal differentieerbaar, met afgeleide 0, maar de functie zelf is niet constant. De functie kan worden opgebouwd als uniforme limiet van continue functies:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= x \\
f_1(x) &= \begin{cases} \frac{3}{2}x & \text{als } 0 \leq x \leq 1/3, \\ \frac{1}{2} & \text{als } 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}(x - \frac{2}{3}) & \text{als } 2/3 \leq x \leq 1. \end{cases} \\
f_2(x) &= \begin{cases} \frac{9}{4}x & \text{als } 0 \leq x \leq 1/9, \\ \frac{1}{4} & \text{als } 1/9 \leq x \leq 2/9, \\ \frac{1}{4} + \frac{9}{4}(x - \frac{2}{9}) & \text{als } 2/9 \leq x \leq 1/3, \\ \frac{1}{2} & \text{als } 1/3 \leq x \leq 2/3, \\ \frac{1}{2} + \frac{9}{4}(x - \frac{2}{3}) & \text{als } 2/3 \leq x \leq 7/9, \\ \frac{3}{4} & \text{als } 7/9 \leq x \leq 8/9, \\ \frac{3}{4} + \frac{9}{4}(x - \frac{8}{9}) & \text{als } 8/9 \leq x \leq 1. \end{cases} \\
f_3(x) &= \dots \\
f_n(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}f_{n-1}(3x) & \text{als } 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \text{als } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_{n-1}(3x-2) & \text{als } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

In de opgaven set hieronder staat een groot aantal vragen waarbij je naar andere vreemde voorbeelden moet zoeken. Ook op de IMC komen dergelijke opgaven regelmatig voor, vaak in een 'is dit waar of niet' formulering. Om te voorkomen dat je continue functies als 'te mooi' ziet, is het nuttig om een voorbeeld als de Devil's Staircase in je achterhoofd te houden.

Opgaven

Vraag 8.1 (IMC 2016)**.** Gegeven is een continue functie $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die differentieerbaar is op (a,b). Stel dat f oneindig veel nulpunten heeft, maar dat er geen $x \in (a,b)$ bestaat waarvoor $f(x) = f'(x) = 0$.

(a) Bewijs dat $f(a)f(b) = 0$.

(b) Geef een voorbeeld van zo'n functie f op $[0,1]$.

Vraag 8.2 (IMC 2017)**.** Gegeven is een continue functie $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ zodat de limiet $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ bestaat (L mag zowel eindig als oneindig zijn). Bewijs dat

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\,dx = L.$$

Vraag 8.3 (IMC 2009)**.** Laat f en g twee reëelwaardige functies op $\mathbb{R}$ zijn, waarvoor geldt dat $f(r) \leq g(r)$ voor elk rationale getal r. Betekent dit dat $f(x) \leq g(x)$ voor elke $x \in \mathbb{R}$ als

(a) f en g niet-dalend zijn?

(b) f en g continu zijn?

Vraag 8.4. Het is een regelmatigvoorkomende fout bij calculus dat gedacht wordt dat de productregel zegt dat $(fg)' = f'g'$. Bepaal of er voor $f(x) = e^{x^2}$ een interval (a,b) en een niet triviale differentieerbare functie $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ bestaat zodat deze verkeerde productregel wel geldt voor $x \in (a,b)$.

Vraag 8.5. Gegeven is een functie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, differentieerbaar op $(0,1)$, zodat $f(0) = f(1) = 0$.

(a) Bewijs dat er een $c \in (0,1)$ bestaat waarvoor $f'(c) = f(c)$.

(b) Bewijs dat er een $c \in (0,1)$ bestaat waarvoor $f'(c) = f(c)\tan(c)$.

Vraag 8.6. De reële getallen a_i voldoen aan

$$\frac{a_0}{1} + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

Laat zien dat $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ een reëel nulpunt heeft.

Vraag 8.7. Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie zijn. Bewijs of ontkracht de volgende beweringen:

(a) Als f continu is met bereik $\mathbb{R}$, dan is f monotoon.

(b) Als f monotoon is met bereik $\mathbb{R}$, dan is f continu.

(c) Als f monotoon en continu is, dan is het bereik van f heel $\mathbb{R}$.

Vraag 8.8 (IMC 2000)**.** Zij $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Bestaat er een $x \in [0,1]$ zodanig dat $f(x) = x$ als

(a) $f\colon [0,1] \to [0,1]$ een strikt stijgende functie is?

(b) $f\colon [0,1] \to [0,1]$ een strikt dalende functie is?

Vraag 8.9 (IMC 2007)**.** Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een continue functie zijn. Veronderstel dat voor iedere $c > 0$, de grafiek van f kan worden verplaatst naar de grafiek van cf door middel van een translatie of een rotatie. Impliceert dit dat $f(x) = ax + b$ voor zekere reële getallen a en b?

Vraag 8.10 (IMC 2017)**.** Gegeven is een differentieerbare functie $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$, waarvoor er een constante $L > 0$ bestaat zodat

$$|f'(x) - f'(y)| \leq L\,|x - y|\,, \qquad \text{voor alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Bewijs dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $(f'(x))^2 < 2Lf(x)$.

Vraag 8.11. Laat $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ een begrensde convexe functie zijn. Laat zien dat f continu is op (a,b). Hier betekent convex zijn van een functie dat hij voldoet aan

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

voor alle $x, y \in [a,b]$.

Vraag 8.12. Zij f een drie keer continu differentieerbare functie zodat $f(0) = f'(0) = 0 < f''(0)$. Zij

$$g(x) = \left[\frac{\sqrt{f(x)}}{f'(x)}\right]'$$

voor $x \neq 0$ en $g(0) = 0$. Laat zien dat g begrensd is in een omgeving van 0. Geldt dit ook als f slechts twee keer continu differentieerbaar is?

Vraag 8.13. Gegeven een differentieerbare functie $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ zodat $f(0) = 0$ en $f(x) > 0$ voor alle $x > 0$. Laat zien dat er een c bestaat zodat

$$2\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

geldt. Algemener: Voor welke constantes d is er altijd een c zodat

$$d\frac{f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

geldt?

Vraag 8.14. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een drie keer continu differentieerbare functie. Bewijs dat er een punt $a \in \mathbb{R}$ bestaat zodat

$$f(a) \cdot f'(a) \cdot f''(a) \cdot f'''(a) \geq 0.$$

Vraag 8.15. Zij $0 < c < 1$ en laat

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{c} & \text{als } x \in [0, c], \\ \frac{1-x}{1-c} & \text{als } x \in [c, 1]. \end{cases}$$

We noemen p een n-periodiek punt als n het kleinste positieve gehele getal is zodat $f^n(p) = p$, waar f^n staat voor het n keer achter elkaar toepassen van f. Bewijs dat er voor elke $n \geq 1$ een positief maar eindig aantal n-periodieke punten is.

Vraag 8.16. Laat $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ een continu differentieerbare functie zijn. Bewijs dat

$$\left| \int_0^1 f^3(x)\, dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2 .$$

Vraag 8.17 (IMC 2012)**.** Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ twee keer differentieerbaar met $f(0) = 0$. Bewijs dat er een $\xi \in (-\pi/2, \pi/2)$ bestaat zodanig dat

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\tan^2 \xi).$$

Vraag 8.18 (IMC 2005)**.** Laat $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een drie keer differentieerbare functie zijn. Bewijs dat er een reëel getal $\xi \in (-1, 1)$ moet bestaan zodanig dat

$$\frac{f'''(\xi)}{6} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} - f'(0).$$

Tegenvoorbeelden

De stelling van Darboux laat zien dat afgeleiden een beetje op continue functies lijken. Zoals bekend hebben continue functies op gesloten begrensde intervallen een maximum, maar:

Vraag 8.19. Geef een voorbeeld van een functie wier afgeleide begrensd is op een gesloten begrensd interval, maar geen maximum heeft.

We kennen allemaal de hoofdstelling van de Analyse, maar toch:

Vraag 8.20. Geef een voorbeeld van een Riemann integreerbare functie die geen afgeleide is van een andere functie.

Anderzijds ook:

Vraag 8.21. Geef een voorbeeld van een differentieerbare functie, waarvan de afgeleide niet Riemann integreerbaar is op een gesloten begrensd interval.

Hint: Geef een voorbeeld van een functie die overal differentieerbaar is maar een onbegrensde afgeleide heeft op een begrensd, gesloten interval.

Vraag 8.22. Geef een voorbeeld van een overal continue en nergens differentieerbare functie.

- Definieer een "zaagtand" functie f, die 1-periodiek is, continu, en niet differentieerbaar in 0, zeg $f(x) = |x|$ voor $|x| \leq \frac{1}{2}$.
- Bekijk de som $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} f(4^n x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.
- Laat zien dat g continu is.
- Voor elk reële getal a kiezen we $h_n = \pm 4^{-n}$ zo dat $|f_n(a + h_n) - f_n(a)| = |h_n|$ (laat zien dat dit kan).
- Bepaal nu $|f_m(a + h_n) - f_m(a)| / h_n$ voor alle m.
- Concludeer dat $|g(a + h_n) - g(a)| / h_n$ een even, dan wel oneven geheel getal is naar gelang de pariteit van n.
- Dus g is niet differentieerbaar in a.

Deze voorbeelden zijn gehaald uit: Counterexamples in Analysis, B.R. Gelbaum en J.M.H. Olmsted.

Vraag 8.23. Geef een voorbeeld van een nergens continue functie, waarvan de absolute waarde continu is.

Vraag 8.24. Geef een functie die continu is in slechts één punt.

Vraag 8.25. Geef voor een willekeurige niet-compacte verzameling D een continue onbegrensde functie f met D als domein.

Merk op dat een continue functie op een compact domein natuurlijk begrensd is.

Vraag 8.26. Geef voor een willekeurige niet-compacte verzameling D een continue, onbegrensde, lokaal begrensde functie f met D als domein.

Een functie f is locaal begrensd als voor elk punt d in zijn domein geldt dat er een omgeving van d (een open verzameling met d erin) is waarop f begrensd is.

Vraag 8.27. Geef een voorbeeld van een functie die overal eindig en locaal onbegrensd is.

Vraag 8.28. Geef voor een willekeurige niet-compacte verzameling D, een voorbeeld van een continue, begrensde functie zonder extreme waarden met D als domein.

Vraag 8.29. Geef een voorbeeld van een begrensde functie zonder locale extrema op een compact domein.

Vraag 8.30. Geef een voorbeeld van een niet-constante periodieke functie f zonder kleinste periode.

Vraag 8.31. Geef een voorbeeld van twee uniform continue functies wier product niet uniform continu is.

Het product van twee continue functies is natuurlijk wel continu.

Vraag 8.32. Geef een voorbeeld van een continue injectieve functie f gedefinieerd op een interval van $\mathbb{R}$, waarvan de inverse niet continu is.

Merk op dat als het domein van f compact is, dat de inverse dan sowieso continu is. Bovendien is f^{-1} ook continue als het bereik een deelverzameling van $\mathbb{R}$ is.

Vraag 8.33. Geef een functie die continu is in $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ en discontinu op $\mathbb{Q}$.

Vraag 8.34. Geef een functie met een dichte verzameling van discontinuïteiten die allen ophefbaar zijn.

Een dicontinuïteit a van f is ophefbaar als er een functie g bestaat met $g(x) = f(x)$ als $x \neq a$, zodat g wel continu is in a.

Vraag 8.35. Geef een voorbeeld van een monotone functie wier verzameling van discontinuiteiten een willekeurige aftelbare (eventueel dichte) verzameling is.

Vraag 8.36. Geef een voorbeeld van een functie met een dichte verzameling van continuiteitspunten en een dichte verzameling van discontinuiteitspunten, waarvan geen enkele discontinuiteit ophefbaar is.

Vraag 8.37. Geef een voorbeeld van een injectieve afbeelding tussen twee intervallen die nergens monotoon is.

Vraag 8.38. Geef een voorbeeld van een continue functie die nergens monotoon is.

Hint: Bekijk een som $\sum f_n(x)$, die absoluut convergeert, voor een goed gekozen rij van (continue) functies f_n.

Vraag 8.39. Gegeven een willekeurige gesloten verzameling C, geef een voorbeeld van een continue functie met C als verzameling van discontinuiteiten.

Hint: Bekijk de verzameling $B = \partial A \cup (A^\circ \cap \mathbb{Q})$.

Vraag 8.40. Geef een voorbeeld van een functie $f\colon [0,1] \to [0,1]$, zodat het beeld van elk niet-gedegenereerde deelinterval van $[0,1]$ onder f gelijk is aan $[0,1]$.

Merk op dat zo'n functie alle punten in het bereik oneindig vaak aanneemt.

Vraag 8.41. Een discontinue lineaire functie f. Hier betekent lineair dat f voldoet aan de vergelijking van Cauchy:

$$f(a+b) = f(a) + f(b).$$

Hint: Keuzeaxioma.

9 Goniometrische functies

Goniometrische functies die soms voorkomen bij het IMC zijn natuurlijk de sinus, cosinus en tangens, maar ook de hyperbolische functies, de cotangens en de lokale inversen van al deze functies kunnen van pas komen. Ze zijn het makkelijkst te herkennen aan de definitie mbv de e-macht, maar vergeet ook de machtreeksen niet. We zetten ze op een rij:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} & \sinh x &= \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \\
\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} & \cosh x &= \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\
\tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} & \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\
\cot x &= \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x} & \coth x &= \frac{1}{\tanh x} = \frac{\cosh x}{\sinh x}.
\end{aligned}$$

De definities van de hyperbolische functies kun je onthouden door in de definitie van de corresponderende niet-hyperbolische functie alle i-tjes weg te halen. Dan zijn er nog de inverse functies $\arcsin, \arccos$ etcetera. Houd altijd in je achterhoofd dat de sinus en de cosinus niet injectief en niet surjectief zijn: de inverse is alleen gedefinieerd op $[-1, 1]$ en als je bij een inverse 2π optelt, heb je weer een inverse. Meestal volstaat het om $\arcsin, \arccos$ te definiëren met beeld $[-\pi/2, \pi/2]$, respectievelijk $[0, \pi]$. De arctangens is wel gedefinieerd op heel $\mathbb{R}$ en men kiest meestal $[-\pi/2, \pi/2]$ voor het beeld.

Soms moet je een limiet uitrekenen waar een goniometrische functie in staat. Vaak helpt het dan om de Taylorreeks van die goniometrische functie te gebruiken. Meestal is de functie waarvan je de limiet neemt zo opgeschreven, dat je niet direct kunt zien wat het limietgedrag is, omdat er bijvoorbeeld een verschil staat van twee functies met hetzelfde begin van de Taylorreeks. Door de Taylorreeks op te schrijven, zie je wat er weg valt en hoe hoog de macht is die je overhoudt.

Onverwachte toepassingen

Sommige vragen gaan eigenlijk over goniometrische functies, maar zijn zo gesteld dat je dit niet meteen herkent. Goniometische functies komen soms van pas in de volgende situaties.

- Er zit stiekem een verdubbelingsformule (of een andere gonioformule) in de vraag verstopt. Staat er $2f(x)^2 - 1$, denk dan aan $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$. In het algemeen als er een kwadraat plus of min een getal staat, kun je soms een verdubbelingsformule gebruiken.

- Differentiaalvergelijkingen (iets met een afgeleide erin). Zeker wanneer er ergens $1 + x^2$ of iets dergelijks staat is het opletten geblazen. Onthou bijvoorbeeld dat $\tan'(x) = 1 + \tan(x)^2$ en $\arctan'(x) = 1/(1 + x^2)$.
- De formules voor goniometrische functies in termen van e-machten kunnen (naast dat ze handig zijn om de standaard gonioformules af te leiden als je die bent vergeten) ook in de vraag verwerkt zijn.

Je hoeft niet direct een formule te herkennen. Als het getal π onverwacht opduikt in de vraag, dan is dat natuurlijk een sterke hint dat er goniometrie aan te pas moet komen. Maar ook $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$, als veelvouden van de natuurlijke waarden van de sinus en cosinus, zijn 'red flags'.

Stel je herkent ergens een gonioformule; hoe pas je die dan toe? Als een functie $f(x)$ gegeven is, kun je dan bijvoorbeeld $f \circ \cos(x)$ of $\tan \circ f(x)$ beschouwen. Hetzelfde geldt voor rijtjes: bekijk dan $x_n = \sin a_n$ of iets dergelijks.

Voorbeeld 9.1. Stel dat er gegeven is een continue functie f die voldoet aan $f(2x^2-1) = 2xf(x)$ voor alle x en we moeten iets bewijzen voor f op het interval $[-1, 1]$. Deze is overduidelijk: er staat precies $2x^2 - 1$ en x moet ook nog in het interval $[-1, 1]$ liggen, het beeld van sinus en cosinus. We bekijken dus $g = f \circ \cos$ en merken op dat

$$g(2x) = 2\cos(x)g(x).$$

Omdat $\cos \mathbb{R} = [-1, 1]$ voldoet het om g te bestuderen.

Er zijn zoveel gonioformules, dat we hier niet alles kunnen opsommen. Maar het is toch goed om een aantal veel voorkomende formules te zien:

- $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$
- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
- $\cos(2x) = 2(\cos x)^2 - 1$
- $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
- $(\tan x)' = 1 + (\tan^2 x)$
- $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

Vaak kun je hierop een nuttige variant vinden, door de hyperbolische versie te nemen. Probeer dit ook eens met een aantal formules uit dit lijstje!

Opgaven

Vraag 9.1. Stel dat x een positief reëel getal is en dat $x + \frac{1}{x}$ een even geheel getal is. Laat zien dat $x^n + \frac{1}{x^n}$ ook een even geheel getal is voor alle $n \in \mathbb{N}$.
Hint: bekijk $y = \log x$.

Vraag 9.2. Bepaal de limiet

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdots \cos\frac{x}{2^n}.$$

Vraag 9.3. Stel dat voor een $x \in \mathbb{R}$ en $k \in \mathbb{N}$ geldt dat $\cosh kx$ en $\cosh(k+1)x$ rationale getallen zijn. Laat zien dat ook $\cosh x$ rationaal is.

Vraag 9.4. Zij f een continue functie op $\mathbb{R}$ die voldoet aan $f(2x^2-1) = 2xf(x)$. Laat zien dat f identiek nul is op $[-1,1]$.

Vraag 9.5. Zij $a_1 = \sqrt{5}$ en $a_{n+1} = a_n^2 - 2$. Bepaal

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{k=1}^n a_k}{a_{n+1}}.$$

Vraag 9.6 (IMC 2012)**.** Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ twee keer differentieerbaar met $f(0) = 0$. Bewijs dat er een $\xi \in (-\pi/2, \pi/2)$ bestaat zodanig dat

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\tan^2\xi).$$

Vraag 9.7. Zij $a_0 = \sqrt{2}$, $b_0 = 2$ en $a_{n+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$ en $b_{n+1} = \frac{2b_n}{2+\sqrt{4+b_n^2}}$. Laat zien dat

(a) de rijen a_n en b_n dalend zijn en naar nul convergeren,

(b) de rij $2^n a_n$ stijgend is en de rij $2^n b_n$ dalend, maar dat beide naar dezelfde limiet convergeren en dat

(c) er een constante C is zodanig dat $0 < b_n - a_n < \frac{C}{8^n}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

Hint: laat eerst zien dat $a_n = 2\sin\pi/2^{n+2}$ en vind een dergelijke formule voor b_n.

Vraag 9.8. Zij a_n een rij reële getallen met $1/2 < a_n < 1$ voor alle $n \geq 0$. Definieer een rij (x_n) door $x_0 = a_0$ en

$$x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1}x_n}.$$

Convergeert de rij altijd? Wat zijn de mogelijke waardes van $\lim_n x_n$ als die bestaat?

Vraag 9.9. Convergeert de rij $a_n = \tan(\pi\sqrt{n^2 - n})$? Zo ja, naar welke limiet?

Vraag 9.10. Bewijs de identiteit

$$\sum_{k=1}^n k\sin^2\frac{k\pi}{2n} = \frac{(n+1)^2 + \cot^2\frac{\pi}{2n}}{4}.$$

Vraag 9.11. Zij $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar zodanig dat $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$ en $f'(x) + f(x)^2 \geq -1$ voor iedere x. Laat zien dat $b - a \geq \pi$ en vind alle f die aan de voorwaarden voldoen als $b - a = \pi$.

Vraag 9.12. Zij $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ continu differentieerbaar. Bewijs dat er een $x \in (-2,2)$ is zodanig dat

$$f'(x) - f(x)^2 < 1.$$

Vraag 9.13. Laat zien dat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right)^2 = \pi.$$

Hint: reken eerst de integraal $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ *uit.*

Vraag 9.14. We bekijken rijtjes van reële getallen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die voldoen aan

$$a_n = 4a_{n-1}(1 - a_{n-1})$$

voor alle positieve gehele getallen n. Hoeveel van zulke rijtjes voldoen aan $a_{2016} = a_0$?

Vraag 9.15 (IMC 2014)**.** Definieer de functie $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Bewijs voor alle $x > 0$ reëel en n positief geheel, dat

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < \frac{1}{n+1}.$$

Hier is $f^{(n)}$ de n-de afgeleide van f.

Vraag 9.16 (IMC 2006)**.** Vergelijk $\tan(\sin x)$ en $\sin(\tan x)$ voor iedere $x \in (0, \pi/2)$ (dus bepaal welke de grootste is).

Vraag 9.17. Voor twee positieve gehele getallen m en n, bepaal

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{1/m} - (\cos x)^{1/n}}{x^2}.$$

Vraag 9.18. Bepaal

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{\arcsin(\arctan x) - \arctan(\arcsin x)}.$$

10 Functievergelijkingen

Waardes invullen

Bij functievergelijkingen hebben we een vergelijking waaraan een functie moet voldoen en willen we wat te weten te komen van deze functie. Een methode om zo'n probleem op te lossen is om te proberen door goede dingen in te vullen meerdere uitdrukkingen voor hetzelfde te krijgen. In het voorbeeld doen we dat eerst door meerdere keren $f(0)$ te krijgen en daarna door $y = x$ in te vullen om meerdere keren $f(x)$ te krijgen.

Voorbeeld 10.1 (De vergelijking van Cauchy)**.** Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ die voldoen aan

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \tag{10.1}$$

Bewijs. We vullen $x = y = 0$ is en krijgen $f(0) = 2f(0)$, dus $f(0) = 0$. Met $y = -x$ volgt dat $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, ofwel dat f oneven is. Vervolgens bewijzen we met inductie (naar n) dat $f(nx) = nf(x)$ voor $n \in \mathbb{N}$. De inductiestap is hier verkregen door $y = (n-1)x$ in te vullen zodat $f(nx) = f((n-1)x) + f(x) = (n-1)f(x) + f(x) = nf(x)$ als we weten dat $f((n-1)x) = (n-1)f(x)$.

Wegens onevenheid van f geldt nu zelfs dat $f(nx) = nf(x)$ voor $n \in \mathbb{Z}$. Voor $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ hebben we dan $qf(\frac{p}{q}) = f(q\frac{p}{q}) = f(p) = pf(1)$, dus $f(\frac{p}{q}) = \frac{p}{q}f(1)$. Voor alle $q \in \mathbb{Q}$ hebben we dus laten zien dat $f(q) = qf(1)$, dus de enige mogelijke oplossingen zijn $f(x) = cx$. Nu controleren we nog dat $f(x) = cx$ ook inderdaad een oplossing is voor alle $c \in \mathbb{Q}$, maar dat volgt meteen uit het invullen in (10.1), want voor deze f geldt $f(x+y) = c(x+y) = cx + cy = f(x) + f(y)$. $\square$

Herhaald invullen

In het bijzonder kan het handig zijn om een bepaalde uitdrukking herhaald in te vullen en alle gevonden vergelijkingen samen te beschouwen. De vorm van de functievergelijking waar je mee begint verraadt soms al wat je in kunt vullen.

Voorbeeld 10.2. Bepaal alle functies $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zodanig dat voor alle $z \in \mathbb{C}$

$$f(z) + zf(1-z) = 1 + z.$$

Bewijs. Het ligt voor de hand om nu $1 - z$ in te vullen. Dat geeft

$$f(1-z) + (1-z)f(z) = 2 - z,$$

waaruit we vinden dat $f(1-z) = 2 - z + (z-1)f(z)$. Dit kunnen we weer invullen in de vergelijking waar we mee begonnen. Dat levert

$$f(z) + z(2 - z + (z-1)f(z)) = 1 + z,$$

van waaruit we $f(z)$ direct kunnen oplossen. $\square$

Differentiaalvergelijkingen

Een andere manier is om te proberen door in de goede vergelijking te differentiëren een differentiaalvergelijking te krijgen die je kunt oplossen. Let op dat je wel moet weten (of bewijzen) dat je mag differentiëren (al kun je het gewoon doen zonder dat je weet of het mag om een idee te krijgen). De oplossing van de simpelste differentiaalvergelijking kan daarbij van pas komen:

$$\text{als } f(x) = f'(x) \text{ dan is } f(x) = ce^x$$

voor een zekere constante c. Ook is het goed om te herkennen dat voor een positieve functie f geldt dat

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Soms moet je de vergelijking manipuleren om op iets te komen waarvan de afgeleide "mooi" is.

Voorbeeld 10.3. Zij $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een twee keer differentieerbare functie die voldoet aan

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x),$$

voor een $g(x) \geq 0$ en alle $x \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $|f(x)|$ begrensd is.

Bewijs. Door met $f'(x)$ te vermenigvuldigen staat links bijna de afgeleide van $f(x)^2 + f'(x)^2$. In het bijzonder zien we dat

$$\begin{aligned}\left[f(x)^2 + f'(x)^2\right]' &= 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x)\\ &= 2f'(x)(f(x) + f''(x)) = -2xg(x)f'(x)^2,\end{aligned}$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Nu is de rechterkant hiervan negatief voor positieve x en positief voor negatieve x (want $g(x) > 0$ en $f'(x)^2 \geq 0$. We zien dus dat $f(x)^2 + f'(x)^2$ een absoluut maximum heeft in 0. Dus in het bijzonder is $f(x)^2 \leq f(x)^2 + f'(x)^2 \leq f(0)^2 + f'(0)^2$ en dus is $|f(x)|$ begrensd. $\square$

Opgaven

Vraag 10.1. Bewijs dat $f(n) = 1 - n$ de enige functie $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ is die voldoet aan

1) $f(f(n)) = n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$;

2) $f(f(n+2)+2) = n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$;

3) $f(0) = 1$.

Vraag 10.2. Vind alle reëelwaardige continu differentieerbare functies f op $\mathbb{R}$ zodat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt

$$f(x)^2 = \int_0^x f(t)^2 + f'(t)^2 \, dt + 1990.$$

Vraag 10.3. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodanig dat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)).$$

Vraag 10.4. Voor welke $k \in \mathbb{R}$ is er een continue functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat $f(f(x)) = kx^9$.

Vraag 10.5. Vind alle functies $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ die voldoen aan

$$f(x)f(yf(x)) = f(x + y)$$

voor alle $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

Vraag 10.6. Vind alle continue functies $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x.$$

Vraag 10.7. Stel $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zijn niet-constante differentieerbare functies die voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ voldoen aan

$$f(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y), \qquad g(x + y) = f(x)g(y) + g(x)f(y).$$

Als $f'(0) = 0$ bewijs dan dat $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Vraag 10.8. Gegeven een continue functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die voldoet aan

$$f(2x - f(x)) = x.$$

Als gegeven is dat f een vast punt heeft, laat dan zien dat $f(x) = x$. Wat gebeurt er als f nu geen vast punt heeft?

Vraag 10.9. Vind de verzameling reële getallen k zodat voor alle positieve differentieerbare functies f die voldoen aan $f'(x) > f(x)$ voor alle x er een getal N is zodat $f(x) > e^{kx}$ voor alle $x > N$.
Hint: Denk aan de logaritmische afgeleide.

Vraag 10.10 (Droom van de Calculusstudent, LIMO 2012)**.** In deze opgave werken we met functies $f, g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ die beide minstens één keer continu differentieerbaar zijn. Voor sommige calculusstudenten gelden soms hele simpele rekenregels, die in werkelijkheid vaak lastiger zijn. Wij gaan verkennen wanneer deze regels toch gelden.

(a) Vind een niet-triviale oplossing van

$$(f+g)^2 = f^2 + g^2$$

De triviale oplossingen zijn die oplossingen waar f danwel g constant 0 is.

(b) Laat zien dat als de vergelijking uit vraag (a) geldt, dat dan ook

$$(fg)' = f'g'.$$

(c) Vind niet-triviale functies f en g die voldoen aan zowel de vergelijking uit vraag (b) als aan

$$\int f \int g = \int (fg),$$

waar $\int h$ de primitieve van de functie h voorstelt.

Vraag 10.11 (Mike Daas)**.** Vind alle differentieerbare functies f en g zodanig dat $f(x)g(x) = x^2$ en voor alle $x \in \mathbb{R}$ en $f'g'$ constant is.

Vraag 10.12. Bepaal alle differentieerbare functies $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ waarvoor er een positief reëel getal a bestaat zodat $f'(a/x) = x/f(x)$ voor alle $x > 0$.

Vraag 10.13. Zij f een continue functie die voldoet aan $f(2x^2-1) = 2xf(x)$ voor alle x. Laat zien dat $f(x) = 0$ voor $x \in [-1,1]$. *Hint: Aan welke gonioformule doet dit je denken?*

Vraag 10.14. Vind alle strikt monotone functies $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ die voldoen aan $f\left(\frac{x^2}{f(x)}\right) = x$ voor alle $x > 0$.

Vraag 10.15. Zij $c > 0$. Bepaal (i.e. beschrijf) alle continue functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die voldoen aan $f(x) = f(x^2+c)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Vraag 10.16 (IMC 1999)**.** Laat zien dat er geen functies $f\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$ bestaan zodat

$$f(x)^2 \geq f(x+y)(f(x)+y)$$

voor alle $x, y > 0$.

Vraag 10.17 (IMC 2018)**.** Vind alle differentieerbare functies $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ zodat

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\sqrt{ab})$$

voor alle $a, b > 0$.

Vraag 10.18. Zij $a, b \in (0, 1/2)$ en laat g een continue functie zijn die voldoet aan $g(g(x)) = ag(x) + bx$ voor alle reële x. Bewijs dat $g(x) = cx$ voor een zekere constante c.

Vraag 10.19 (IMC 2012)**.** Gegeven is een continu differentieerbare functie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat $f'(t) > f(f(t))$ voor alle $r \in \mathbb{R}$. Bewijs dat $f(f(f(t))) \leq 0$ voor alle $t \geq 0$.

Overig

11 Getaltheorie

Priemfactorisatie

Een hele belangrijke methode bij getaltheorieopgaven is het vinden van de juiste ontbinding. Bij olympiadeachtige opgaven is dit nog meer zo dan in het "echt", aangezien je met een goede ontbinding vaak heel vreemd uitziende uitspraken heel makkelijk kunt bewijzen.

Voorbeeld 11.1. Zij $p > 3$ een priemgetal. Laat zien dat $p^2 - 1$ deelbaar is door 24.

Bewijs. De priemfactorisatie van $24 = 2^3 \cdot 3$, dus we moeten laten zien dat $p^2 - 1$ drie keer deelbaar is door 2 en één keer door 3. Merk nu op dat $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$ en dat $p - 1$ en $p + 1$ even getallen zijn. Daaruit volgt al dat $p^2 - 1$ deelbaar is door 4. Maar één van twee opeenvolgende even getallen is deelbaar door 4, dus is $p^2 - 1$ zelfs deelbaar door 8. Verder is één van de drie opeenvolgende getallen $p - 1, p, p + 1$ deelbaar door 3. Dat is niet p, want p is priem en $p > 3$. Dus is $p - 1$ of $p + 1$ deelbaar door 3, en dus $p^2 - 1$. Er volgt dat $3 \cdot 8 = 24$ een deler is van $p^2 - 1$. □

Belangrijk is het feit dat elk getal een unieke priemfactorisatie heeft. Je kunt dus zien of twee getallen aan elkaar gelijk zijn door te controleren dat ze door elk priemgetal even vaak gedeeld worden en omgekeerd. Eventueel kun je aan beide kanten door eenzelfde factor delen zodat je kunt aannemen dat twee getallen in een vergelijking onderling ondeelbaar zijn.

Modulorekenen

Modulorekenen is ook een handig hulpmiddel bij getaltheorieopgaven. Rekenen modulo een getal n betekent in feite dat je kijkt naar de groep $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ of $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Dat x deelbaar is door n is immers hetzelfde als zeggen dat $x \equiv 0 \mod n$, ofwel $[x] = 0 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ook is bijvoorbeeld $x^k - 1$ deelbaar door een getal n dan en slechts dan als de orde van $[x]$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ het getal k deelt. Herinner je immers de volgende stelling.

Stelling 11.2 (Lagrange)**.** *Als G een groep is en $g \in G$, dan deelt de orde van het element g de orde van de groep G.*

De orde van $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ wordt gegeven door de Euler-phi functie $\phi(n)$. De formule voor $\phi(n)$ wordt gegeven door

$$\phi(n) = n \prod_{p|n} \frac{p-1}{p}.$$

Het is goed om te onthouden dat $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ als p een priemgetal is en dat $\phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$ als $\text{ggd}(n, m) = 1$.

Voorbeeld 11.3. Bewijs dat voor geen enkele $n > 1$ geldt dat n een deler is van $2^n - 1$.

Bewijs. Stel dat n wel $2^n - 1$ deelt. Het is duidelijk dat n dan oneven moet zijn, omdat $2^n - 1$ dat is. Zij p nu het kleinste priemgetal dat n deelt. Omdat $p \neq 2$, is $\text{ggd}(2, p) = 1$, dus $2 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$. We zien dat $2^n \equiv 1 \mod p$, dus de orde van 2 in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ deelt n. Maar die orde deelt ook de orde van de groep, en dat is $\phi(p) = p - 1$. De orde van 2 in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ is duidelijk groter dan 1, dus we zien dat dat $\text{ggd}(n, p - 1) > 1$. Dit betekent dat n een priemdeler heeft kleiner dan p. Een tegenspraak, dus n deelt niet $2^n - 1$. $\square$

De volgende stellingen volgen uit de stelling van Lagrange, maar zijn goed om apart te onthouden.

Stelling 11.4 (Kleine Stelling van Fermat)**.** *Zij p een priemgetal en $a \in \mathbb{Z}$ zodanig dat p niet a deelt. Dan geldt er dat*

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p.$$

Als p wel a deelt, dan is $a \equiv 0 \mod p$ en vinden we het volgende.

Stelling 11.5. *Zij p een priemgetal en $a \in \mathbb{Z}$. Dan geldt er dat*

$$a^p \equiv a \mod p.$$

Stelling 11.6 (Euler)**.** *Als* $\text{ggd}(a, n) = 1$*, dan is*

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n.$$

Vaak helpt het om niet modulo een geheel getal n te kijken, maar modulo de verschillende priemmachten in de factorisatie van n. De Chinese Reststelling helpt hierbij.

Stelling 11.7 (Chinese Reststelling)**.** *Zij $m, n \in \mathbb{Z}$ met* $\text{ggd}(m, n) = 1$*. Dan geeft de afbeelding gegeven door* $(a \mod mn) \mapsto (a \mod n, a \mod m)$ *aanleiding tot groepsisomorfismes*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \text{ en } (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \simeq (\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z})^\times.$$

Opgaven

Vraag 11.1. Vind alle paren $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ zodanig dat

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}.$$

Vraag 11.2. Vind alle $n \in \mathbb{Z}$ zodat $n^2 + 1$ deelbaar is door $n + 1$.

Vraag 11.3. Vind alle rechthoekige driehoeken zodanig dat de lengte van de zijden een rekenkundige progressie vormen. (Een rekenkundige of arithmetische progressie is als je een rijtje $a_0, \ldots, a_n$ hebt met de eigenschap dat voor een vaste k, voor alle $i < n$ geldt $a_{i+1} - a_i = k$.)

Vraag 11.4. Laat a, b positieve gehele getallen zijn. Bewijs dat

$$\{xa + yb \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \mathrm{ggd}(a, b)\mathbb{Z}.$$

Vraag 11.5. Vind alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat de volgende implicatie geldt: als $a, b \in \mathbb{Z}$ en $11 \mid a^n + b^n$, dan $11 \mid a$ en $11 \mid b$.

Vraag 11.6. Bewijs dat elk samengesteld getal geschreven kan worden in de vorm $xy + yz + zx + 1$ voor zekere positieve gehele getallen x, y en z.

Vraag 11.7. Hoeveel priemgetal bestaan er die geschreven kunnen worden als een rijtje om en om 1 en 0, dus van de vorm $101 \cdots 01$? *Hint: Schrijf zo'n getal uit als som van machten van 100 en gebruik de meetkundige reeks.*

Vraag 11.8. Bewijs dat

$$\frac{ggd(m, n)}{n}\binom{n}{m}$$

geheel is voor alle $n \geq m \geq 1$.

Vraag 11.9. Bewijs dat er oneindig veel n bestaan zodat zowel n, $n + 1$ als $n + 2$ te schrijven zijn als som van twee kwadraten.

Vraag 11.10. Laat zien dat voor elk positief geheel getal n geldt

$$n! = \prod_{i=1}^{n} kgv(1, 2, \ldots, \lfloor n/i \rfloor).$$

Vraag 11.11. Laat zien dat er geen $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ bestaan zodanig dat

$$x^2 + 10y^2 = 3z^2.$$

Vraag 11.12. Gegeven $m \in \mathbb{N}$ bepaal alle drietallen (n, x, y) van positieve gehele getallen, met $ggd(n, m) = 1$ die voldoen aan

$$(x^2 + y^2)^m = (xy)^n.$$

Vraag 11.13. Zij p een oneven priemgetal en schrijf

$$F(n) = 1 + 2n + 3n^2 + \cdots + (p - 1)n^{p-2}.$$

Bewijs dat $F \colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ een injectieve functie is.

Vraag 11.14. Vind alle priemgetallen p zodat er priemgetallen q en q', en r en r' zijn met $p = q + q' = r - r'$.

Vraag 11.15. Bewijs dat elk priemgetal van de vorm $4k + 1$ de lengte is van de hypothenusa van een rechthoekige driehoek met gehele rechthoekszijdes.

Vraag 11.16. Zij S de verzameling rationale getallen verschillend van $\{-1, 0, 1\}$. Definieer $f\colon S \to S$ door $f(x) = x - 1/x$. Bewijs of ontkracht dat

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} f^n(S) = \emptyset,$$

waarbij f^n voor de n-voudig geïtereerde van f staat.

Vraag 11.17. Bewijs dat er unieke gehele getallen a en n bestaan zodat $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$.

Vraag 11.18. Bewijs dat $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$ geen oplossingen heeft met p, q, r, s, t priem.

Vraag 11.19. Bewijs dat $x^5 = 3 \mod 11$ geen oplossingen heeft.

Vraag 11.20. Vind de 3 laatste cijfers van 13^{1010}.

Vraag 11.21 (IMC 2013)**.** Gegeven zijn positieve gehele getallen p, q die relatief priem zijn. Bewijs dat

$$\sum_{k=0}^{pq-1} (-1)^{\lfloor k/p \rfloor + \lfloor k/q \rfloor} = \begin{cases} 0 & \text{als } pq \text{ even is,} \\ 1 & \text{if } pq \text{ oneven is.} \end{cases}$$

Vraag 11.22. Definieer een rij door $a_0 = 1$ en $a_{2n+1} = a_n$ en $a_{2n+2} = a_n + a_{n+1}$ voor $n \geq 0$. Bewijs dat elk rationaal getal voorkomt in de verzameling

$$\left\{ \frac{a_{n-1}}{a_n} \;\middle|\; n \geq 1 \right\} = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \dots \right\}.$$

Vraag 11.23 (IMC 2012)**.** We bekijken positieve gehele getallen n waarvoor $n! + 1$ een deler is van $(2012n)!$. Bepaal of er oneindig veel van zulke getallen bestaan.

Vraag 11.24. Schrijf drie, niet noodzakelijk verschillende, positieve gehele getallen op het bord. Je mag steeds twee van de getallen, zeg x en y met $x \leq y$, uitvegen en vervangen door $2x$ en $y - x$. Bewijs dat je ervoor kan zorgen dat je 0 op het bord mag schrijven.

Vraag 11.25. Bewijs dat voor alle gehele getallen a, b en c er een positieve, gehele n is waarvoor $n^3 + an^2 + bn + c$ geen kwadraat is.

Vraag 11.26. Zij S een eindige verzameling gehele getallen groter dan 1. Stel dat voor elk gehele getal n er een $s \in S$ is zodat $ggd(s, n) = 1$ of $ggd(s, n) = s$. Bewijs dat er $s, t \in S$ bestaan zodat $ggd(s, t)$ priem is.

12 Polynomen

Introductie

Een polynoom is een eindige som van *monomen*, termen van de vorm ax^n, met $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ en waar a uit verschillende verzamelingen kan komen, hier alleen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ of $\mathbb{C}$. Je kan met polynomen rekenen als met gehele getallen: je kan optellen, aftrekken en vermenigvuldigen. Ook kun je delen met rest.

Stelling 12.1 (deling met rest)**.** *Laat $p(x)$ en $g(x)$ twee (complexe) polynomen zijn. Dan zijn er unieke polynomen $q(x)$ en $r(x)$ zodanig dat $\deg(r) < \deg(g)$ en*

$$p(x) = q(x)g(x) + r(x).$$

Net zoals met gehele getallen, kun je de polynomen $q(x)$ en $r(x)$ bepalen door te staartdelen.

Het equivalent van priemgetallen voor polynomen zijn de lineaire factoren $(x - a)$. De hoofdstelling van de algebra zegt dat elk polynoom met coefficienten in $\mathbb{C}$ (en dus ook met coefficienten in $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ of $\mathbb{Z}$) een unieke ontbinding heeft in de vorm $p(x) = c\prod_{j=1}^{n}(x - a_j)$, op permutaties van de a_j na. Uit deze ontbinding kun je meteen de nulpunten van het polynoom vinden, namelijk de a_j. Deze expansie expliciet invullen kan vaak veel informatie over een polynoom geven. Anderzijds kun je gegeven de nulpunten dus makkelijk het polynoom maken.

Het verband tussen de coefficienten van een polynoom $p(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n$ (dus de coefficient voor x^n is 1) en de nulpunten wordt gegeven door symmetrische polynomen, namelijk

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= -\sum_{j=1}^{n} a_j, \\
b_{n-2} &= \sum_{1\leq j<k\leq n} a_j a_k \\
b_{n-3} &= -\sum_{1\leq j<k<l\leq n} a_j a_k a_l \\
&\ \vdots \\
b_0 &= (-1)^n a_1 a_2 \cdots a_n,
\end{aligned}$$

waar de a_j de n nulpunten weergeven.

De volgende stelling volgt direct uit de hoofdstelling van de algebra, maar is toch goed om een keer gezien te hebben.

Stelling 12.2 (Bezout)**.** *Als p een polynoom is met coëfficienten in $\mathbb{C}$ en $b \in \mathbb{C}$, dan is $x - b$ een factor van $p(x) - p(b)$.*

In het bijzonder zien we, wanneer p gehele coëfficiënten heeft en $a, b \in \mathbb{Z}$, dat $a - b$ altijd een deler is van $p(a) - p(b)$.

Nulpunten en de afgeleide

Een handig feitje om te weten over nulpunten, is dat ze bij polyomen met reële coëfficiënten in paren komen.

Stelling 12.3. *Als $p(x)$ een reëel polynoom is en $\alpha \in \mathbb{C}$, dan is $p(\alpha) = 0$ dan en slechts dan als $p(\overline{\alpha}) = 0$.*

Deze 'stelling' zie je in door simpelweg de hele uitdrukking $p(\alpha) = 0$ complex te conjungeren.

Verder geeft de hoofdstelling van de algebra aanleiding tot de volgende definitie.

Definitie 12.4. Een nulpunt α van een polynoom p met complexe coëfficiënten heeft *multipliciteit* k als er $c \in \mathbb{C}$ en nulpunten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ zijn zodat

$$p(x) = c(x - \alpha)^k \prod_{j=1}^{n} (x - a_j)$$

en alle a_j ongelijk zijn aan α. Anders gezegd, de factor $x - \alpha$ komt precies k keer voor.

Behalve algebraische objecten zijn polynomen ook functies doordat je getallen erin in kunt vullen. In het bijzonder kun je ze differentiëren. Met behulp van de productregel vind je de volgende gelijkheid.

Stelling 12.5. *Zij $p(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ een polynoom met complexe coëfficiënten (en nulpunten). Dan geldt er*

$$p'(x) = p(x) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - a_i}.$$

Door te delen door $p(x)$ vinden we een uitdrukking voor $p'(x)/p(x)$. Dit wordt ook wel de *logaritmische afgeleide* van p genoemd, omdat $p'(x)/p(x) = (\log p(x))'$ wanneer $\log p(x)$ bestaat. We zien met deze stelling bovendien het volgende.

Stelling 12.6. *Als α een nulpunt is van p met multipliciteit $k > 0$, dan is α een nulpunt van p' met multipliciteit $k - 1$.*

Door $k = 2$ te nemen, zien we bijvoorbeeld dat α een nulpunt is van p' wanneer α een dubbel nulpunt is van p. Het omgekeerde is ook waar: als α een nulpunt is van p en p', dan is het een dubbel nulpunt van p. Op deze manier geeft p' dus informatie over de nulpunten van p.

Voorbeeld 12.7. Zij p een complex polynoom van graad n. Laat zien dat er ten minste $n+1$ verschillende $z \in \mathbb{C}$ zijn zodat $p(z) = 0$ of $p(z) = 1$.

Bewijs. We moeten dus laten zien dat het $2n$-degraads polynoom $q(z) = p(z)(p(z) - 1)$ ten minste $n+1$ verschillende nulpunten heeft. Natuurlijk kunnen we net zo goed aantonen dat $q(z)$ ten hoogste $n-1$ meervoudige nulpunten heeft, geteld met multipliciteit. We berekenen de afgeleide:

$$q'(z) = p'(z)(p(z) - 1) + p(z)p'(z) = p'(z)(p(z) + p(z) - 1).$$

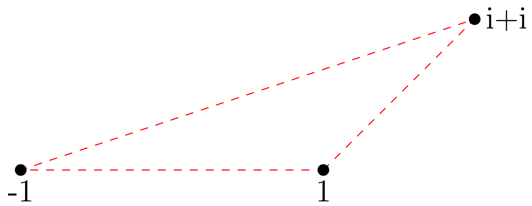
Stel dat α een nulpunt is van q met multipliciteit k. Dan is $p(z) = 0$ of $p(z) = 1$ en dus is $p(z) + p(z) - 1 \neq 0$. Daaruit zien dat de multipliciteit van α als nulpunt van q' gelijk is aan de multipliciteit als nulpunt van p'. Maar p' heeft graad $n-1$ en dus ook $n-1$ nulpunten. We zien dat het aantal meervoudige nulpunten van q, geteld met multipliciteit, dus ten hoogste $n-1$ is. Anders gezegd, q heeft $n+1$ verschillende nulpunten. $\square$

Andersom geven de nulpunten van p ook informatie over die van p'.

Stelling 12.8 (Gauss-Lucas)**.** *Zij f een polynoom met coëfficiënten in $\mathbb{C}$. Dan liggen alle nulpunten van f' in $\mathbb{C}$ binnen het* convexe omhulsel *van de nulpunten van f.*

Het convexe omhulsel van een stel punten in $\mathbb{C}$ is het kleinste convexe polygoon dat al die punten omvat. Formeel gezien is het convexe omhulsel van de punten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in $\mathbb{C}$ de verzameling van alle punten $\sum_{i=1}^{n} p_i \alpha_i$, waar alle $p_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ en $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Voorbeeld 12.9. Het convexe omhulsel van de punten $1, 2+i$ en -1 is de driehoek die deze punten verbindt.



Figuur 12.1: Het convexe omhulsel van de punten 1,-1 en $1+i$.

Lagrange-polynomen

We hebben al gezien dat een polynoom van graad n vastligt op vermeningvuldiging met een constante na, als je alle n (niet noodzakelijk verschillende) nulpunten van het polynoom kent. Iets degelijks bestaat ook als je niet per se nulpunten maar andere waarden van een polynoom weet.

Stelling 12.10. *Stel $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ zijn verschillende getallen en $y_0, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$, dan is er een uniek polynoom p van graad n met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ zodat $p(x_i) = y_i$ voor alle $0 \leq i \leq n$. Dit polynoom wordt gegeven door*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Deze uitdrukking wordt het Lagrange-polynoom genoemd.

Het gedrag van een polynoom

Polynomen hebben altijd een kenmerkende grafiek. Er zijn nulpunten, maximaal n, en er zijn maxima en minima, maximaal $n-1$. De middelbareschooltrucjes om maxima en minima te bepalen werken nog steeds, maar houd er rekening mee dat $p'(a) = 0$ niet per se betekent dat a ook een extreem punt is.

Het is vaak ook handig om te kijken naar het limietgedrag van polynomen in oneindig, wat gegeven wordt door de term in het polynoom met de hoogste graad.

Tenslotte kun je de verzameling polynomen ook nog als (oneindigdimensionale) vectorruimte zien, met als basisvectoren de monomen 1, x, x^2, enzovoorts. Als je dan naar polynomen met een gegeven hoogste graad n kijkt, vormen die een gewone vectorruimte van graad $n+1$ en kun je daar allerlei lineaire algebra toepassen.

Opgaven

Vraag 12.1. Zij $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ een polynoom met complexe coëfficienten en complexe nulpunten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, waarvan alleen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ongelijk aan nul zijn. Wat zijn de coëfficiënten van het polynoom met alleen de nulpunten $1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_k$?

Vraag 12.2 (Mike Daas)**.** Bepaal alle polynomen P en Q zodanig dat

$$|P'Q| = |PQ'|.$$

Vraag 12.3. Bewijs de Stelling van Gauss-Lucas.
Hint: Gebruik Stelling 12.5.

Vraag 12.4. Bewijs de volgende sterkere versie van Gauss-Lucas:
Zij $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ een globale analytische functie (te schrijven als machtreeks die overal in $\mathbb{C}$ gedefinieerd is). Alle nulpunten van f' liggen in het convexe omhulsel van nulpunten van f.

Vraag 12.5. Vind alle polynomen p van graad $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ waarvoor geldt dat

$$np(x)p''(x) = (n-1)p'(x)^2 \quad \text{voor alle } x.$$

Vraag 12.6. Vind alle reële polynomen p van graad $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ die voldoen aan de vergelijking

$$(n-2)p'(x)p''(x) = np(x)p'''(x) \quad \text{voor alle } x.$$

Vraag 12.7. Zij

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

een polynoom met coëfficiënten in $\mathbb{C}$ en nulpunten op de eenheidscirkel. Bewijs dat

$$|a_1| \leq |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_2|\,.$$

Vraag 12.8. Zij p een polynoom van graad 2013 zodat $p(n) = \frac{n}{n+1}$ voor alle $n \in \{0, 1, 2, \ldots, 2013\}$. Wat is $p(2014)$?
Hint: Vind eerste een polynoom $q(x)$ zodat de conditie $p(n) = \frac{n}{n+1}$ zich vertaalt naar $q(n) = 0$.

Vraag 12.9. Laat zien dat er geen niet-constant polynoom $p(x)$ bestaat zodanig dat $p(n)$ priem is voor alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
Hint: laat eerst zien dat de coefficiënten van p in $\mathbb{Q}$ liggen.
In een simpelere versie van de vraag mag je aannemen dat p gehele coëfficiënten heeft.

Vraag 12.10. Zij $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ een polynoom met gehele coëfficiënten. We kunnen f nu ook zien als functie op $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ volgens $\overline{n} \mapsto \overline{f(n)}$. Overtuig jezelf dat dit goed gedefinieerd is, en laat zien dat er oneindig veel priemgetallen p zijn zodat f een nulpunt heeft in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ als we de functie zo interpreteren.

Vraag 12.11. Laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positieve reële getallen zijn. Bewijs dat het polynoom

$$p(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \ldots - a_n$$

een uniek positief nulpunt heeft.

Vraag 12.12 (IMC 2014, vraag 3)**.** Zij n een positief geheel getal. Laat zien dat er positieve reële getallen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bestaan zodanig dat voor iedere keuze van de tekens het polynoom

$$\pm a_n x^n \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm \cdots \pm a_1 x \pm a_0$$

n verschillende reële nulpunten heeft.
Hint: Gebruik inductie.

Vraag 12.13. Vind een niet-nul polynoom $P(x, y)$ zodat $P(\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor) = 0$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.

Vraag 12.14. Zij k het kleinste positieve getal waarvoor er verschillende gehele getallen $m_1, m_2, \ldots, m_5$ bestaan zodat

$$p(x) = (x - m_1)(x - m_2)(x - m_3)(x - m_4)(x - m_5)$$

precies k niet-nul coefficienten bevat. Bepaal een verzameling $m_1, \ldots, m_5$ waarvoor dit minimum behaald wordt.

Vraag 12.15. Zij p een complex polynoom van graad minstens 3 zodat p' meer dan één nulpunt heeft. Bewijs dat

$$\inf_{r\in\mathbb{R}} \max\{|z-w| \mid p(z)=p(w)=r\} > 0.$$

Vraag 12.16. Vind de minimale waarde van

$$\frac{(x+1/x)^6-(x^6+1/x^6)-2}{(x+1/x)^3+(x^3+1/x^3)}$$

voor $x>0$.

Vraag 12.17. Zij $n\in\mathbb{N}$, definieer $f(n)=1!+2!+\cdots+n!$. Vind polynomen $P(x)$ en $Q(x)$ zodat

$$f(n+2)=P(n)f(n+1)+Q(n)f(n)$$

voor alle $n\geq 1$.

Vraag 12.18. Bestaan er polynomen $a(x), b(x), c(y), d(y)$ zodat

$$1+xy+x^2y^2=a(x)c(y)+b(x)d(y)?$$

Vraag 12.19. Zij $p(x)=x^5+x$ en $q(x)=x^5+x^2$. Vind alle paren $w,z\in\mathbb{C}$ met $w\neq z$ zodat $p(w)=p(z)$ en $q(w)=q(z)$.

Vraag 12.20. Zij $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ een functie zodat $f(x)^n$ een polynoom is voor alle $n\geq 2$. Volgt dat f zelf ook een polynoom is?

Vraag 12.21. Zij $p(x)$ een polynoom dat niet-negatief is voor alle reële x. Bewijs dat voor een zekere k er polynomen $f_1,\ldots,f_k$ zijn, zodat

$$p(x)=\sum_{j=1}^{k} f_j(x)^2.$$

Vraag 12.22. Vind alle polynomen $p(x)$ van graad $n\geq 2$ waarvoor er reële getallen $r_1<r_2<\cdots<r_n$ bestaan met $p(r_i)=0$ $(1\leq i\leq n)$ en $p'((r_i+r_{i+1})/2)=0$ $(1\leq i\leq n-1)$.

Vraag 12.23. Zij

$$f(z)=az^4+bz^3+cz^2+dz+e=a(z-r_1)(z-r_2)(z-r_3)(z-r_4)$$

met $a,b,c,d,e\in\mathbb{Z}$ en $a\neq 0$. Laat zien dat als $r_1+r_2\in\mathbb{Q}$ en $r_1+r_2\neq r_3+r_4$, dan is $r_1r_2\in\mathbb{Q}$.

Vraag 12.24. Bestaat er een oneindige rij $a_0,a_1,\ldots$ van niet-nul reële getallen zodat voor $n\geq 1$ de polynomen

$$p_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

precies n verschillende reële nulpunten hebben?

Vraag 12.25. Laat $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ een polynoom zijn met reële coefficienten a_i. Definieer

$$\Gamma(p) = a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_n^2.$$

Laat $f(x) = 3x^2 + 7x + 2$. Vind een polynoom $g(x)$ met reële coefficienten zodat $g(0) = 1$ en $\Gamma(g^n) = \Gamma(f^n)$ voor alle n.

Vraag 12.26. Laat zien dat er voor elk positief geheel getal n er een N bestaat zodat het product $x_1 x_2 \cdots x_n$ uitgedrukt kan worden als

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \sum_{i=1}^{N} c_i (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n)^n,$$

waar de c_i rationale getallen zijn en elke a_{ij} een van de getallen -1, 0 en 1 is.

Vraag 12.27 (IMC 2006)**.** Laat f een rationale functie zijn (dat wil zeggen: een quotiënt van twee reële polynomen), en veronderstel dat $f(n) \in \mathbb{Z}$ voor oneindig veel gehele getallen n. Bewijs dat f zelf een polynoom is.

13 Ongelijkheden

Opgaven over ongelijkheden komen regelmatig voor op de LIMO en IMC. Soms is de opgave zelf een ongelijkheid, soms vormen de ongelijkheden alleen een deel van het bewijs (bijvoorbeeld om een afschatting te maken). Om een dergelijke opgave aan te pakken, helpt het om een aantal standaardongelijkheden te kennen die je op weg kunnen helpen. Ook is het nuttig in het oog te houden voor welke waarden van een parameter je de ongelijkheid wil bewijzen, en wanneer er eventueel gelijkheid zou kunnen optreden.

De meest bekende ongelijkheid, waar vele andere ongelijkheden uit kunnen worden afgeleid, is

$$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Gelijkheid geldt dan en slechts dan als $x = 0$.

Om nieuwe ongelijkheden uit deze ongelijkheid af te leiden, kun je gebruik maken van een aantal rekenregels: Ten eerste mag je aan beide kanten van een ongelijkheid hetzelfde getal optellen, om een nieuwe ongelijkheid te krijgen. Ook mag je een ongelijkheid links en rechts met een positief getal vermenigvuldigen. Met een negatief getal (of een negatieve uitdrukking) vermenigvuldigen mag ook, maar dan draait het teken van de ongelijkheid om.

Wanneer je twee ongelijkheden hebt, mag je deze ook bij elkaar optellen (zolang de tekens maar dezelfde kant opstaan). Als alle termen in de ongelijkheden positief zijn, mag je ze bovendien ook met elkaar vermenigvuldigen. In het bijzonder mag je een ongelijkheid tussen positieve uitdrukkingen kwadrateren.

Tenslotte kun je een niet-dalende functie op een ongelijkheid toepassen. Als $A, B \in \mathbb{R}$, $A < B$ en $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een niet-dalende functie is, dan geldt $f(A) \leq f(B)$. Als f strikt stijgend is, geldt zelfs dat $f(A) < f(B)$. Veel van de bovenstaande rekenregels zijn toepassingen van dit idee. Voor de functie f worden ook vaak de functies e^x of $\log x$ gebruikt. Deze functies komen goed van pas wanneer je van een product een som wil maken, of juist andersom.

Bij het bewijzen van ongelijkheden is het vaak handig om van achter naar voren te werken. Je begint met de te bewijzen ongelijkheden, en probeert daarvandaan naar een bekende ongelijkheid toe te werken. Je mag hierbij nog steeds de operaties gebruiken die hierboven beschreven werden, want die werken allemaal twee kanten op. Echter, zorg ervoor dat je goed blijft onderscheiden wat je hebt bewezen en wat je nog wilt bewijzen, want het is makkelijk om hiermee in de war te raken. Ook is het een stuk netter om je uiteindelijke uitwerking in de 'goede' volgorde te schrijven: begin met wat je weet, en eindig met de uitdrukking die je wil bewijzen.

Voorbeeld 13.1. Bewijs de ongelijkheid $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ voor $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Wanneer we deze opgave 'van achteren naar voren' aanpakken, is het een nuttige eerste stap om de breuk weg te werken. We moeten dus bewijzen dat $2\sqrt{xy} \leq x + y$. Als we nu alle termen naar één kant halen, komt er $x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$ te staan. Omdat $x - 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$, is deze laatste ongelijkheid waar.

Om hier een netter leesbaar bewijs van te maken, schrijven we het als volgt op:

Er geldt $x - 2\sqrt{xy} + y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$, en dus blijkt dat $x + y \geq 2\sqrt{xy}$. Hieruit volgt dat $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Gemiddelden

Het zojuist behandelde voorbeeld is een kleine versie van de RM-ongelijkheid. Hierbij staat R voor het rekenkundig gemiddelde (arithmetic mean):

$$R = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

waarbij x_1 t/m x_n reële getallen zijn. De M staat voor het meetkundig gemiddelde (geometric mean):

$$M = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

voor niet-negatieve reële getallen x_1 t/m x_n.

De RM-ongelijkheid zegt dat voor $n \in \mathbb{N}$ en niet-negatieve reële getallen x_1 t/m x_n altijd geldt dat $M \leq R$. Gelijkheid geldt alleen wanneer alle x_i gelijk zijn.

We kunnen nog een paar bekende gemiddelden aan het rijtje toevoegen. Het harmonisch gemiddelde H is gedefinieerd voor positieve x_1 t/m x_n:

$$H = \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n}.$$

En tenslotte is er het kwadratisch gemiddelde K:

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2}{n}}.$$

Stelling 13.2. *Voor $n \in \mathbb{N}$ en $x_1, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat*

$$\min\{x_1, \ldots, x_n\} \leq H \leq M \leq R \leq K \leq \max\{x_1, \ldots, x_n\},$$

waarbij gelijkheid alleen optreedt wanneer alle x_i gelijk zijn.

Bovenstaande stelling verbindt vier veel voorkomende gemiddelden. Het rekenkundig, harmonisch en kwadratisch gemiddelde zijn allemaal van de vorm

$$M_p = \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}{n}\right)^{1/p},$$

voor $p = 1$, $p = -1$ en $p = 2$ respectievelijk. Maar het M_p gemiddelde kan als hierboven worden gedefinieerd voor elke p ongelijk aan 0. Wanneer we vervolgens definiëren dat M_0 het meetkundige gemiddelde is, geldt de volgende stelling:

Stelling 13.3. *Voor $p < q$, $n \in \mathbb{N}$ en $x_1, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat*

$$M_p \leq M_q$$

waarbij gelijkheid alleen optreedt wanneer alle x_i gelijk zijn.

Deze stelling kan nog iets worden uitgebreid door naar gewogen gemiddelden te kijken. Als $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gewichten zijn met $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$, dan definiëren we

$$M_{p,w} = (w_1 x_1^p + w_2 x_2^p + \cdots + w_n x_n^p)^{1/p}$$

voor $p \neq 0$ en

$$M_{0,w} = x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n}.$$

Stelling 13.4. *Voor $p < q$, $n \in \mathbb{N}$, $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gewichten met $w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1$ en $x_1, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_{>0}$ geldt dat*

$$M_{p,w} \leq M_{q,w}$$

waarbij gelijkheid alleen optreedt wanneer alle x_i gelijk zijn.

Enkele andere veelgebruikte ongelijkheden

Één van de meest gebruikte ongelijkheden is de Cauchy-Schwarz ongelijkheid. Hij komt in vele gedaanten voor, omdat het een ongelijkheid op ruimten met een inwendig product betreft:

Stelling 13.5. *Voor alle vectoren u en v van een vectorruimte X met inwendig product, geldt dat:*

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Gelijkheid geldt dan en slechts dan als u en v lineair afhankelijk van elkaar zijn.

Per inproduct ruimte krijgen we dus een aparte versie van de Cauchy-Schwarz ongelijkheid. Voor complexe getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en $y_1, y_2, \ldots, y_n$ krijgen we bijvoorbeeld:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right).$$

Een andere ongelijkheid over producten en rijtjes getallen is de Herschikkingsongelijkheid:

Stelling 13.6. *Voor rijtjes $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ en $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ van reële getallen, en een permutatie $\sigma \in S_n$ geldt dat*

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \geq x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \cdots + x_ny_{\sigma(n)} \geq x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1.$$

Wanneer bovendien geldt dat $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ en $y_1 > y_2 > \cdots > y_n$, kan gelijkheid links alleen optreden als $\sigma = id$, en rechts alleen als $\sigma(k) = n + 1 - k$ voor alle k.

Door meerdere herschikkingsongelijkheden bij elkaar op te tellen, kan weer een nieuwe nuttige ongelijkheid worden afgeleid: de ongelijkheid van Tsjebychev:

Stelling 13.7. *Voor rijtjes $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ en $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$ van reële getallen geldt dat*

$$\frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n}{n} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \geq \frac{x_1y_n + x_2y_{n-1} + \cdots + x_ny_1}{n}.$$

En tenslotte komt ook Schur's ongelijkheid regelmatig van pas:

Stelling 13.8. *Voor niet-negatieve reële getallen x, y en z en een positief getal t geldt dat*

$$x^t(x-y)(x-z) + y^t(y-z)(y-x) + z^t(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Jensen ongelijkheid

Een van de belangrijkste trucjes bij het werken met ongelijkheden is de Jensen ongelijkheid. Die kan ingewikkelde ongelijkheden soms een heel eind voor je vereenvoudigen. Hij kan worden toegepast wanneer je kijkt naar een som van termen $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ voor een convexe functie f, en staat je toe deze som van termen van te schatten met één enkele term.

Ter herinnering: een functie f heet convex op een interval I wanneer voor alle $x, y \in I$ en $t \in (0,1)$ geldt dat

$$tf(x) + (1-t)f(y) \geq f(tx + (1-t)y).$$

Dit betekent precies dat het lijnstuk tussen $(x, f(x))$ en $(y, f(y))$ boven de grafiek van f ligt, en dat $\{(x,z) \mid x \in I, z \geq f(x)\}$ een convexe deelverzameling van $\mathbb{R}^2$ is.

Stelling 13.9. *Zij f een convexe functie op het interval I en laat $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Dan geldt dat*

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right).$$

In plaats van met het gewone rekenkundig gemiddelde (zoals hierboven), kun je Jensen's ongelijkheid ook met een gewogen rekenkundig gemiddelde toepassen:

Stelling 13.10. *Zij f een convexe functie op het interval I, $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_{>0}$ gewichten met $w_1 + \ldots + w_n = 1$ en laat $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$. Dan geldt dat*

$$w_1f(x_1) + 1_2f(x_2) + \cdots + w_nf(x_n) \geq f\left(w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n\right).$$

Ongelijkheden voor integralen

De meeste klassieke ongelijkheden die gaan over sommen van een aantal getallen zijn ook geldig in integraalvorm. In het bijzonder geldt (als analogon van de ongelijkheid van het p en q gemiddelde):

Stelling 13.11. *Voor $p \geq q$ en een willekeurige (meetbare) functie f geldt dat*

$$\left(\int_C |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \geq \left(\int_C |f(x)|^q \, dx\right)^{1/q},$$

voor een willekeurige (meetbare) verzameling C met gelijkheid als $p = q$ of als f constant. Ook bij oneigenlijke integralen (bijvoorbeeld met $C = (-\infty, \infty)$) is dit waar, maar dan kan eventueel aan één of beide kanten van de ongelijkheid oneindig of 1/oneindig staan.

De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz geldt voor elke bilineaire vorm, dus ook voor integralen via

$$\left(\int_C f(x)\overline{g(x)} \, dx\right)^2 \leq \left(\int_C |f(x)|^2 \, dx\right)\left(\int_C |g(x)|^2 \, dx\right),$$

voor weer een willekeurige meetbare verzameling C. Gelijkheid geldt hier als $f(x)/g(x)$ constant is.

Een generalisatie hiervan is Hölder's ongelijkheid:

Stelling 13.12. *Laat (S, Σ, μ) een maatruimte zijn, en $p, q \in [1, \infty]$ met $1/p + 1/q = 1$. Dan geldt voor alle meetbare complexwaardige functies f en g op S dat*

$$\left(\int_S |fg| \, d\mu\right) \leq \left(\int_S |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_S |g|^q \, d\mu\right)^{1/q}.$$

Wanneer bovendien geldt dat $p, q \in (1, \infty)$ en $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$, dan geldt gelijkheid dan en slechts dan als $|f|^p$ en $|g|^q$ lineair afhankelijk zijn in $L^1(\mu)$.

De ongelijkheid van Jensen kan ook voor integralen worden toegepast, en zegt dat voor een convexe functie f op een interval D dat voor een positieve functie $w\colon D \to [0, \infty)$ zodanig dat $\int_D w(x)\, dx = 1$ geldt

$$\int_D f(x)w(x) \, dx \geq f\left(\int_D w(x) \, dx\right),$$

als beide integralen bestaan.

Een andere techniek die lokaal goede ongelijkheden geeft is het gebruiken van de Stelling van Taylor. Op deze manier is bijvoorbeeld $\sin(x) \leq x$ voor $4 \geq x \geq 0$ heel makkelijk te bewijzen.

Vaak moet je een slimme transformatie uitvoeren om op een mooie ongelijkheid uit te komen. Laat je hierbij leiden door wanneer gelijkheid geldt (de functie waarvoor dat gaat moet door de transformatie versimpelen).

Opgaven

Vraag 13.1. Bewijs voor alle reële getallen a, b, c dat

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

Vraag 13.2 (IMC 2010)**.** Voor $0 < a < b$, bewijs dat

$$\int_a^b (1 + x^2)e^{-x^2} \; dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$

Vraag 13.3. Voor welke reële getallen c geldt $\cosh(x) \leq \exp(cx^2)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

Vraag 13.4. Gegeven zijn positieve, reële getallen a, b, c, d. Bewijs dat

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a + b + c + d}.$$

Vraag 13.5. Gegeven zijn getallen $0 \leq p, q, r \leq 1$. Bewijs dat

$$(p - q)(q - r)(r - p) < \frac{8}{27}.$$

Vraag 13.6. Vind de minimale waarde voor $x > 0$ van

$$\frac{(x + 1/x)^6 - (x^6 + 1/x^6) - 2}{(x + 1/x)^3 + (x^3 + 1/x^3)}.$$

Vraag 13.7. Stel dat a, b, c, A, B, C reële getallen zijn met $a, A \neq 0$ zodat

$$\left|ax^2 + bx + c\right| \leq \left|Ax^2 + Bx + C\right|$$

voor alle $x \in \mathbb{R}$. Laat zien dat dan ook

$$\left|b^2 - 4ac\right| \leq \left|B^2 - 4AC\right|.$$

Vraag 13.8 (IMC 1999)**.** Bestaat er een bijectieve afbeelding $\pi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ zodat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < \infty?$$

Vraag 13.9. Gegeven dat $x_1, x_2, \ldots, x_n$ een permutatie is van $1, 2, \ldots, n$ bepaal de maximale waarde (als functie van n) van

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1.$$

Vraag 13.10 (IMC 1995)**.** Zij f een continue functie op $[0, 1]$ zodat voor elke $x \in [0, 1]$ geldt

$$\int_x^1 f(t)\, dt \geq \frac{1 - x^2}{2}.$$

Laat zien dat

$$\int_0^1 f^2(t)\, dt \geq \frac{1}{3}.$$

Vraag 13.11 (IMC 2000)**.** Zij x_i een dalende rij positieve getallen. Laat zien dat

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{i}}.$$

Laat zien dat er een constante C bestaat zodat als x_i een dalende rij positieve getallen is geldt

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{\sum_{i=m}^{\infty} x_i^2} \leq C \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

Vraag 13.12 (IMC 2005)**.** Zij $f\colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$ een continu differentieerbare functie. Laat zien dat

$$\left| \int_0^1 f^3(x)\,dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq \max_{x\in[0,1]} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x)\,dx \right)^2.$$

Vraag 13.13 (IMC 1994)**.** Zij f een twee keer continu differentieerbare functie op $[0, N]$ zo dat $|f'(x)| < 1$ en $f''(x) > 0$ voor alle $x \in [0, N]$. Laat $0 \leq m_0 < m_1 < \cdots < m_k \leq N$ gehele getallen zijn zodat $n_i = f(m_i)$ ook geheel is voor $i = 0, 1, \ldots, k$. We definieren $b_i = n_i - n_{i-1}$ en $a_i = m_i - m_{i-1}$ voor $i = 1, 2, \ldots, k$.

(a) Laat zien dat

$$-1 < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \cdots < \frac{b_k}{a_k} < 1.$$

(b) Bewijs dat voor elke $A > 1$ er hoogstens N/A indices j zijn met $a_j > A$.

(c) Bewijs dat $k \leq 3N^{2/3}$ (i.e. dat er hoogstens $3N^{2/3}$ gehele punten op de kromme $y = f(x)$ bestaan).

Vraag 13.14. Stel dat $f(x, y)$ een continue reëelwaardige functie is op het eenheidsvierkant $[0, 1] \times [0, 1]$. Laat zien dat

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\,dx \right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\,dy \right)^2 dx \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\,dx\,dy \right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)^2\,dx\,dy.$$

Vraag 13.15. Zij C de klasse van reëelwaardige continue differentieerbare functies f op het interval $[0, 1]$ die voldoen aan $f(0) = 0$ en $f(1) = 1$. Bepaal het grootste gehele getal u zodat

$$u \leq \int_0^1 |f'(x) - f(x)|\,dx$$

voor alle $f \in C$.

Vraag 13.16 (IMC 1998)**.** Zij $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ een continue functie met de eigenschap dat voor elke $x, y \in [0,1]$ geldt
$$xf(y) + yf(x) \leq 1.$$
Bewijs dat
$$\int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4}$$
en vind een voorbeeld van zo'n functie f waarvoor gelijkheid geldt.

Vraag 13.17. Zij $a_1, a_2, \ldots, a_n$ and $b_1, b_2, \ldots, b_n$ niet-negatieve reële getallen. Laat zien dat
$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} + (b_1 b_2 \cdots b_n)^{1/n} \leq \Big((a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)\Big)^{1/n}.$$

Vraag 13.18. Zij m en n positieve gehele getallen. Laat zien dat
$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{(m+n)}} < \frac{m!}{m^m}\frac{n!}{n^n}.$$

Vraag 13.19. Vind het minimum van
$$|\sin(x) + \cos(x) + \tan(x) + \cot(x) + \sec(x) + \csc(x)|$$
voor reële getallen x. (NB $\cot(x) = 1/\tan(x)$, $\sec(x) = 1/\cos(x)$ en $\csc(x) = 1/\sin(x)$).

Vraag 13.20. Laat T_1 en T_2 driehoeken zijn met zijden a_1, b_1 en c_1, respectievelijk a_2, b_2 en c_2. Stel dat $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ en $c_1 \leq c_2$ en dat T_2 een scherphoekige driehoek is. Volgt nu dat de oppervlakte van T_2 groter is dan de oppervlakte van T_1?

Vraag 13.21. Zij H een $n \times n$ matrix met alle coefficienten ± 1 waarvan de rijen onderling loodrecht staan. Stel H heeft een $a \times b$ ondermatrix waarin alle elementen 1 zijn. Laat zien dat $ab \leq n$.

Vraag 13.22. Laat zien dat voor alle gehele getallen $n > 1$ geldt
$$\frac{1}{2ne} < \frac{1}{e} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{ne}.$$

Vraag 13.23. Zij $f(x)$ een continue, reëelwaardige functie op het interval $[0,1]$. Laat zien dat
$$\int_0^1 \int_0^1 |f(x) + f(y)|\,dx\,dy \geq \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

Vraag 13.24. Bewijs dat er een constante C bestaat zodat geldt dat als $p(x)$ een polynoom is van graad 2006, dan is
$$|p(0)| \leq C \int_{-1}^1 |p(x)|\,dx.$$

Vraag 13.25. Zij f een reëelwaardige functie met een continue derde afgeleide zodat $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ en $f'''(x)$ positief zijn voor alle $x \in \mathbb{R}$. Stel dat $f'''(x) \leq f(x)$ voor alle x. Laat zien dat $f'(x) < 2f(x)$ voor alle x.

Vraag 13.26. Laat A, B en C verschillende punten in het vlak $\mathbb{Z}^2$ zijn (dus met gehele coördinaten). Bewijs dat als

$$(|AB| + |BC|)^2 < 8Opp(\triangle ABC) + 1$$

dan vormen A, B en C drie hoekpunten van een vierkant.