TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.1, donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 21 april, 2016

Delft University of Technology

Outline

Convergentie van rijen

$\mathbb{C}$ is een metrische ruimte:

$$d(z, w) = |z - w|$$

definieert een metriek.

Dus we weten wat convergentie van rijen inhoudt:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad \text{of} \qquad z_n \to z \quad (n \to \infty)$$

betekent: voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $N \in \mathbb{N}$ zó dat voor alle $n \geqslant N$ geldt $|z_n - z| < \varepsilon$.

Convergentie van rijen

Dit is gewoon de convergentie in $\mathbb{R}^2$, dus volgt meteen

Stelling

$\lim_{n\to\infty} z_n = z$
dan en slechts dan als
$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z$ *en* $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$

Nuttige eigenschappen

Stelling

Als $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ *en* $\lim_{n\to\infty} w_n = w$ *dan*

- $z_n \pm w_n \to z \pm w$
- $z_n \cdot w_n \to z \cdot w$
- $|z_n| \to |z|$
- $\overline{z_n} \to \overline{z}$
- $z_n^{-1} \to z^{-1}$

Stelling

Als $|z| < 1$ *dan* $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$.

Convergentie van reeksen

Gegeven een rij complexe getallen: $z_0, z_1, z_2, \ldots$
Maak de bijbehorende rij partiële sommen:

$$s_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$$

Als $\lim_{n\to\infty} s_n$ bestaat, zeg $\lim_{n\to\infty} s_n = s$
dan noemen we de rij $\langle z_n \rangle_n$ sommeerbaar, of de reeks $\sum_n z_n$ convergent, met som s.
Notatie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = s$$

Delft University of Technology

Bekende voorbeelden

- $\sum_n \frac{1}{n} = \infty$ (ondanks $\lim_n \frac{1}{n} = 0$)
- $\sum_n \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$
- $\sum_n \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Euler)
- $\sum_n \frac{1}{n!} = e$
- $\sum_n \frac{1}{n^p}$ convergeert desda $p > 1$

Meetkundige reeks

Neem z vast en bekijk $\langle z^n \rangle_n$.
Partiële sommen:

$$s_n = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

- $|z| < 1$: $\sum_n z^n = \frac{1}{1-z}$
- $|z| = 1$ en $z \neq 1$: begrensde partiële sommen, geen limiet
- $|z| > 1$ of $z = 1$: $\sum_n z^n = \infty$

Tweede geval:

$$|s_n| = \left| \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \right| \leqslant \frac{2}{|1 - z|}$$

Absolute convergentie

We noemen de reeks $\sum_n z_n$ absoluut convergent als de reeks $\sum_n |z_n|$ convergent is.

Stelling

Elke absoluut convergente reeks is convergent.

Bewijs.

Wegens

$$|z_m + z_{m+1} + \cdots + z_n| \leqslant |z_m| + |z_{m+1}| + \cdots + |z_n|$$

volgt dat de partiële sommen een Cauchy-rij vormen.
$\mathbb{C}$ is volledig, dus de rij van partiële sommen convergeert. $\square$

‘de’ exponentiële functie, sinus, cosinus

De volgende reeksen convergeren absoluut, voor elke z

$$\sum_n \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad \sum_n \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

omdat we weten dat ze voor alle positieve reële z convergeren.

Delft University of Technology

‘de’ exponentiële functie, sinus, cosinus

Definitie

We definiëren

- $\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$,
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$,
- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$

‘de’ exponentiële functie, sinus, cosinus

De reeksen convergeren *uniform* op elke schijf

$$D_R = \{z : |z| \leqslant R\}$$

(wegens: M-test van Weierstraß).

Maar niet uniform op $\mathbb{C}$.
Waarom niet?

‘de’ exponentiële functie, sinus, cosinus

De functies voldoen aan alle bekende formules:

- $\exp(z + w) = \exp z \cdot \exp w$
- $\sin(z + w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$
- $\cos(z + w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w$

Bewijs?

Vermenigvuldigingsstelling van Cauchy

Stelling

Stel $\sum_n a_n$ en $\sum_n b_n$ zijn absoluut convergent. Definieer

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

voor alle n. Dan geldt

- $\sum_n c_n$ *is absoluut convergent, en*
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

Vermenigvuldigingsstelling van Cauchy (bewijs)

Ten eerste

$$|c_n| \leqslant d_n = \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$$

De stelling claimt ook dat $\sum_n d_n$ convergeert, en als dat is vastgesteld zien we dat $\sum_n c_n$ inderdaad absoluut convergent is.

Dus: zonder verlies van algemeenheid: $a_n, b_n \geqslant 0$ voor alle n.

Delft University of Technology

Vermenigvuldigingsstelling van Cauchy (bewijs)

Schrijf $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ en $b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Noem de partiële sommen van $\sum_n a_n$, $\sum_n b_n$ en $\sum_n c_n$ respectievelijk s_n, t_n en u_n.

Vermenigvuldigingsstelling van Cauchy (bewijs)

Stap 1: $s_n \cdot t_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} a_k \cdot b_l$ (schrijf maar uit)

Stap 2: $u_n = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} a_k \cdot b_l$ (schrijf maar uit)

Stap 3: $u_n \leqslant s_n \cdot t_n \leqslant a \cdot b$
(bij u_n gebruik je een deel van de termen bij $s_n \cdot t_n$)

Conclusie: $\lim_{n\to\infty} u_n$ bestaat. (Waarom ook al weer?)
De reeks $\sum_n c_n$ convergeert (absoluut, want $c_n \geqslant 0$)
en $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \leqslant a \cdot b$.

Vermenigvuldigingsstelling van Cauchy (bewijs)

Stap 4: $s_n \cdot t_n \leqslant u_{2n}$
(bij $s_n \cdot t_n$ gebruik je een deel van de termen bij u_{2n})

Dus: $a \cdot b = \lim_{n\to\infty} s_n \cdot t_n \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} c_n$.

Conclusie: de reeks $\sum_n c_n$ is altijd absoluut convergent en als de termen niet-negatief zijn klopt de som ook.

Vermenigvuldigingsstelling van Cauchy (bewijs)

Ten slotte: klopt de som voor willekeurige reeksen?
Ja.
En dat ga ik nu op het bord uitschrijven.

Vermenigvuldigingsstelling

De stelling geldt ook als beide reeksen convergent worden verondersteld en alleen één van de twee *absoluut* convergent.

Nog beter: als je verondersteld dat alledrie convergeren dan kun je bewijzen dat de sommen kloppen.

Onderzoek het product van

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

met zichzelf.

De exponentiële functie

Er geldt dus $\exp(z+w) = \exp z \cdot \exp w$.
Dus $\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1$ voor alle z.
Dus $\exp n = \exp(1)^n$ voor alle $n \in \mathbb{Z}$.

Voor reële x hebben we $\exp x = \mathrm{e}^x$; we schrijven ook vaak $\mathrm{e}^z = \exp z$ voor complexe z, maar daar moeten we mee oppassen (zullen we later zien).

De exponentiële functie, sinus en cosinus

Als we $\exp \mathrm{i}z$ uitschrijven vinden we

$$\exp \mathrm{i}z = \cos z + \mathrm{i} \sin z$$

en omgekeerd

$$\cos z = \frac{\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)}{2}$$

en

$$\sin z = \frac{\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)}{2\mathrm{i}}$$

De exponentiële functie, sinus en cosinus

De definities uit Caleidoscoop zijn nu stellingen. Als $z = x + \mathrm{i}y$ dan

- $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$, dus
- $\operatorname{Re} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cos y$,
- $\operatorname{Im} \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \sin y$, en
- $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$.

De exponentiële functie, sinus en cosinus

De gonioformules volgen door uitschrijven.

Voor reële getallen hebben we de ‘echte’ sinus en cosinus, dus

$$e^{2k\pi i} = 1 \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Dat zijn ook de enige oplossingen van $e^z = 1$:
dankzij de poolcoördinaten weten we $|e^z| = 1$, dus $x = 0$,
en $y = \arg e^z = 2k\pi$ voor een $k \in \mathbb{Z}$.

e^z is periodiek met periode $2\pi i$.

De exponentiële functie, sinus en cosinus

De sinus en cosinus krijgen geen nieuwe nulpunten:

$\sin z = 0$ desda $\exp(2\mathrm{i}z) = 1$ en dus $z = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$\cos z = 0$ desda $\exp(2\mathrm{i}z) = -1$ en dus $z = (k + \frac{1}{2})\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Delft University of Technology

Definitie

Laat $S = \{w \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} w \leqslant \pi\}$.

De afbeelding $w \mapsto \mathrm{e}^w$ is bijectief van S naar $\mathbb{C}^*$.

De inverse afbeelding noemen we de hoofdtak van de logaritme.

We schrijven

$$w = \operatorname{Log} z \qquad \text{als} \qquad z = \mathrm{e}^w \text{ en } w \in S$$

Eigenschappen

We hebben $\operatorname{Log} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$.
Deze functie voldoet aan en is bepaald door

- $\exp(\operatorname{Log} z) = z$, en
- $-\pi < \operatorname{Im} \operatorname{Log} z \leqslant \pi$

Formule

Er geldt

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z$$

NB ln gebruik ik alleen voor *positieve reële getallen*.

De oplossingen van $\mathrm{e}^{w} = z$ zijn dus te schrijven als $\operatorname{Log} z + 2k\pi\mathrm{i}$ met $k \in \mathbb{Z}$.

Ik schrijf soms $\log z$ voor een 'willekeurige' logaritme van z.

Machtsverheffen

Als a en b willekeurige complexe getallen zijn, wat is dan a^b?

Antwoord

$$a^b = \exp(b \log a)$$

en dat zijn in principe oneindig veel verschillende uitkomsten.

Soms kiest men voor $\exp(b \operatorname{Log} a)$ als *Hoofdwaarde*
De andere waarden zijn dan

$$\exp(b \operatorname{Log} a + 2bk\pi\mathrm{i}) = \exp(b \operatorname{Log} a) \cdot \exp(2bk\pi\mathrm{i}) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Machtsverheffen, speciale gevallen

Als $b \in \mathbb{Z}$ dan is a^b algebraïsch eenduidig af te spreken.
In dat geval geldt $\exp(2bk\pi\mathrm{i}) = 1$ en dus geeft de nieuwe definitie gewoon de algebraïsche:

$$\exp(b \operatorname{Log} a) = \exp(\operatorname{Log} a)^b = a^b$$

Als $b \in \mathbb{Q}$, zeg $b = \frac{t}{n}$, met $\operatorname{ggd}(t, n) = 1$ dan krijgen we n waarden:

$$\exp(b \operatorname{Log} a) \cdot \exp(2bk\pi\mathrm{i}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Machtsverheffen, oppassen

We hebben nu eigenlijk oneindig veel waarden voor e^z:

$$\exp(z) \cdot \exp(2zk\pi\mathrm{i}) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Maar we houden toch vast aan $\mathrm{e}^z = \exp(z)$ (macht der gewoonte).

De regel

$$a_1^b \cdot a_2^b = (a_1 \cdot a_2)^b$$

gaat heel vaak mis.

$a_1 = a_2 = -1$, $b = \frac{1}{2}$.
Dan $(a_1 \cdot a_2)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$ (hoofdwaarde)
en $a_1^{\frac{1}{2}} \cdot a_2^{\frac{1}{2}} = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$ (ook hoofdwaarde)

Opgaven

Voor vrijdag:
Nuttige opgaven: I.2: 4, 5, 6, 7, 8, 18, 19, 20
Verdiepende opgaven: I.2: 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17