TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.1, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 18 april, 2016

Delft University of Technology

Outline

Definitie

We maken van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ een *lichaam* en dat lichaam noemen we $\mathbb{C}$.

Optelling: $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$.
Vermenigvuldiging: $(x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$.

Alle rekenregels, A1–A5, M1–M5, DL, uit Wiskundige Structuren gelden voor $\mathbb{C}$.
De meeste kun je redelijk makkelijk verifiëren (netjes werken).

Delft University of Technology

Definitie

De nul is $(0, 0)$, we schrijven gewoon 0 voor dat punt.

De één is $(1, 0)$, we schrijven gewoon 1 voor dat punt.

Multiplicatieve inverse:

$$(x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0)$$

als $(x, y) \neq (0, 0)$

Schrijf alles netjes uit.

Delft University of Technology

Definitie

De reële getallen zijn er nog steeds:
$\mathbb{C}_\mathbb{R} = \{(a,0) : a \in \mathbb{R}\}$ gedraagt zich precies als $\mathbb{R}$.

$(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -(1,0)$, dus de vergelijking $X^2 + 1 = 0$ heeft een oplossing in $\mathbb{C}$, twee zelfs: $(0,1)$ en $(0,-1)$.

Notatie: $\mathrm{i} = (0,1)$.
Dus: $(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1) = x + y\mathrm{i}$
We schrijven gewoon a voor $(a,0)$ als $a \in \mathbb{R}$.

Delft University of Technology

Standaardnotatie

Complexe getallen heten meestal z en w.
We schrijven $z = x + y\mathrm{i}$ en $w = u + v\mathrm{i}$
(in plaats van (x, y) en (u, v)).

Als $z = x + y\mathrm{i}$ dan
$x = \operatorname{Re} z$, het *reële deel* van z
$y = \operatorname{Im} z$, het *imaginaire deel* van z

Als $\operatorname{Re} z = 0$ dan is z *zuiver imaginair*.

De x-as heet wel de *reële as* en de y-as heet de *imaginaire as*.

Ordening

Regels O1–O4 krijgen we niet.

In een geordend lichaam geldt:

- $0 < x^2$ als $x \neq 0$ (Lay: Exercise 3.2.3.e)
- en dus $0 < 1$
- en ook $-1 < 0$

Echter: $\mathrm{i}^2 = -1$.

Delft University of Technology

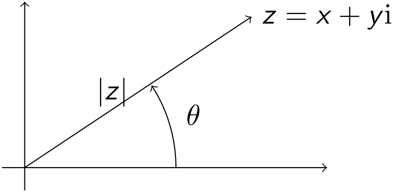
Complex geconjugeerde

We schrijven $\overline{x + y\mathrm{i}} = x - y\mathrm{i}$, de *complex geconjugeerde* van z.

- Meetkundig: spiegelen in de reële as.
- $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$, $\quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, $\quad \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}$
- $z + \bar{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}\, z$
- $z - \bar{z} = 2y\mathrm{i} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, z$
- $z\bar{z} = x^2 + y^2$

Modulus en argument

Via $z = x + y\mathrm{i} = (x, y)$ kunnen we complexe getallen ook in poolcoördinaten uitdrukken:



- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$; de modulus
- θ; hoek, het argument

TU Delft
Delft University of Technology

Eigenschappen

Nuttige eigenschappen

- $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
- $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$

Delft University of Technology

Driehoeksongelijkheid

Stelling

Voor elk tweetal complexe getallen z en w geldt

$$\bigl||z| - |w|\bigr| \leqslant |z \pm w| \leqslant |z| + |w|$$

Bewijs.

- $|z \pm w|^2 = (z \pm w)(\bar{z} \pm \bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 \pm (z\bar{w} + \bar{z}w)$
- $\bigl(|z| + |w|\bigr)^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|zw|$
- $\pm(z\bar{w} + \bar{z}w) = \pm 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} \leqslant 2|z\bar{w}| = 2|zw|$

Dit geeft de tweede $\leqslant$. □

Delft University of Technology

Driehoeksongelijkheid

Stelling

Voor elk tweetal complexe getallen z en w geldt

$$\bigl||z| - |w|\bigr| \leqslant |z \pm w| \leqslant |z| + |w|$$

Bewijs.

De eerste $\leqslant$ volgt uit de tweede:

- $|z| = |z - w + w| \leqslant |z - w| + |w|$ dus $|z| - |w| \leqslant |z - w|$
- $|w| = |w - z + z| \leqslant |w - z| + |z|$ dus $|w| - |z| \leqslant |w - z|$

Nu samenvoegen. $\square$

TU Delft
Delft University of Technology

Delen

De formule $z\bar{z} = |z|^2$ maakt sommige formules eenvoudiger:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \text{ ofwel } \frac{1}{x + y\mathrm{i}} = \frac{x - y\mathrm{i}}{x^2 + y^2}$$

Bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} \frac{16 + 63\mathrm{i}}{3 + 4\mathrm{i}} &= \frac{16 + 63\mathrm{i}}{3 + 4\mathrm{i}} \cdot \frac{3 - 4\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}} \\ &= \frac{(48 + 252) + (-64 + 189)\mathrm{i}}{9 + 16} \\ &= \frac{300 + 125\mathrm{i}}{25} = 12 + 5\mathrm{i} \end{aligned}$$

Delft University of Technology

Eigenschappen

Nu de hoek, het argument.
Om te beginnen

- $x = |z| \cos\theta$
- $y = |z| \sin\theta$

Er zijn oneindig veel waarden voor θ.
De Hoofdwaarde noteren we $\operatorname{Arg} z$, dat is de hoek in $(-\pi, \pi]$
Andere waarden: $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$

Delft University of Technology

Vermenigvuldiging

Schrijf $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ en $w = s(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$, we krijgen

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi) \\ &= rs\bigl((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + \mathrm{i}(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi)\bigr) \\ &= rs\bigl(\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)\bigr). \end{aligned}$$

Dus *modulussen vermenigvuldigen* en *hoeken optellen*.

In 1797 *definieerde* Caspar Wessel de vermenigvuldiging op deze manier.
(Hij definieerde ook de kop-staartmanier om vectoren op te tellen.)

Vermenigvuldiging: een voorbeeld

Neem $z = -1 + \mathrm{i}$ en $w = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$.
Dan

- $z = \sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + \mathrm{i} \sin \frac{3}{4}\pi)$
- $w = 2(\cos \frac{1}{3}\pi + \mathrm{i} \sin \frac{1}{3}\pi)$
- $zw = (-1 - \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})\mathrm{i}$

En dus ...

Delft University of Technology

Vermenigvuldiging: een voorbeeld

... vinden we

$$(-1-\sqrt{3}) + \mathrm{i}(1-\sqrt{3}) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{13}{12}\pi\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\left(\cos-\frac{11}{12}\pi + \mathrm{i}\sin-\frac{11}{12}\pi\right)$$

we schrijven wel

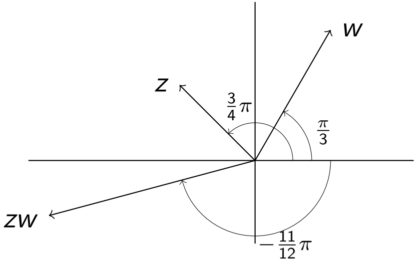
$$\arg zw = \arg z + \arg w$$

maar niet

$$\operatorname{Arg} zw = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w$$

Delft University of Technology

Vermenigvuldiging: een voorbeeld



Delen

Schrijf $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ en $w = s(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$, we krijgen

$$\begin{aligned}
\frac{z}{w} &= \frac{r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}{s(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)} \\
&= \frac{r}{s}\cdot\frac{\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi}{\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi}\cdot\frac{\cos\psi - \mathrm{i}\sin\psi}{\cos\psi - \mathrm{i}\sin\psi} \\
&= \frac{r}{s}\cdot\frac{(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)(\cos\psi - \mathrm{i}\sin\psi)}{\cos^2\psi + \sin^2\psi} \\
&= \frac{r}{s}\bigl(\cos(\varphi-\psi) + \mathrm{i}\sin(\phi-\psi)\bigr).
\end{aligned}$$

Dus *modulussen delen* en *hoeken aftrekken*.

TUDelft
Delft University of Technology

Delen

In het bijzonder, als $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ dan:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)$$

En in het héél bijzonder: als $|z| = 1$ dan $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Formule van De Moivre

Voor elke hoek θ en elk geheel getal n geldt

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$$

Toepassing: makkelijke formules voor $\cos n\theta$ en $\sin n\theta$:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta &= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta \mathrm{i}\sin\theta + 3\cos\theta \mathrm{i}^2\sin^2\theta + \mathrm{i}^3\sin^3\theta \\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + \mathrm{i}(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)\end{aligned}$$

Dankzij de binomiaalformule (Lay: Exercise 3.1.30)

En voor de cosinus

Merk op

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

Dus $\cos 3\theta = T_3(\cos\theta)$, met $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.

Dit lukt voor elke n: er is een polynoom T_n zó dat $\cos n\theta = T_n(\cos\theta)$.

Eenheidswortels, bestaan

Stelling (I.1.7)

Voor elke $n \in \mathbb{N}$ zijn er precies n verschillende n-demachtseenheidswortels (oplossingen van $z^n = 1$ dus).

Schrijf $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ (met $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) dan is $z^n = 1$ equivalent met

$$r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi) = 1(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0)$$

ofwel $r^n = 1$ en $n\varphi = 0 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
Dus $r = 1$ en $0 \leqslant k < n$ (want $0 \leqslant n\varphi < 2n\pi$).

Delft University of Technology

Eenheidswortels, bestaan

We krijgen dus n oplossingen:

$$\zeta_\nu = \zeta_{\nu,n} = \cos\frac{2\pi\nu}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi\nu}{n} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

NB $\zeta_{0,n} = 1$
Dankzij De Moivre geldt: $\zeta_{1,n}^{\nu} = \zeta_{\nu,n}$
($\zeta_{1,n}$ brengt dus de groep $\{\zeta_{\nu,n} : 0 \leqslant \nu < n\}$ voort).

Eenheidswortels, eigenschappen

Merk op (en ga na)

$$z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + \cdots + z + 1)$$

dus, ...,

$$\zeta_1^{n-1} + \cdots + \zeta_1 + 1 = 0$$

of ook

$$\zeta_{n-1} + \cdots + \zeta_1 + \zeta_0 = 0$$

De vijfdemachtseenheidswortels

We berekenen $\zeta_{1,5} = \cos\frac{2}{5}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{5}\pi$.

Belangrijke opmerkingen

- $z^5 - 1 = (z-1)(z-\zeta_1)(z-\zeta_4)(z-\zeta_2)(z-\zeta_3)$
- $\zeta_4 = \overline{\zeta_1} = \zeta_1^{-1}$ en $\zeta_3 = \overline{\zeta_2} = \zeta_2^{-1}$
- $(z-\zeta_1)(z-\zeta_4) = z^2 - 2\cos\frac{2}{5}\pi z + 1$
- $(z-\zeta_2)(z-\zeta_3) = z^2 - 2\cos\frac{4}{5}\pi z + 1$

Delft University of Technology

De vijfdemachtseenheidswortels

Schrijf nu even $a = 2\cos\frac{2}{5}\pi$ en $b = 2\cos\frac{4}{5}\pi$ en merk nu op dat

$$(z^2 - az + 1)(z^2 - bz + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

en ook

$$(z^2 - az + 1)(z^2 - bz + 1) = z^4 - (a+b)z^3 + (2+ab)z^2 - (a+b)z + 1$$

En dus $-(a+b) = 1$ en $2 + ab = 1$ ofwel $ab = -1$.

Delft University of Technology

De vijfdemachtseenheidswortels

Maar uit $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$ volgt dat a en b de oplossingen van

$$x^2 + x - 1 = 0$$

zijn, dus $a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en $b = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$ (want $a > 0$ en $b < 0$).

Conclusie: $\cos \frac{2}{5}\pi = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$ en $\cos \frac{4}{5}\pi = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}$.

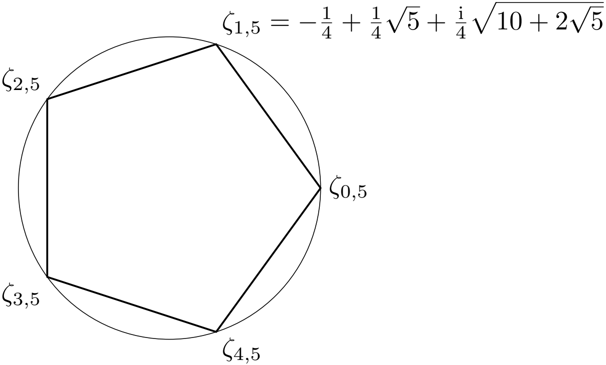
Delft University of Technology

Dus $\zeta_{1,5}$ is gelijk aan ...

Nu gebruiken we $\sin \frac{2}{5}\pi = \sqrt{1-\cos^2 \frac{2}{5}\pi} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, en dus

$$\zeta_{1,5} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{i}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

De vijfdemachtseenheidswortels



Delft University of Technology

Bonus

En ook:

$$\cos\frac{1}{5}\pi = -\cos\frac{4}{5}\pi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

en

$$\sin\frac{1}{5}\pi = \sin\frac{4}{5}\pi = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$