TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.4, donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 12 mei, 2016

TU Delft
Delft University of Technology

Outline

1. II.2 The Cauchy Integral Theorem
   - Primitieven en zo
   - Stelling van Cauchy-Goursat
   - Een paar integralen

Gebied

Een gebied (in het boek: domain) is een samenhangende open deelverzameling van $\mathbb{C}$.

Theorem II.2.4

Stelling

Stel $D \subseteq \mathbb{C}$ is een gebied en $f : D \to \mathbb{C}$ is continu.
Dan zijn equivalent

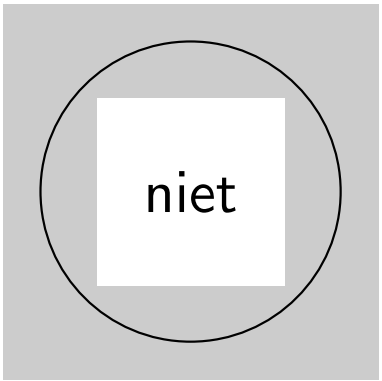
1. *de integraal van f langs een kromme in D hangt alleen van het begin- en eindpunt af*
2. *voor elke gesloten kromme α in D geldt $\int_\alpha f = 0$*
3. *f heeft een primitieve*

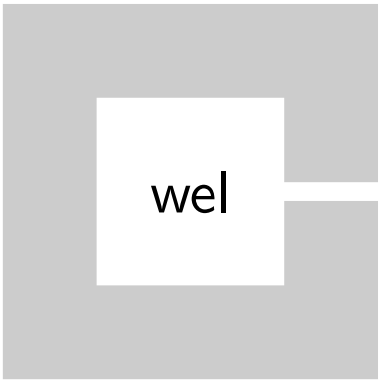
We gaan bewijzen dat analytische functies deze eigenschappen hebben, mits *D enkelvoudig samenhangend* is.

TU Delft
Delft University of Technology

Enkelvoudig samenhangend

Een gebied is enkelvoudig samenhangend als elke gesloten kromme tot een punt kant worden samengetrokken, binnen het gebied.





De stelling

Stelling (II.2.5)

Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ open en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch.
Laat $\langle z_1, z_2, z_3 \rangle$ een driehoek zijn die met zijn inwendige in D ligt.
Dan geldt

$$\int_{\langle z_1, z_2, z_3 \rangle} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

Primitieven maken

Stelling

Laat D een gebied zijn en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch.
Zij $z_\bullet \in D$ en $r > 0$ met $U_r(z_\bullet) \subseteq D$.
Dan heeft f een primitieve op $U_r(z_\bullet)$.

Bewijs: definieer

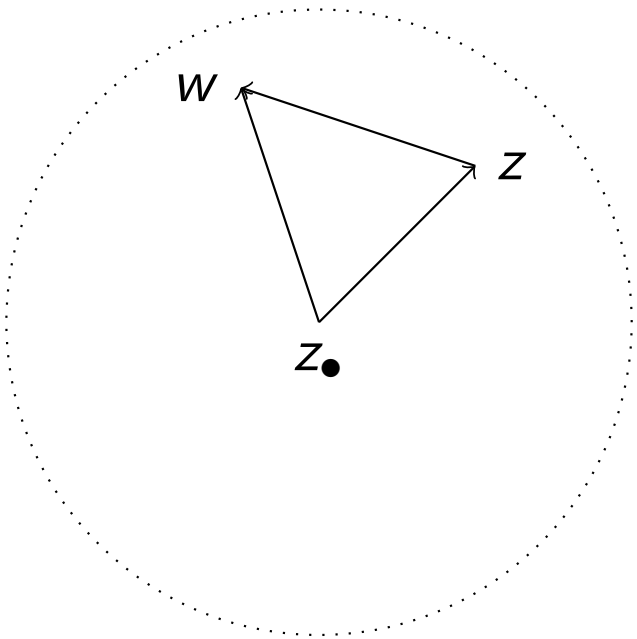
$$F(z) = \int_{z_\bullet}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

waarbij we over de rechte lijn van $z_\bullet$ naar z integreren.

TU Delft
Delft University of Technology

Primitieven maken

Het bewijs van Theorem II.2.4 werkt hier; we hebben aan driehoeken genoeg.



$$F(w) - F(z) = \int_z^w f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

en

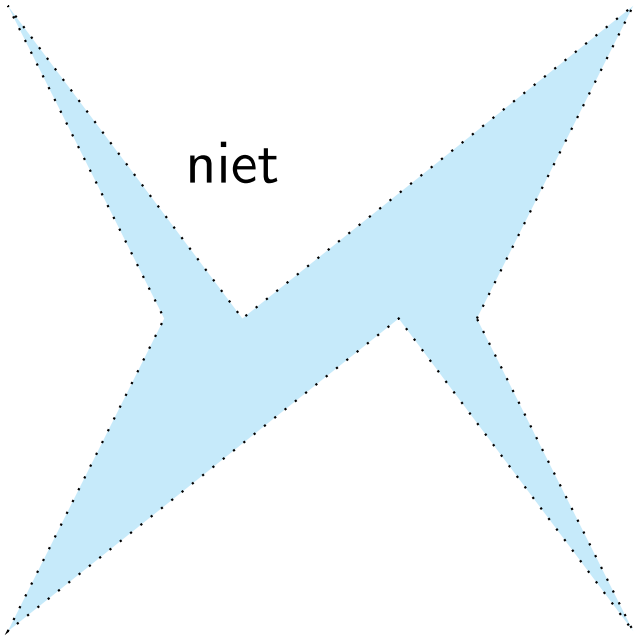
$$\int_z^w f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = f(z)(w-z) + \int_z^w f(\zeta) - f(z)\,\mathrm{d}\zeta$$

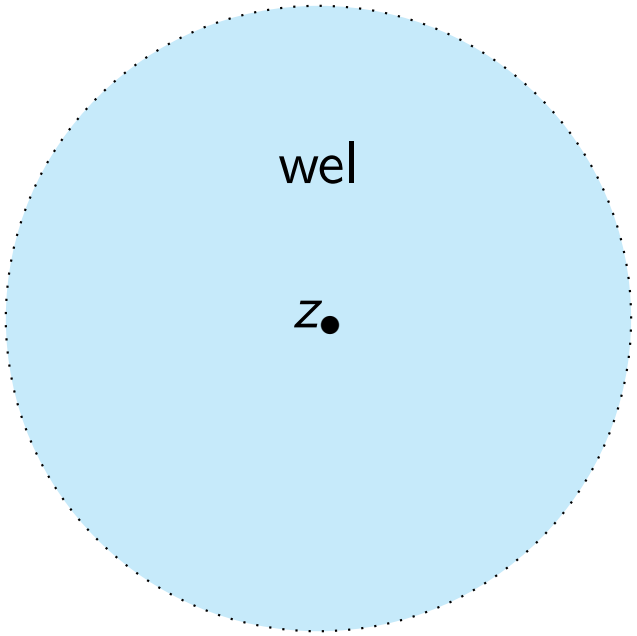
Nu werken dezelfde (af)schattingen

TU Delft
Delft University of Technology

Stervormige gebieden

We noemen een gebied D *stervormig* als er een punt $z_\bullet \in D$ is zó dat voor elke $z \in D$ het (rechte) lijnstuk $[z_\bullet, z]$ geheel binnen D ligt.





TU Delft
Delft University of Technology

Stervormige gebieden

Andere voorbeelden:

- $\mathbb{C}$ wel;
- $\mathbb{C}_-$ wel;
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ niet

Theorem II.2.7

Stelling (II.2.7)

Als D een stervormig gebied is dan heeft elke analytische functie $f : D \to \mathbb{C}$ een primitieve.
En dus geldt

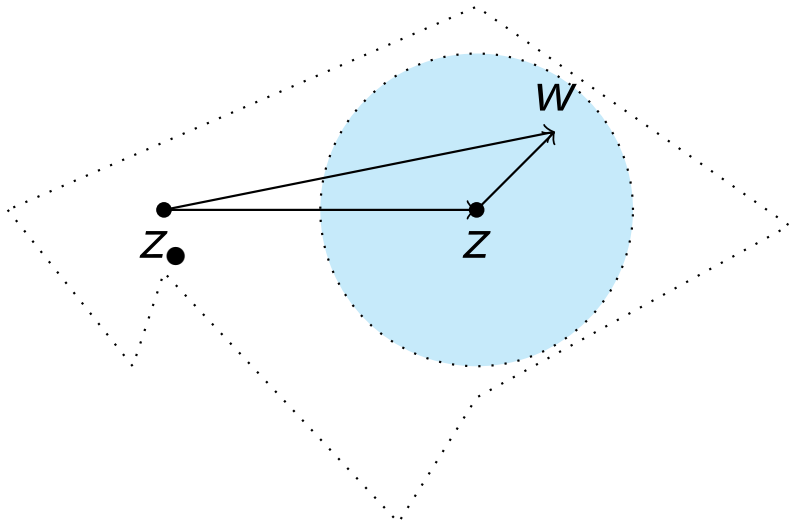
$$\int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

voor elke analytische $f : D \to \mathbb{C}$ en elke gesloten kromme α in D

Theorem II.2.7

Hetzelfde bewijs als voor de cirkelschijf:

$$F(z) = \int_{z_\bullet}^{z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$



Alle rechte lijnen in het bewijs liggen binnen D.

TU Delft
Delft University of Technology

De Logaritme

Het gebied $\mathbb{C}_-$ is stervormig, met 'middelpunt' 1, en z^{-1} is analytisch op $\mathbb{C}_-$.
Dus

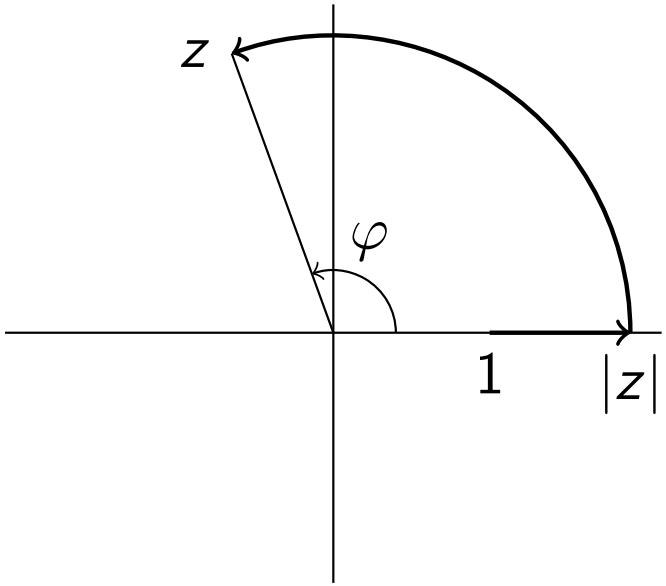
$$L(z) = \int_1^z \frac{1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$$

definieert een primitieve van z^{-1}.
Dat zou dus $\operatorname{Log} z$ moeten zijn.

TU Delft
Delft University of Technology

De Logaritme

Neem de volgende kromme van 1 naar z.



Het lijnstuk van 1 naar $|z|$
De boog van $|z|$ naar z

$$\int_1^z \zeta^{-1}\,\mathrm{d}\zeta = \int_1^{|z|} t^{-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\varphi} \mathrm{i}\,\mathrm{d}t$$

(zie bord)

Uitkomst: $\ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z$

TU Delft
Delft University of Technology

Heel nuttig resultaat

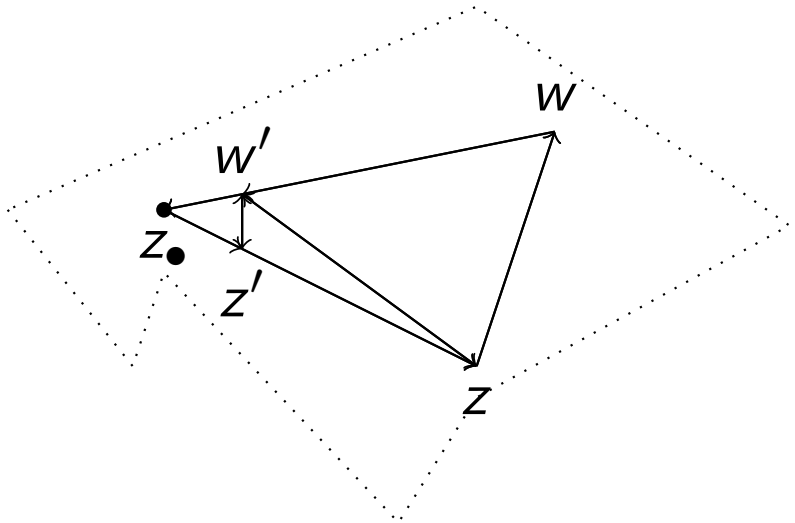
Stel D is stervormig met middelpunt $z_\bullet$, stel $f : D \to \mathbb{C}$ is continu en differentieerbaar in elk punt van D, *behalve* (misschien) in $z_\bullet$.

Dan heeft f een primitieve op D.

Voor het bewijs van Stelling II.2.5 was alleen nodig dat $\int_\Delta f = 0$ voor driehoeken waar $z_\bullet$ een hoekpunt van is (en die binnen D liggen natuurlijk).

TU Delft
Delft University of Technology

Heel nuttig resultaat



Verdeel $\langle z_\bullet, z, w\rangle$ in drie driehoeken:
$\langle z_\bullet, z', w'\rangle$, $\langle z', z, w'\rangle$, en $\langle z, w, w'\rangle$.

Er geldt

$$\int_{\langle z_\bullet,z,w\rangle} f = \int_{\langle z_\bullet,z',w'\rangle} f \qquad \text{en} \qquad \lim_{\substack{z'\to z_\bullet\\ w'\to z_\bullet}} \int_{\langle z_\bullet,z',w'\rangle} f = 0$$

TU Delft
Delft University of Technology

Elementair gebied

Een gebied D heet *elementair* als elke analytische $f : D \to \mathbb{C}$ een primitieve heeft.

Stervormige gebieden zijn elementair (Stelling II.2.7).

Een gebied is elementair dan en slechts dan als het enkelvoudig samenhangend is.

De vereniging van twee elementaire gebieden is elementair mits hun doorsnede niet-leeg en samenhangend is. Plaatje op het bord.

Elementair gebied

Stel D is een elementair gebied, en stel $f : D \to \mathbb{C}$ is analytisch zó dat f' analytisch is en $f(z) \neq 0$ voor alle $z \in D$.
Dan geldt

- f heeft een analytische logaritme: er is een analytische $h : D \to \mathbb{C}$ zó dat $f(z) = \exp(h(z))$ op D.
- f heeft analytische n-demachtswortels: analytische functies g_n op D die voldoen aan $f = g_n^n$ (voor $n \in \mathbb{N}$).

Voor h: neem een (geschikte) primitieve F van f'/f
Voor g_n: definieer $g_n(z) = \exp(\frac{1}{n}h(z))$.

TU Delft
Delft University of Technology

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cos ax \, \mathrm{d}x$

We bekijken $f(z) = \exp(-\frac{1}{2}z^2)$, analytisch op heel $\mathbb{C}$.

Een gesloten kromme: α_R, de rechthoek met hoekpunten $-R$, R, $R + a\mathrm{i}$ and $-R + a\mathrm{i}$.

Cauchy-Goursat:

$$\oint_{\alpha_R} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$$

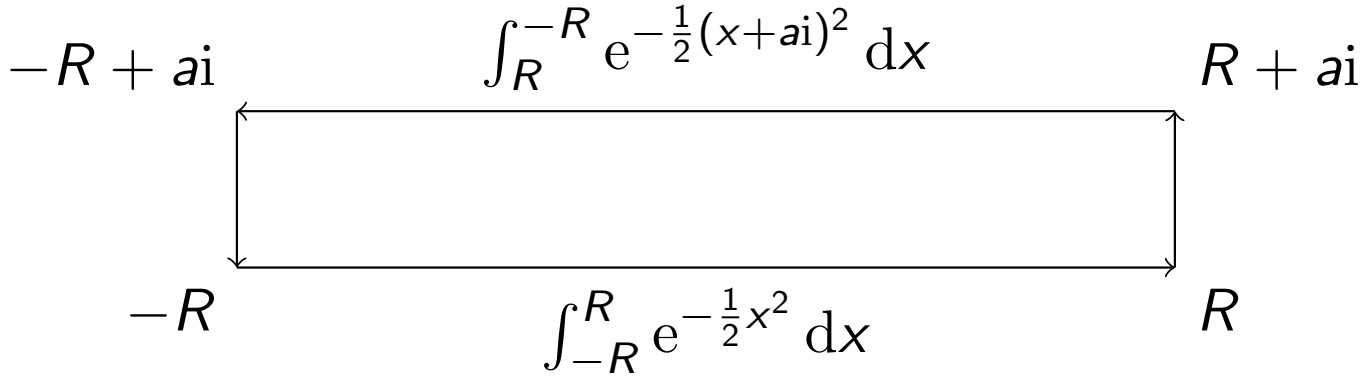
.

We gebruiken vaak $\oint_\alpha$ als α een gesloten kromme is.

TU Delft
Delft University of Technology

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cos ax \, \mathrm{d}x$

De integraal over α_R is de som van vier integralen: langs de boven- en onderkant:



en langs de zijkanten.

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cos ax \, \mathrm{d}x$

- Langs de zijkanten (α_2 en α_4): $z = \pm R + \mathrm{i}t$ $(0 \leqslant t \leqslant a)$
- Functiewaarde: $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\pm R+\mathrm{i}t)^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}R^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} \cdot \mathrm{e}^{\mp \mathrm{i}Rt}$
- Modulus: $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}R^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}R^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2}$
- Lengte van de zijde: a

TU Delft
Delft University of Technology

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cos ax \, \mathrm{d}x$

Via 'lengte maal modulus':

$$\left| \int_{\alpha_2} f(z) \, \mathrm{d}z \right| \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}R^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2} \cdot a$$

en dus $\lim_{R\to\infty} \int_{\alpha_2} f(z) \, \mathrm{d}z = 0$ (ook voor α_4).

TU Delft
Delft University of Technology

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cos ax \, \mathrm{d}x$

Langs de bovenkant:

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x+a\mathrm{i})^2} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2}(\cos ax - \mathrm{i} \sin ax)$$

De integraal is, via $\int_R^{-R} = -\int_{-R}^{R}$, gelijk aan:

$$-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cos ax \, \mathrm{d}x + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2} \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \sin ax \, \mathrm{d}x$$

Het imaginaire deel is gelijk aan nul, de functie is oneven.

TU Delft
Delft University of Technology

$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cos ax \, \mathrm{d}x$

Alles bij elkaar nemen: $0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ impliceert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cos ax \,\mathrm{d}x = 0$$

of

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \cos ax \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}a^2}\sqrt{2\pi}$$

(zoals iedereen weet . . .)

TU Delft
Delft University of Technology

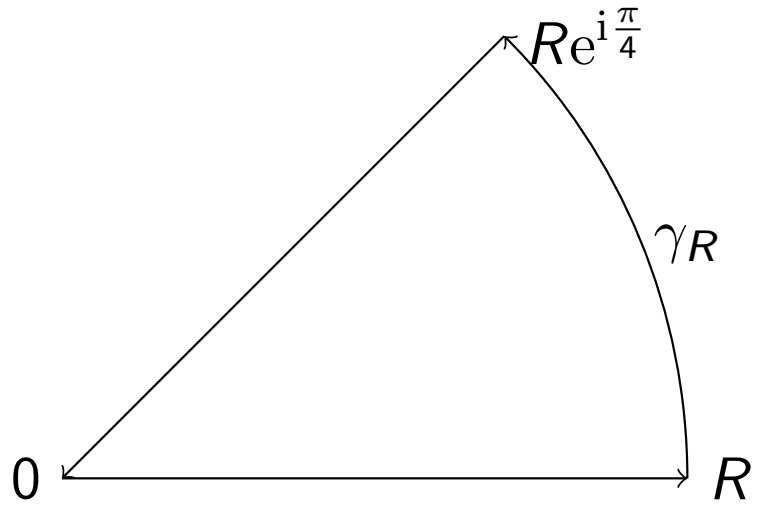
Fresnel integralen

Laten we $\int_0^\infty \cos x^2 \,\mathrm{d}x$ en $\int_0^\infty \sin x^2 \,\mathrm{d}x$ uitrekenen.

We werken met $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}z^2}$ en de kromme α_R die bestaat uit

Het interval $[0, R]$
De boog γ_R van R naar $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
Het lijnstuk van $R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ naar 0

Dus, $\oint_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$



Delft University of Technology

De integraal opdelen

De integraal $\oint_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ is de som van

- $\int_0^R \cos x^2 + i \sin x^2\,\mathrm{d}x$
- $\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$
- $\int_R^0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\eta t)^2}\,\mathrm{d}\eta t$, met $\eta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{1}{2}\sqrt{2}$

De laatste integraal is gelijk aan $-\eta \int_0^R \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, toch?

TU Delft
Delft University of Technology

De boog, deel I

Bekijk $\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Met 'lengte maal modulus' krijgen we

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant 1 \cdot R \cdot \frac{\pi}{4}$$

Want: $|f(z)|$ neem zijn maximum, 1, op γ_R aan in R.

Dat helpt niet erg.

De boog, deel II

Bekijk $\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ (nog een keer, en beter).

Parametrizeer γ_R: $z(\theta) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ (met $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$).

Dus, met $(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2 = R^2(\cos 2\theta + \mathrm{i}\sin 2\theta)$, krijgen we

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}R^2\cos 2\theta}\cdot \mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,\mathrm{d}\theta\right|$$
$$\leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} R\mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

TU Delft
Delft University of Technology

De boog, deel II.a

Er geldt $\lim_{R\to\infty} R\mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta} = 0$ als $\theta \neq 0$.

Niet uniform.

Niet monotoon, dus we hebben niets aan de monotone-convergentiestelling.

Maar, . . . , misschien wel iets aan de gedomineerde-convergentiestelling.

De boog, deel II.a

Neem $\theta > 0$ vast en bekijk wat de maximale waarde van $R\mathrm{e}^{-R^2 \sin 2\theta}$ is (NB $\sin 2\theta > 0$, want $\theta \leqslant \frac{\pi}{4}$).

Afgeleide naar R is $\mathrm{e}^{-R^2 \sin 2\theta}(1 - 2R^2 \sin 2\theta)$.

Via tekenschema: $R\mathrm{e}^{-R^2 \sin 2\theta}$ is maximaal als $R = (2 \sin 2\theta)^{-\frac{1}{2}}$ en het maximum is

$$\frac{1}{\sqrt{2 \sin 2\theta}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e} \sin 2\theta}}$$

TU Delft
Delft University of Technology

De boog, deel II.a

We zien: voor alle R en alle $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$ geldt

$$R\mathrm{e}^{-R^2 \sin 2\theta} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e} \sin 2\theta}}$$

Ook geldt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{e} \sin 2\theta}}\,\mathrm{d}\theta < \infty$$

want $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin 2\theta}{2\theta} = 1$ en dus

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sqrt{4\mathrm{e}\theta}}{\sqrt{2\mathrm{e} \sin 2\theta}} = 1$$

TU Delft
Delft University of Technology

De boog, deel II.a

En

$$\frac{1}{2\sqrt{\mathrm{e}}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{\theta}}\,\mathrm{d}\theta$$

convergeert.

De gedomineerde-convergentiestelling geeft nu dat

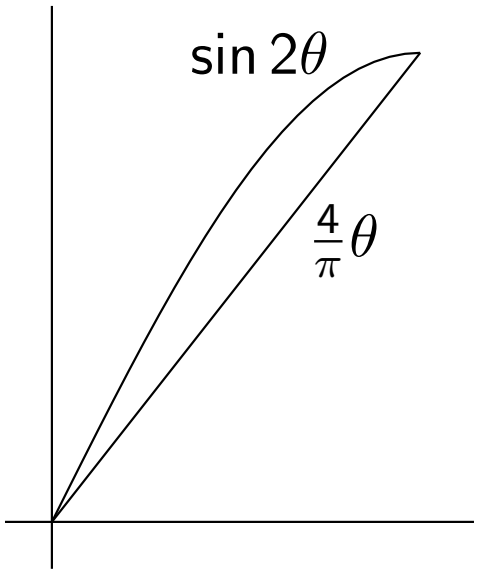
$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} R\mathrm{e}^{-R^2\sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0$$

De boog, deel II.b

We kunnen $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$ ook direct afschatten.

Op het interval $[0, \frac{\pi}{4}]$ hebben we

$$\sin 2\theta \geqslant \frac{4}{\pi}\theta$$



en dus

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2 \frac{4}{\pi}\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

TU Delft
Delft University of Technology

De boog, deel II.b

We hebben

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2 \sin 2\theta}\,\mathrm{d}\theta \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-R^2 \frac{4}{\pi}\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4R^2}(1-\mathrm{e}^{-R^2})$$

Conclusie

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\pi}{4R}(1-\mathrm{e}^{-R^2})$$

en dus

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

TU Delft
Delft University of Technology

De antwoorden

Nu alles bij elkaar rapen:

$$0 = \lim_{R\to\infty} \oint_{\alpha_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^\infty \cos x^2 + \mathrm{i}\sin x^2\,\mathrm{d}x - \eta\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

en dus

$$\int_0^\infty \cos x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \sin x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$$

TU Delft
Delft University of Technology

Opgaven

Nuttige opgaven: II.2: 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
Verdiepende opgaven: II.2: 2, 4,