TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.2, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 25 april, 2016

Delft University of Technology

Outline

TU Delft
Delft University of Technology

Continuiteit van functies

Dit weten we.

We hebben het voornamelijk over functies $f : D \to \mathbb{C}$ met $D \subseteq \mathbb{C}$.

En ja, sommen, producten, samenstellingen, ... van continue functies zijn weer continu.

De bewijzen zijn vrijwel gelijk aan die in het reële geval.

Toch een paar voorbeelden

De functie $z \mapsto z^{-1}$ is continu, van $\mathbb{C}^*$ naar $\mathbb{C}$.

We beginnen met afschatten

$$|z^{-1} - w^{-1}| = \frac{|w - z|}{|z \cdot w|}$$

Neem $z \neq 0$ vast; als nu $|w| \geqslant |z|/2$ dan

$$|z^{-1} - w^{-1}| \leqslant |z - w| \frac{2}{|z|^2}$$

Nu: bij $\varepsilon > 0$ nemen we $\delta = \min\{\frac{1}{2}|z|, \frac{1}{2}|z|^2\varepsilon\}$ ...

TU Delft
Delft University of Technology

exp, sin, cos

De stelling over uniforme convergentie en continuïteit is ook hier geldig, dus

wegens de uniforme convergentie van de reeksen op de schijven $D_R = \{z : |z| \leqslant R\}$ volgt dat $\exp z$, $\sin z$ en $\cos z$ continu zijn op heel $\mathbb{C}$.

Delft University of Technology

De hoofdtak van de logaritme is niet continu

De inverse functie van een continue bijectie hoeft niet continu te zijn.

Er geldt $\mathrm{Log}(-1) = \pi \mathrm{i}$.

Ook

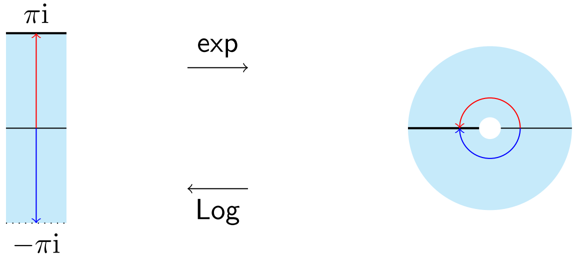
$$\lim_{n\to\infty} -1 - \mathrm{i}2^{-n} = -1$$

maar

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Log}(-1 - \mathrm{i}2^{-n}) = -\pi \mathrm{i}$$

Het is de schuld van Arg.

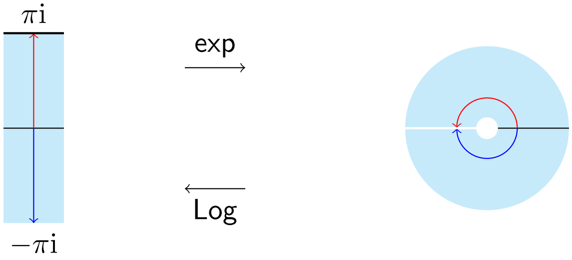
Plaatje



de strook S

$\mathbb{C}^*$

Nog een plaatje



de strook S $\qquad\qquad$ $\mathbb{C}^*$

Als we de lijn $\{z : \operatorname{Im} z = \pi\}$ uit de strook S weglaten
en de lijn $\{z : \operatorname{Im} z = 0 \text{ en } \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$ uit $\mathbb{C}^*$
dan wordt Log alsnog continu.

Limiet

Stel $D \subseteq \mathbb{C}$.
Laat $f : D \to \mathbb{C}$ en laat a een verdichtingspunt van D zijn.

$$\lim_{z \to a} f(z) = L$$

betekent:
Voor elke $\varepsilon > 0$ bestaat een $\delta > 0$ zó dat voor alle $z \in D$ geldt
als $0 < |z - a| < \delta$ dan $|f(z) - L| < \varepsilon$.

De afgeleide

Laat $D \subseteq \mathbb{C}$.
Laat $f : D \to \mathbb{C}$ en laat $a \in D$ een verdichtingspunt van D zijn.
Als

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

bestaat dan noemen we f *complex differentieerbaar* in a en we noteren de limiet als $f'(a)$.

Voorbeeld

$\bar{z}$ is *nergens* differentieerbaar

$$\lim_{z\to a} \frac{\overline{z}-\overline{a}}{z-a} = \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{(x-a_1)-i(y-a_2)}{(x-a_1)+i(y-a_2)}$$

bestaat niet:

1 langs de horizontale lijn $y = a_2$;

-1 langs de verticale lijn $x = a_1$.

Voorbeeld

$|z|^2$ is differentieerbaar in 0 (de limiet is gelijk aan 0) en alleen in 0:

$$\begin{aligned}\frac{|z|^2 - |a|^2}{z-a} &= \frac{z\bar{z} - a\bar{z} + a\bar{z} - a\bar{a}}{z-a} \\ &= \frac{\bar{z}(z-a) + a(\bar{z} - \bar{a})}{z-a} \\ &= \bar{z} + a\frac{\bar{z}-\bar{a}}{z-a}\end{aligned}$$

gebruik nu hetzelfde argument als voor $z \mapsto \bar{z}$: de limieten zijn nu $2\,\mathrm{Re}\,a$ (horizontaal) en $-2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,a$ (verticaal)

Voorbeeld: $\exp z$

De exponentiële functie is differentieerbaar: er geldt

$$\begin{aligned}\frac{\exp z - \exp a}{z-a} &= \frac{\exp(z-a+a) - \exp a}{z-a} \\ &= \frac{\exp(z-a)-1}{z-a} \cdot \exp a\end{aligned}$$

Nu nog

$$\lim_{z\to a} \frac{\exp(z-a)-1}{z-a}$$

bepalen.

Voorbeeld: $\exp z$

We moeten dus

$$\lim_{z\to 0}\frac{\exp z - 1}{z}$$

bepalen.

Om te beginnen: $\exp z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$.

En dus:

$$\frac{\exp z - 1}{z} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{n-1}$$

Voorbeeld: $\exp z$

Nu nog even afschatten:

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1}\right| \leqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{|z|}{1-|z|}$$

Dus:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1$$

Klaar: $\exp z$ is in elke a differentieerbaar en $\exp'(a) = \exp a$.

Opmerking

Omdat we alleen maar eisen dat $D \subseteq \mathbb{C}$ kunnen we voor D een interval $[a, b]$ in $\mathbb{R}$ nemen.

In dat geval is $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ complex differentieerbaar dan en slechts dan als $\operatorname{Re} f$ en $\operatorname{Im} f$ (gewoon) reëel differentieerbaar zijn.

In dat geval $f'(t) = (\operatorname{Re} f)'(t) + \mathrm{i}(\operatorname{Im} f)'(t)$

Lineariseringen en zo

Equivalente formuleringen

1. f is differentieerbaar in a met afgeleide l
2. er is een functie $\varphi : D \to \mathbb{C}$ die continu is in a en voldoet aan $f(z) = f(a) + \varphi(z)(z-a)$ en $\varphi(a) = l$
3. er is een functie $\rho : D \to \mathbb{C}$ die continu is in a en voldoet aan $f(z) = f(a) + l(z-a) + \rho(z)(z-a)$ en $\rho(a) = 0$
4. er is een functie $r : D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ die voldoet aan $f(z) = f(a) + l(z-a) + r(z)$ en $\lim_{z\to a} \frac{r(z)}{z-a} = 0$

Voorbeeld

Als $n \in \mathbb{N}$ dan is $z \mapsto z^n$ in elk punt differentieerbaar.
Immers

$$z^n = a^n + (z^{n-1} + z^{n-2}a + \cdots + a^{n-1})(z - a)$$

en

$$\varphi(z) = z^{n-1} + z^{n-2}a + \cdots + a^{n-1}$$

is continu in a (zelfs overal continu).
Natuurlijk

$$\varphi(a) = na^{n-1}$$

Voorbeeld

De functie $\iota : z \mapsto z^{-1}$ is differentieerbaar op $\mathbb{C}^*$.
Stel $a \neq 0$, dan geldt, voor $z \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{a} - \frac{z-a}{za} \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}(z-a) + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{za}\right)(z-a) \end{aligned}$$

De functie $\rho(z) = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{za}$ is continu op $\mathbb{C}^*$ en $\rho(a) = 0$.

En dus $\iota'(a) = -a^{-2}$

Productregel

Stel $f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + r(z)$ en
$g(z) = g(a) + g'(a)(z-a) + s(z)$.
Dan

$$\begin{aligned} f(z)g(z) = f(a)g(a) & \\ & + \bigl(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\bigr)(z-a) \\ & + f(a)s(z) + g(a)r(z) + f'(a)g'(a)(z-a)^2 \\ & + \bigl(f'(a)s(z) + g'(a)r(z)\bigr)(z-a) + r(z)s(z) \end{aligned}$$

Dit is de vierde formulering, met $l = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ en de laatste twee regels als 'restfunctie'.

Kettingregel

Stel f is differentieerbaar in a en g is differentieerbaar in $b = f(a)$. Dus $f(z) = f(a) + \varphi(z)(z-a)$ en $g(w) = g(b) + \psi(w)(w-b)$.

Vul in:

$$\begin{aligned} g\bigl(f(z)\bigr) &= g(b) + \psi\bigl(f(z)\bigr)(f(z) - b) \\ &= g\bigl(f(a)\bigr) + \psi\bigl(f(z)\bigr)\bigl(\varphi(z)(z-a)\bigr) \\ &= g\bigl(f(a)\bigr) + \psi\bigl(f(z)\bigr)\varphi(z)(z-a) \end{aligned}$$

De functie $\psi\bigl(f(z)\bigr)\varphi(z)$ is continu in a en $\psi\bigl(f(a)\bigr)\varphi(a) = g'\bigl(f(a)\bigr) \cdot f'(a)$.

Delft University of Technology

Voorbeelden

Alle (andere) regels gelden ook, dus van veel functies weten we nu dat de differentieerbaar zijn:

1. polynomen, overal en met de verwachte afgeleiden
2. rationale functies (quotiënten van polynomen) overal waar de noemer niet nul is
3. $\sin z$ en $\cos z$, want $\exp z$ is differentieerbaar

De logaritme

De hoofdtak, Log, van de logaritme is continu op $\mathbb{C}_- = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leqslant 0\}$.

Later, via de inverse-functiestelling, zullen we zien dat $\operatorname{Log} z$ differentieerbaar is op $\mathbb{C}_-$, met afgeleide $(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}$.

Machten

Voor $s \in \mathbb{C}$ definieer $m_s : z \mapsto z^s$ op $\mathbb{C}_-$ door $z^s = \exp(s \operatorname{Log} z)$.

Dankzij de kettingregel zien we dat m_s differentieerbaar is op $\mathbb{C}_-$ en

$$m_s'(z) = \exp(s \operatorname{Log} z) \cdot s \cdot \frac{1}{z} = s \cdot z^{s-1}$$

Continuïteit

Stel $\langle c_n \rangle_n$ is een rij complexe getallen en stel $L = \limsup \sqrt[n]{|c_n|}$ en $R = 1/L$.

De reeks $\sum_n c_n z^n$ convergeert absoluut voor elke z met $|z| < R$.
Want ...

We weten: de reeks convergeert *uniform* op $\{z : |z| \leqslant r\}$ voor elke $r < R$.
Want ...

Dus, de somfunctie is continu op $\{z : |z| < R\}$.

Differentieerbaarheid

Is $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ook differentieerbaar op $\{z : |z| < R\}$?

Antwoord: ja en

$$s'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n a^{n-1}$$

term-voor-term differentiëren mag dus.

Bewijs?

Bewijs

Stap 1: $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, dus $\limsup \sqrt[n]{n|c_n|} = L$.
Beide reeksen hebben dus dezelfde convergentiestraal, schrijf $t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$.

Stap 2: neem a vast met $|a| < R$ en neem r met $|a| < r < R$.
Bekijk, voor $z \neq a$ met $|z| < r$, het verschil

$$s(z) - \bigl(s(a) + t(a)(z-a)\bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bigl(z^n - a^n - na^{n-1}(z-a)\bigr)$$

Een beetje algebra

Stap 3: $z^n - a^n - na^{n-1}(z-a)$ omwerken.

Als $n = 1$ staat er $z - a - (z - a) = 0$.

Als $n = 2$ staat er $z^2 - a^2 - 2az + 2a^2 = z^2 - 2az + a^2 = (z-a)^2$.

Als $n = 3$ staat er
$z^3 - a^3 - 3a^2(z-a) = (z-a)(z^2 + az + a^2 - 3a^2) = (z-a)^2(z+2a)$

Delft University of Technology

Een beetje algebra

Algemeen: $z^n - a^n = (z-a)\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}z^{k-1}$, dus

$$z^n - a^n - na^{n-1}(z-a) = (z-a)\sum_{k=1}^{n}(a^{n-k}z^{k-1} - a^{n-1})$$

en ook

$$a^{n-k}z^{k-1} - a^{n-1} = a^{n-k}(z^{k-1} - a^{k-1})$$

dat is gelijk aan 0 als $k = 1$.

Een beetje algebra

We hebben dus

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a^{n-k}z^{k-1} - a^{n-1}) &= (z-a)\sum_{k=2}^{n} a^{n-k}(z-a)\sum_{l=1}^{k-1} a^{k-1-l}z^{l-1} \\ &= (z-a)^2\sum_{k=2}^{n}\sum_{l=1}^{k-1} a^{n-l-1}z^{l-1} \\ &= (z-a)^2\sum_{l=2}^{n-1}\sum_{k=l+1}^{n} a^{n-l-1}z^{l-1} \\ &= (z-a)^2\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)a^{n-l-1}z^{l-1}\end{aligned}$$

Terug naar het verschil

Stap 4:
$\left|\sum_{l=2}^{n-1}(n-l)a^{n-l-1}z^{l-1}\right| \leqslant \sum_{l=2}^{n-1}(n-l)r^{n-2} = \frac{1}{2}n(n-1)r^{n-2}$

Stap 5: alles bij elkaar rapen:

$$\bigl|s(z)-\bigl(s(a)+t(a)(z-a)\bigr)\bigr| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\bigl(z^n - a^n - na^{n-1}(z-a)\bigr)\right|$$

$$\leqslant |z-a|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}n(n-1)c_n r^{n-2}$$

Yes!

Laatste opmerking

De som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} n(n-1) c_n r^{n-2}$$

is eindig omdat ook

$$\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{2} n(n-1)|c_n|} = L$$

Opgaven

Voor donderdag:

Nuttige opgaven: I.3: 2, 6, 9, 10, 11, 12; I.4: 1, 2, 3

Verdiepende opgaven: I.3: 13, 14; I.4: 4, 5, 6

Delft University of Technology