TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.2, donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 28 april, 2016

Delft University of Technology

Outline

1. Section I.5 The Cauchy-Riemann differential equations
   - Reëel versus Complex
   - Cauchy-Riemannvergelijkingen
   - Analytisch/holomorf
   - Inverse-functiestelling
   - Harmonische functies

Delft University of Technology

Reële differentieerbaarheid

We behandelen een complexe functie f als een functie van $\mathbb{R}^2$ naar $\mathbb{R}^2$; we noemen f reëel differentieerbaar in $\boldsymbol{a} = (a, b)$ als er een 2×2-matrix A is, *de Jacobiaan*, zó dat

$$f(x, y) - f(a, b) = A \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + R(x, y)$$

waarbij R zo is dat $\lim_{z \to \boldsymbol{a}} \frac{\|R(x,y)\|}{\|z - \boldsymbol{a}\|} = 0$

Reële differentieerbaarheid

Als we $f = u + \mathrm{i}v = \binom{u}{v}$ schrijven dan

$$A = \begin{pmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{pmatrix}$$

Notatie: vorig jaar: $A = J\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$; boek: $J(f;\boldsymbol{a})$.

Delft University of Technology

Complexe differentieerbaarheid

Vorige keer hebben we complexe differentieerbaarheid als volgt gekarakteriseerd

$$f(z) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a})(z - \boldsymbol{a}) + r(z)$$

waarbij r zo is dat $\lim_{z \to \boldsymbol{a}} \frac{r(z)}{z - \boldsymbol{a}} = 0$.

Complexe differentieerbaarheid

Als $f'(\boldsymbol{a}) = \alpha + \mathrm{i}\beta$ dan kunnen we $f'(\boldsymbol{a})(z - \boldsymbol{a})$ als volgt uitwerken

$$\bigl(\alpha(x-a) - \beta(y-b)\bigr) + \mathrm{i}\bigl(\beta(x-a) + \alpha(y-b)\bigr)$$

we kunnen dit ook als een matrixvermenigvuldiging zien/uitdrukken.

$$f'(\boldsymbol{a})(z-\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Delft University of Technology

Reëel versus Complex

Dus

Reëel: $$f(z) - f(\boldsymbol{a}) \approx \begin{pmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

en

Complex: $$f(z) - f(\boldsymbol{a}) \approx \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$$

Van (gróót) belang is de gedaante van de matrix in het complexe geval.
Hieruit halen we . . .

Cauchy-Riemannvergelijkingen

f is complex differentieerbaar in $\boldsymbol{a}$ dan en slechts dan als f reëel differentieerbaar is in $\boldsymbol{a}$ en

$$u_x(a,b) = v_y(a,b) \text{ en } v_x(a,b) = -u_y(a,b)$$

dit zijn de Cauchy-Riemannvergelijkingen.
Kortweg: $u_x = v_y$ en $v_x = -u_y$.

De functie $\overline{z}$ is reëel differentieerbaar met

$$u_x = 1,\ u_y = 0,\ v_x = 0 \text{ en } v_y = -1$$

en dus nergens complex differentieerbaar.

Vier uitdrukkingen voor $f'(\boldsymbol{a})$

Nog steeds: $f = u + \mathrm{i}v$.

Via

$$\begin{pmatrix} u_x(a,b) & u_y(a,b) \\ v_x(a,b) & v_y(a,b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Kunnen we schrijven

$$\begin{aligned} f'(\boldsymbol{a}) = \alpha + \mathrm{i}\beta &= u_x(\boldsymbol{a}) + \mathrm{i}v_x(\boldsymbol{a}) = v_y(\boldsymbol{a}) - \mathrm{i}u_y(\boldsymbol{a}) \\ &= u_x(\boldsymbol{a}) - \mathrm{i}u_y(\boldsymbol{a}) = v_y(\boldsymbol{a}) + \mathrm{i}v_x(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

Toepassing

Opmerking I.1.5.5. Stel $D \subseteq \mathbb{C}$ is open en samenhangend.
Stel $f : D \to \mathbb{C}$ is differentieerbaar en $f'(z) = 0$ op D.
Conclusie: f is constant op D.

Er geldt: $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ op D, dus u en v zijn constant op D.

Kijk nog eens naar Opgave I.4.3.

Ga na: als u (of v) constant is op D dan is f ook constant op D.

$\exp z$

Als $f(z) = \exp z$ dan $u(x, y) = e^x \cos y$ en $v(x, y) = e^x \sin y$. Dan is duidelijk dat exp reëel differentieerbaar is en dat de Jacobiaan in $\boldsymbol{a}$ gelijk is aan

$$\begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix}$$

Deze heeft de juiste vorm en hij stelt vermenigvuldiging met $e^{\boldsymbol{a}}$ voor.

Dus zo kunnen we ook zien dat $\exp z$ complex differentieerbaar is en dat $\exp' \boldsymbol{a} = \exp \boldsymbol{a}$.

sinus en cosinus

Er geldt:

$$\sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

en

$$\cos(x+iy) = \cos x \cos iy - \sin x \sin iy = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

Ook hier werken de Cauchy-Riemannvergelijkingen prima.

Delft University of Technology

De Logaritme

De hoofdtak van de logaritme is

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z$$

Dus:

$$u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$$

en

$$v(x,y) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y} & y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y} & y < 0 \end{cases}$$

De Logaritme

We vinden:

- $u_x = \frac{x}{x^2+y^2}$ en $u_y = \frac{y}{x^2+y^2}$
- $v_x = -\frac{y}{x^2+y^2}$ en $v_y = \frac{x}{x^2+y^2}$

Dus $\operatorname{Log} z$ is reëel differentieerbaar en

$$\operatorname{Log}' \boldsymbol{a} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

ofwel

$$\operatorname{Log}' \boldsymbol{a} = \frac{1}{\boldsymbol{a}}$$

Delft University of Technology

z en $\overline{z}$

We hebben $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ en $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$, dus een functie f van x en y is ook een functie van z en $\overline{z}$.

Pas de kettingregel toe:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial x}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \overline{z}}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}$$

z en $\overline{z}$

Neem reële en imaginaire delen en pas Cauchy-Riemann toe:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x + iv_x) - \frac{1}{2i}(u_y + iv_y) = \frac{1}{2}(u_x - v_y) - \frac{1}{2i}(v_x + u_y) = 0$$

Dus, ..., f is (complex) differentieerbaar desda

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

Analytisch/holomorf

Laat $D \subseteq \mathbb{C}$ open zijn en $f : D \to \mathbb{C}$ een functie.

We zeggen dat f analytisch (of holomorf) is in $\boldsymbol{a} \in D$ als er een $\varepsilon > 0$ is zó dat f differentieerbaar is op $U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$.

We zeggen dat f analytisch/holomorf is op D als
f differentieerbaar is in elk punt van D
(f is dan ook analytisch/holomorf in elk punt van D).

NB $U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ is de notatie in het boek voor $\{z : |z - \boldsymbol{a}| < \varepsilon\}$.

Analytisch/holomorf

We hebben al veel analytische functies gezien en die zagen er mooier uit dan ‘alleen maar’ differentieerbaar:
$\exp z$, $\sin z$, $\cos z$ zijn oneindig vaak differentieerbaar èn de som van een machtreeks.

Binnenkort zullen we zien dat dit voor elke analytische functie geldt.

Inverse-functiestelling

Stelling

Laat $D \subseteq \mathbb{C}$ open zijn en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch met continue afgeleide.

Als $\boldsymbol{a} \in D$ zó is dat $f'(\boldsymbol{a}) \neq 0$ dan is er een $\varepsilon > 0$ zó dat f injectief is op $U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$ en $f'(z) \neq 0$ voor $z \in U_\varepsilon(\boldsymbol{a})$.

Als f injectief is op D en $f'(z) \neq 0$ voor $z \in D$ dan is $f[D]$ open en de inverse functie $g : f[D] \to D$ is analytisch en voor elke z geldt

$$g'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)}$$

Delft University of Technology

Inverse-functiestelling

Bijna alles volgt uit de reële inverse-functiestelling, behalve de formule voor g'.

Stel $f'(\boldsymbol{a}) = \alpha + \mathrm{i}\beta$ ofwel, in reële termen

$$f'(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

dan volgt ...

Delft University of Technology

Inverse-functiestelling

... dat

$$g'\bigl(f(\boldsymbol{a})\bigr) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

maar in complexe termen staat daar

$$g'\bigl(f(\boldsymbol{a})\bigr) = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \mathrm{i}\frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{1}{\alpha+\mathrm{i}\beta} = \frac{1}{f'(\boldsymbol{a})}$$

Delft University of Technology

De Logaritme

We hebben: $\exp : \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \to \mathbb{C}_-$ is bijectief en $\exp' z = \exp z$ is altijd ongelijk aan 0.

De inverse, $\operatorname{Log} z$, is dus ook differentieerbaar en

$$\operatorname{Log}'(\exp \boldsymbol{a}) = \frac{1}{\exp' \boldsymbol{a}} = \frac{1}{\exp \boldsymbol{a}}$$

Wat is $\operatorname{Re} f$?

Stel $D \subseteq \mathbb{C}$ is open en $u : D \to \mathbb{R}$ is 'mooi', zeg $u \in C^2(D)$.
Is er een analytische $f : D \to \mathbb{C}$ met $u = \operatorname{Re} f$?

- $u(x, y) = x$ $\qquad x = \operatorname{Re}(z + \pi^{\mathrm{e}}\mathrm{i})$
- $u(x, y) = x + 2y$ $\qquad x + 2y = \operatorname{Re}(z - 2\mathrm{i}z)$
- $u(x, y) = x^2 - y^2$ $\qquad x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(z^2 + \mathrm{e}^{\pi}\mathrm{i})$
- $u(x, y) = x^2 + y^2$ $\qquad x^2 + y^2 = \operatorname{Re} \ldots$

Een opmerking vooraf

Stel zowel $f = u + \mathrm{i}v_1$ als $g = u + \mathrm{i}v_2$ is analytisch.

Dan is $f - g$ ook analytisch.

Maar $f - g = 0 + \mathrm{i}(v_1 - v_2)$ is dan constant: $0_x = 0_y = 0$.

Dus: als er v is zó dat $u + \mathrm{i}v$ analytisch is
dan ligt v vast, op een (additieve) constante na.

Harmonische functies

Stel er is een v zó dat $u + v\mathrm{i}$ analytisch is.
Dan geldt

$$u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$$

ofwel

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Functies die aan die pdv voldoen heten *harmonische functies*.

Dus: als f analytisch is dan is $\operatorname{Re} f$ harmonisch.

Daarom geen antwoord bij $u(x, y) = x^2 + y^2$.

En omgekeerd?

Stel $u : D \to \mathbb{R}$ is harmonisch (D open).
Is er een analytische f met $\operatorname{Re} f = u$?

Zeg $u(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, op $\mathbb{C}^*$.
Reken maar na: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Maar, ..., we weten wat v moet zijn:
$\operatorname{Arg} z + c$ voor een $c \in \mathbb{R}$.

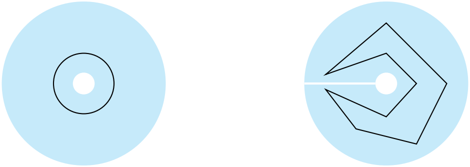
Die kunnen we niet continu maken op $\mathbb{C}^*$.

Wanneer dan wel?

Als we $u(x, y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$ op $\mathbb{C}_-$ bekijken dan geldt $u = \operatorname{Re}\operatorname{Log}$.

Wat is het verschil tussen $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}_-$?

Enkelvoudige samenhang!



Delft University of Technology

Een positief resultaat

Stellingen 4.18 en 4.27 van Analyse 2 helpen ons.

Stelling (I.5.11)

Laat $D \subseteq \mathbb{C}$ een open rechthoek zijn en $u : D \to \mathbb{R}$ harmonisch. Dan is er een analytische functie $f : D \to \mathbb{C}$ met $u = \operatorname{Re} f$.

Bewijs.

Het vectorveld $F = (-u_y, u_x)$ voldoet aan $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.
Er is dus een potentiaal v voor F.
De functie $u + v\mathrm{i}$ is dan analytisch. □

Delft University of Technology

Hoe maken we v, en dus f?

Gegeven een harmonische u, op een enkelvoudig gebied D.
Hoe maken we v?

We moeten de Cauchy-Riemannvergelijkingen hebben, dus:

$$v(x,y) = \int -u_y \, \mathrm{d}x \text{ en } v(x,y) = \int u_x \, \mathrm{d}y$$

Gewoon doen!

Het boek doet $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$.

Delft University of Technology

Voorbeeld: $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

$u(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ is harmonisch op het rechterhalfvlak.

We hebben

$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ en } u_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Integreer

$$v(x,y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x \text{ en } v(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y$$

Voorbeeld: $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

Er komt

$$v(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = \arctan\frac{y}{x} + h_1(x)$$

en

$$v(x,y) = -\int \frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x = -\arctan\frac{x}{y} + h_2(y)$$

Herinner: als $x>0$ dan $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ en
als $x<0$ dan $\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

Voorbeeld: $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

Aangezien $\arctan\frac{y}{x}$ en $-\arctan\frac{x}{y}$ een constante verschillen concluderen we

$$v(x,y) = \arctan\frac{y}{x} + c$$

voor $x > 0$.

Voorbeeld: $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$

We kunnen verder: $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ is harmonisch op $\mathbb{C}_-$, kunnen we $v(x,y)$ op heel $\mathbb{C}_-$ definiëren?
Stel we willen $v(1,1)=\frac{\pi}{4}$

Dan moeten we $v(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ op het rechterhalfvlak nemen

Op het bovenhalfvlak ($y>0$) moeten we $v(x,y)=-\arctan\frac{x}{y}+\frac{\pi}{2}$ nemen

Op het onderhalfvlak ($y<0$) moeten we $v(x,y)=-\arctan\frac{x}{y}-\frac{\pi}{2}$ nemen (omdat $v(1,-1)=-\frac{\pi}{4}$)

Voorbeeld: $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, methode 2

We weten: als $f = u + v\mathrm{i}$ dan geldt $f'(a) = u_x - u_y\mathrm{i}$.

Bekijk dus $g = u_x - u_y\mathrm{i}$:

$$g(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x+y\mathrm{i}} = \frac{1}{z}$$

We moeten dus $f(z) = \log z$ hebben.

Een derde methode

Er is een derde methode in het boek maar die werkt hier niet.

Als $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ een harmonisch polynoom is dan geeft

$$f(z) = 2u\left(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2i}z\right) - u(0,0)$$

een (analytisch) polynoom in z met $u = \operatorname{Re} f$ (zie Opgave 19).

Dit werkt ook als u harmonisch is op een omgeving van $(0,0)$.

Opgaven

Voor vrijdag:
Nuttige opgaven: I.5: 1, 2, 3, 5, 7, 21
Verdiepende opgaven: I.5: 4, 6, 9, 11, 12, 19, 20