TW2040: Complexe Functietheorie

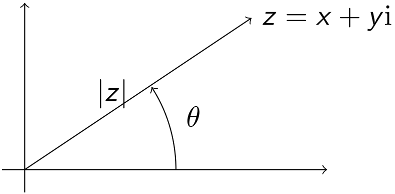
week 4.5, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 23 mei, 2016

Via $z = x + y\mathrm{i} = (x, y)$ kunnen we complexe getallen ook in poolcoördinaten uitdrukken:



- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$; de modulus
- θ; de hoek, het argument

Opgave I.1.11 (b)

Om te beginnen

$$
\begin{aligned}
|1 - z\bar{a}|^2 - |z - a|^2 &= (1 - z\bar{a})(1 - \bar{z}a) - (z - a)(\bar{z} - \bar{a}) \\
&= 1 - (\bar{z}a + z\bar{a}) + z\bar{z}a\bar{a} - (z\bar{z} - (\bar{z}a + z\bar{a}) + a\bar{a}) \\
&= 1 - |z|^2 - |a|^2 + |z|^2|a|^2 \\
&= (1 - |z|^2)(1 - |a|^2)
\end{aligned}
$$

Dus

$$|z| = 1 \text{ dan en slechts dan als } \left|\frac{z-a}{1-z\bar{a}}\right| = 1$$

en, als $|a| < 1$

$$|z| < 1 \text{ dan en slechts dan als } \left|\frac{z-a}{1-z\bar{a}}\right| < 1$$

en, als $|a| > 1$

$$|z| > 1 \text{ dan en slechts dan als } \left|\frac{z-a}{1-z\bar{a}}\right| < 1$$

Delft University of Technology

Het Argument

We hebben

- $x = |z| \cos \theta$
- $y = |z| \sin \theta$

Er zijn oneindig veel waarden voor θ.
De Hoofdwaarde, dat is de hoek in $(-\pi, \pi]$, noteren we $\operatorname{Arg} z$,
Andere waarden: $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

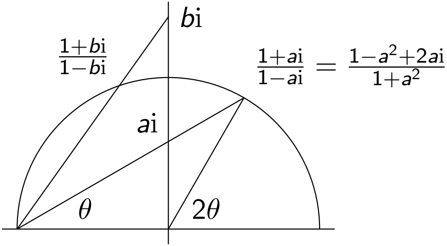
Delft University of Technology

Opgave I.1.2

Modulus er argument van $\left|\frac{1+a\mathrm{i}}{1-a\mathrm{i}}\right|$ $(a \in \mathbb{R})$.

Modulus: 1 (quotiënt van $\sqrt{1+a^2}$ en $\sqrt{1+a^2}$)

Argument: $2\arctan a$
Plaatje op het bord.



Andere oplossing van opgave 2: $\theta = \arctan a$.
Stelling van Thales: deze hoek is twee keer zo groot

Hoofdwaarde van de Logaritme:

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z$$

Hoofdwaarde van de wortel:

$$z^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\tfrac{1}{2} \ln|z| + \mathrm{i}\tfrac{1}{2} \operatorname{Arg} z\right) = \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2} \operatorname{Arg} z}$$

Alle waarden van de Logaritme:

$$\log z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z + 2k\pi\mathrm{i} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Alle waarden van de wortel:

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} &= \exp(\tfrac{1}{2}\ln|z| + \mathrm{i}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Arg}\, z + k\pi\mathrm{i}) \\ &= \sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\,\mathrm{Arg}\, z + k\pi\mathrm{i}} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ &= \pm\sqrt{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\,\mathrm{Arg}} \end{aligned}$$

$+$ als k even is en $-$ als k oneven is

Hoofdwaarde van machten:

$$a^b = \exp(b \operatorname{Log} a) = \exp(b \ln|a| + \mathrm{i} b \operatorname{Arg} a)$$

Alle waarden van machten:

$$\begin{aligned} a^b &= \exp(b \operatorname{Log} a + 2bk\pi\mathrm{i}) \\ &= \exp(b \ln|a| + \mathrm{i} b \operatorname{Arg} a + 2bk\pi\mathrm{i}) \\ &= \exp(b \ln|a| + \mathrm{i} b \operatorname{Arg} a) \cdot \exp(2bk\pi\mathrm{i}) \\ &= \exp(b \ln|a| + \mathrm{i} b \operatorname{Arg} a) \cdot 1^b \end{aligned}$$

Want: $1^b = \exp(2bk\pi\mathrm{i})$ $(k \in \mathbb{Z})$

We hebben $w = \arccos z$ desda $z = \cos w = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w})$.

Oplossen: $2z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}$

Of $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} + 1 = 0$

Of $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - z)^2 = z^2 - 1$

Of $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (twee waarden voor $\sqrt{z^2 - 1}$)

Of $w = \frac{1}{\mathrm{i}} \operatorname{Log}(z + \sqrt{z^2 - 1}) + 2k\pi$

(oneindig vaak twee waarden dus)

De afgeleide van een functie f in een punt z_0 is

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

als deze bestaat.

Cauchy-Riemann:
Als $f = u + \mathrm{i}v$ dan geldt, zoals we weten, $u_x = v_y$ en $u_y = -v_x$.

Reflectie

Stel D is een gebied en $f : D \to \mathbb{C}$ is analytisch, schrijf $\overline{D} = \{\bar{z} : z \in D\}$.

De functie $g : \overline{D} \to \mathbb{C}$ gegeven door $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ en de functie $h : D \to \mathbb{C}$ gegeven door $h(z) = \overline{f(z)}$ zijn niet analytisch (tenzij f constant is).
Kijk maar naar de Cauchy-Riemannvergelijkingen

Reflectie

De functie $z \mapsto \overline{f(\overline{z})}$ is op $\overline{D}$ wel analytisch.

Hij is zeker reëel differentieerbaar en door de twee keer spiegelen gelden de Cauchy-Riemannvergelijkingen weer.

Of ook via onze criteria: we weten, voor $z, z_0 \in \overline{D}$

$$f(\overline{z}) - f(\overline{z_0}) \approx f'(\overline{z_0})(\overline{z} - \overline{z_0})$$

zet er nu strepen boven.

Zoals we later zullen zien: als f op $\mathbb{R}$ alleen reële waarden aanneemt dan geeft dit ons: $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$.

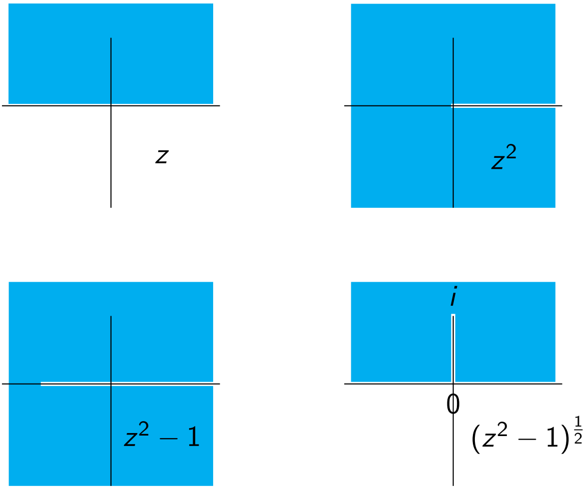
Dus: $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$, $\overline{\sin(z)} = \sin(\bar{z})$, ...

Ook voor logaritmen, wortels, ..., mits het domein symmetrisch is om de positieve reële as.

Een afbeelding

Wat gebeurt er met het boven-halfvlak onder de afbeelding $z \mapsto \sqrt{z^2 - 1}$?
En wat betekent $\sqrt{z^2 - 1}$ (hier) eigenlijk?

Een afbeelding



Een afbeelding

NB de 'wortel' die hier gebruikt is heeft als definitie

$$w^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|w|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\arg w}$$

waarbij $\arg w$ zó gekozen is dat $0 < \arg w < 2\pi$.