TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.5, donderdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 19 mei, 2016

Delft University of Technology

Outline

Delft University of Technology

Eenvoudig geval

Lemma (II.3.1)

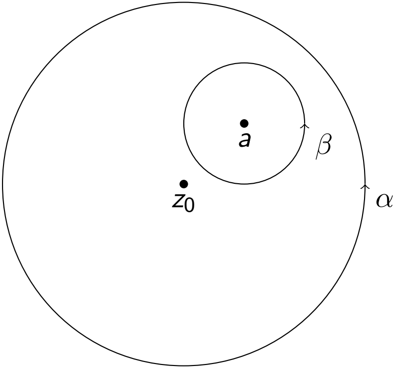
Laat $z_0 \in \mathbb{C}$ *en* $r > 0$ *en definieer* $\alpha(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, *met* $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. *Dan geldt*

$$\oint_\alpha \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}$$

voor elke a *met* $|a - z_0| < r$.

Delft University of Technology

Plaatje



α: de cirkel om z_0

Het punt a

β: een cirkel om a

We weten:

$$\oint_\beta \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}$$

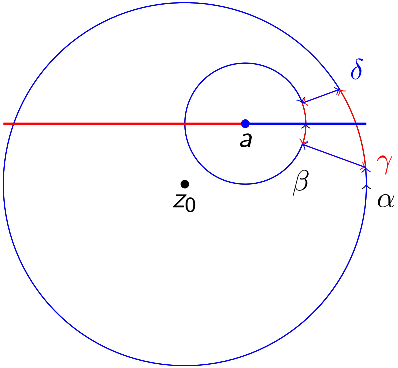
We willen:

$$\oint_\alpha \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta = 2\pi\mathrm{i}$$

We gaan bewijzen

$$\oint_\beta \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta = \oint_\alpha \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta$$

Bewijs



We maken twee krommen: γ en δ

$\mathrm{Log}(z-a)$ is een primitieve van $\frac{1}{z-a}$, dus $\oint_\gamma \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta = 0$

$\log(z-a)$ (geschikte tak) is een primitieve van $\frac{1}{z-a}$, dus $\oint_\delta \frac{1}{\zeta - a}\,\mathrm{d}\zeta = 0$

Ten slotte: $0 = \oint_\gamma + \oint_\delta = \oint_\alpha - \oint_\beta$

De integraalformule van Cauchy

Stelling (II.3.2)

Zij D open in $\mathbb{C}$ en $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch. Zij $z_0 \in D$ en neem $r > 0$ zó dat de gesloten schijf $\bar{U}_r(z_0)$ binnen D ligt. Dan geldt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$$

voor elke $z \in U_r(z_0)$. Hier: $\alpha(t) = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

Delft University of Technology

Bewijs

Wegens de compactheid van $\bar{U}_r(z_0)$ is er een $R > r$ met $U_R(z_0) \subseteq D$. We werken verder in het stervormige gebied $U_R(z_0)$.
De functie

$$g(w) = \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & w \neq z \\ f'(z) & w = z \end{cases}$$

is analytisch overal, behalve (misschien) in z, maar in z is g wel continu.
Dus g heeft een primitieve op $U_R(z_0)$.

Bewijs

Conclusie $\oint_\alpha g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$.
Maar dan vinden we

$$\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta - \oint_\alpha \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \oint_\alpha \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

ofwel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f(z)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$$

Klaar!

Middelwaardestelling

In het bijzonder:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\mathrm{d}\zeta$$

als je die integraal helemaal uitschrijft komt er

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{d}t$$

dus $f(z_0)$ is het 'gemiddelde' van de functiewaarden op de cirkel (op elke cirkel met z_0 als middelpunt).

Voorbeelden

Bereken $\oint_\alpha \frac{\mathrm{e}^\zeta}{\zeta^2+9}\,\mathrm{d}\zeta$, als

- α de eenheidscirkel is
- α de cirkel met straal 1 om $3\mathrm{i}$ is
- α de cirkel met straal 1 om $-3\mathrm{i}$ is

Die doen we op het bord.

Delft University of Technology

Opgave II.3.10 ($n = 1$)

Gegeven een kromme α (met beeldverzameling $\bar{\alpha}$) en een continue functie $f : \bar{\alpha} \to \mathbb{C}$ dan definieert

$$h(z) = \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \,\mathrm{d}\zeta$$

een analytische functie op $\mathbb{C} \setminus \bar{\alpha}$:

$$h'(z) = \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\zeta$$

Dit is een belangrijke manier om analytische functies te maken.

Delft University of Technology

Bewijs

We noemen de tweede integraal even $k(z)$ en we bewijzen $h'(z) = k(z)$.

Dat doen we door een z vast te nemen en voor $w \neq z$ naar

$$h(w) - \big(h(z) + k(z)(w - z)\big)$$

te kijken. Als we dat uitschrijven komt er

$$\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - w}\,\mathrm{d}\zeta - \left(\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta + (w - z)\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right)$$

Maak daar één integraal van en haal $f(\zeta)$ buiten de haken.

Bewijs

Binnen de haken houden we dit over:

$$\frac{1}{\zeta - w} - \frac{1}{\zeta - z} - \frac{w - z}{(\zeta - z)^2}$$

Netjes alles onder één noemer brengen geeft:

$$\frac{(w - z)^2}{(\zeta - w)(\zeta - z)^2}$$

Kortom, het verschil is gelijk aan

$$(w - z)^2 \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta$$

Delft University of Technology

Bewijs

Zij nu R de afstand van z tot $\bar{\alpha}$ en bekijk alleen w-en met $|w - z| < \frac{1}{2}R$.
Dat geldt voor elke ζ op $\bar{\alpha}$ dat

$$|(\zeta - w)(\zeta - z)^2| \geqslant \frac{1}{2}R^3$$

Neem nu ook nog $M = \max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \bar{\alpha}\}$.
Dan geldt, als $|w - z| < \frac{1}{2}R$,

$$\left| \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - w)(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{2M}{R^3} \cdot l(\alpha)$$

Delft University of Technology

Bewijs

Conclusie:

$$\left|h(w) - \bigl(h(z) + k(z)(w - z)\bigr)\right| \leqslant \frac{2M \cdot l(\alpha)}{R^3}|w - z|^2$$

en dat is volgens ons lijstje karakteriseringen van differentieerbaarheid genoeg om in te zien dat h differentieerbaar is in z en dat $h'(z) = k(z)$.

Opgave II.3.10 (n willekeurig)

Gegeven een kromme α (met beeldverzameling $\bar{\alpha}$) en een continue functie $f : \bar{\alpha} \to \mathbb{C}$. Definieer, voor $n \in \mathbb{N}$:

$$F_n(z) = \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} \,\mathrm{d}\zeta$$

Elke F_n is analytisch op $\mathbb{C} \setminus \bar{\alpha}$ en

$$F_n'(z) = nF_{n+1}(z)$$

Leibniz rules

Differentieer de formule van Cauchy:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\alpha \frac{\partial}{\partial z}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

Dit mag dus, wegens Opgave II.3.10! Zie ook pagina's 94-95.

Delft University of Technology

Voorbeelden

Bereken $\oint_\alpha \frac{e^\zeta}{(\zeta^2+9)^2}\,d\zeta$, als

- α de eenheidscirkel is
- α de cirkel met straal 1 om $3i$ is
- α de cirkel met straal 1 om $-3i$ is

Die doen we op het bord.

Delft University of Technology

In het algemeen

Dankzij Opgave II.3.10 mogen we blijven differentiëren:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \,\mathrm{d}\zeta$$

Dit gebruikt in feite alleen maar

$$\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

Stelling van De Morera

Zij $D \subseteq \mathbb{C}$ open en $f : D \to \mathbb{C}$ continu zó dat

$$\int_\Delta f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = 0$$

voor *elke* driehoek die met zijn inwendige binnen D ligt.
Dan is f analytisch.

Immers, f heeft op elke open schijf binnen D een primitieve en die is oneindig vaak differentieerbaar; f is dus ook differentieerbaar op elke schijf.

Gehele functies

Een functie die analytisch is op heel $\mathbb{C}$ noemen we een *gehele functie*.

Stelling (Liouville)

Elke begrensde gehele functie is constant.

Zij $z \in \mathbb{C}$, er geldt

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|\zeta - z| = R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta$$

voor alle $R > 0$.

Gehele functies

Met ‘lengte maal modulus’, en $M = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in \mathbb{C}\}$, vinden we

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R}$$

voor alle $R > 0$.

Dus $f'(z) = 0$ voor alle z.

Delft University of Technology

Hoofdstelling van de Algebra

Theorem

Zij p een niet-constant complex polynoom.
Dan heeft $p(z) = 0$ een oplossing in $\mathbb{C}$.

En dus heeft een polynoom van graad n precies n nulpunten, geteld naar multipliciteit: $z^{10} = 0$ heeft, bijvoorbeeld, tien nulpunten (allemaal gelijk aan 0).

Hoofdstelling van de Algebra

We nemen aan dat $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ (met $n \geqslant 1$) en dat $p(z) = 0$ geen oplossingen heeft.

- Merk op: $\lim_{z\to\infty} p(z)z^{-n} = 1$
- neem R zo groot dat $\left|p(z)z^{-n}\right| \geqslant \frac{1}{2}$ als $|z| \geqslant R$ en $\frac{1}{2}R^n \geqslant \left|p(0)\right| + 1$.
- Dus, als $|z| \geqslant R$ dan $\left|p(z)\right| \geqslant \left|p(0)\right| + 1$.
- Neem z_0 zó dat $\left|p(z_0)\right|$ het minimum van $\left|p(z)\right|$ op de gesloten en begrensde schijf $\{z : |z| \leqslant R\}$ is.

Hoofdstelling van de Algebra

We hebben R en z_0 zó dat

- Als $|z| \leqslant R$ dan $\bigl|p(z_0)\bigr| \leqslant \bigl|p(z)\bigr|$
- Als $|z| \geqslant R$ dan $\bigl|p(z_0)\bigr| \leqslant \bigl|p(0)\bigr| < \bigl|p(0)\bigr| + 1 \leqslant \bigl|p(z)\bigr|$
- Dus, $\bigl|p(z_0)\bigr|$ is het globale minimum van $\bigl|p(z)\bigr|$ op $\mathbb{C}$
- We hebben aangenomen dat $p(z_0) \neq 0$
- Voor alle z hebben we $\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leqslant \left|\frac{1}{p(z_0)}\right|$

We zien dat $\frac{1}{p(z)}$ een gehele functie is (want p is geheel) en begrensd, maar niet constant; tegenspraak.

Delft University of Technology

Cauchy's afschattingen

Stelling

Neem aan f is analytisch op $\bar{U}_R(z_0)$; voor $r \leqslant R$ definiëren we $M(r) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}$. Dan geldt

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqslant n! \cdot \frac{M(r)}{r^n}$$

voor alle n.

Bewijs: pas 'lengte maal modulus' toe op de integraalformule.

Voorbeeld

Gegeven $|f(z)| \leqslant 1/(1-|z|)$ op $U_1(0)$;
hoe groot kan $|f^{(n)}(0)|$ zijn?

Neem de cirkel met straal $n/(n+1)$ om 0;
op de cirkel geldt $1 - |\zeta| = 1/(n+1)$,
en dus $|f(\zeta)| \leqslant n+1$.

Pas de afschatting toe:

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant n! \cdot \frac{n+1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = (n+1)! \left(\frac{n+1}{n}\right)^n < (n+1)! \cdot \mathrm{e}$$

Delft University of Technology

Opgaven

Nuttige opgaven: II.3: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Verdiepende opgaven: II.3: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 16.

Delft University of Technology