TW2040: Complexe Functietheorie

week 4.6, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 30 mei, 2016

Outline

1. III.1 Uniform approximation
   - Lokale uniform convergentie
   - Limieten van rijen analytische functies
   - Reeksen: normale convergentie
2. III.2 Power Series
   - Algemeenheden
   - Gedrag op de rand
   - Machtreeksen voor analytische functies

Delft University of Technology

Uniforme Convergentie

Herhaling:

een rij functies $\langle f_n \rangle_n$ van D naar $\mathbb{C}$ convergeert *uniform* op D naar een functie $f : D \to \mathbb{C}$ als

voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geqslant N$ en alle $z \in D$ geldt

$$\left| f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon$$

Delft University of Technology

Lokale Uniforme Convergentie

Een rij functies $\langle f_n \rangle_n$ van D naar $\mathbb{C}$ convergeert *lokaal uniform* op D naar een functie $f : D \to \mathbb{C}$ als

voor elke $z_0 \in D$ een $r > 0$ bestaat zó dat de rij $\langle f_n \rangle_n$ uniform naar f convergeert op $U_r(z_0) \cap D$.

Dus: voor elke $z_0 \in D$ bestaat een $r > 0$ zodanig dat voor elke $\varepsilon > 0$ een $N \in \mathbb{N}$ bestaat zó dat voor alle $n \geqslant N$ en alle $z \in U_r(z_0) \cap D$ geldt

$$\left| f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon$$

Lokale Uniforme Convergentie: voorbeelden

De rij $\langle f_n \rangle_n$ op $D = \{z : |z| < 1\}$, met $f_n(z) = z^n$.

Deze rij convergeert puntsgewijs naar de nulfunctie op D.

Deze rij convergeert niet uniform naar de nulfunctie op D

Deze rij convergeert wel uniform naar de nulfunctie op $U_r(z)$ als $z \in D$ en $r = \frac{1}{2}(1 - |z|)$.

Deze rij is niet uniform convergent maar wel lokaal unform convergent

Delft University of Technology

Lokale Uniforme Convergentie: voorbeelden

De machtreeksen voor $\exp(z)$, $\sin z$, $\cos z$, $\ldots$ convergeren allemaal lokaal uniform (maar niet uniform) op $\mathbb{C}$.

Lokale Uniforme Convergentie: gebruik

Lokale uniforme convergentie is vaak goed genoeg:

de limiet van een lokaal uniform convergente rij *continue* functies is continu, want continuïteit is een lokale eigenschap.

Als K compact is en $\langle f_n \rangle_n$ is lokaal uniform convergent op K dan is $\langle f_n \rangle_n$ ook uniform convergent op K.
Even naar het bord.

Lokale Uniforme Convergentie: gebruik

Belangrijk: zij $\langle f_n \rangle_n$ lokaal uniform convergent op D, met limiet f, dan geldt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha f_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \int_\alpha f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

voor elke stuksgewijs gladde kromme α in D.

Want: $K = \{\alpha(t) : a \leqslant t \leqslant b\}$ is compact, dus de rij convergeert uniform op K.

En dan volgt de bewering uit

$$\left| \int_\alpha f_n - \int_\alpha f \right| \leqslant l(\alpha) \cdot \sup\bigl\{ \bigl| f_n(z) - f(z) \bigr| : z \in K \bigr\}$$

Delft University of Technology

Lokale Uniforme Convergentie en analytische functies

Stelling (III.1.3)

Zij D open en $\langle f_n \rangle_n$ een rij analytische functies van D naar $\mathbb{C}$ die lokaal uniform naar $f : D \to \mathbb{C}$ convergeert.
Dan is f ook analytisch en de rij $\langle f_n' \rangle_n$ convergeert lokaal uniform naar f'.

Analytisch. De Morera: de integraal van f over elke gesloten kromme is gelijk aan 0.

En, natuurlijk, ...

Lokale Uniforme Convergentie en analytische functies

... voor de afgeleide:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\zeta \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \,\mathrm{d}\zeta \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n'(z) \end{aligned}$$

want $f_n \to f$ uniform op een cirkeltje α om z.

Lokale Uniforme Convergentie en analytische functies

De convergentie is lokaal uniform: neem z_0 vast
kies eerst $R > 0$ zò dat de gesloten schijf $\bar{U}_R(z_0)$ binnen D ligt
dan convergeert $\langle f_n \rangle_n$ uniform naar f op $\bar{U}_R(z_0)$
Neem nu $r = \frac{1}{2}R$ en α de cirkel om z_0 met straal R.

We integreren over α

Lokale Uniforme Convergentie en analytische functies

Als nu $|z - z_0| \leqslant r$ en $|\zeta - z_0| = R$ dan $|\zeta - z| \geqslant r$ en dus

$$\begin{aligned} \bigl|f_n'(z) - f'(z)\bigr| &= \left|\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,\mathrm{d}\zeta\right| \\ &\leqslant \frac{R}{r^2} \sup\bigl\{\bigl|f_n(\zeta) - f(\zeta)\bigr| : |\zeta - z_0| = R\bigr\} \end{aligned}$$

onafhankelijk van z.

Dit bewijs werkt voor *elke* afgeleide.
Dus $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokaal uniform voor alle k.

Delft University of Technology

Stone-Weierstraß

Stelling

Als $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continu is dan is er een rij polynomen $\langle p_n \rangle_n$ zó dat $p_n \to f$, uniform op $[0,1]$.

Stel $\langle p_n \rangle_n$ is een rij complexe polynomen zó dat $p_n \to f$, uniform op $\{z : |z| \leqslant 1\}$.
Dan is f continu op $\{z : |z| \leqslant 1\}$ en analytisch op $\{z : |z| < 1\}$.

Dus, bijvoorbeeld, $\overline{z}$ is niet de uniforme limiet van een rij (complexe) polynomen.

Delft University of Technology

Normale convergentie

Als $\langle f_n \rangle_n$ een rij functies is dan noemen we de (bijbehorende) reeks $\sum f_n$ *normaal convergent* (op D) als

voor elke $z_0 \in D$ een $r > 0$ en een rij $\langle M_n \rangle_n$ positieve reële getallen bestaan met

- $\bigl|f_n(z)\bigr| \leqslant M_n$ voor $z \in U_r(z_0) \cap D$, en
- $\sum M_n$ convergeert

Normale convergentie

Welbekend:
als $\sum f_n$ normaal convergent is dan is $\sum f_n$ ook *lokaal uniform* en *lokaal absoluut* convergent. (M-test van Weierstraß)

Ook waar:
Als $\sum f_n$ een normaal convergente reeks van analytische functies is dan is ook $\sum f_n'$ normaal convergent.

Normale convergentie

Laat $z_0 \in D$, als $r > 0$ en $\langle M_n \rangle_n$ als in de definitie zijn en α de cirkel om z_0 met straal r dan geldt, als $|z - z_0| \leqslant \frac{1}{2} r$

$$\left| f_n'(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\alpha \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, \mathrm{d}\zeta \right| \leqslant \frac{4 M_n}{r}$$

Maak dergelijke afschattingen voor hogere afgeleiden.

Delft University of Technology

De Riemann ζ-functie

In de getaltheorie heten de complexe getallen s en $s = \sigma + \mathrm{i}t$.
Voor $n \in \mathbb{N}$ nemen we $s \mapsto n^s$, hoofdtak: $n^s = \exp(s \ln n)$.
En dus $|n^s| = n^\sigma$.

De reeks

$$\sum \frac{1}{n^s}$$

convergeert absoluut en uniform op elk halfvlak
$D_\delta = \{s : \mathrm{Re}\, s \geqslant 1 + \delta\}$ (met $\delta > 0$).

De gewone M-test met $M_n = n^{-(1+\delta)}$ werkt uitstekend.

De Riemann ζ-functie

De reeks convergeert dus normaal op $D = \{s : \operatorname{Re} s > 0\}$ en de som

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

is analytisch op D.

Dit is de ζ-functie van Riemann.

Oude kennis

Elke machtreeks

$$\sum a_n z^n$$

heeft een convergentiestraal: een getal $r \geqslant 0$ of ∞ zó dat

$\sum a_n z^n$ convergeert absoluut als $|z| < r$ en

$\sum a_n z^n$ divergeert als $|z| > r$.

Zie Opgave III.2.6: $r = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

Nieuwe kennis

Karakteriseringen van r.

Definieer

- $r_1 = \sup\{t \geqslant 0 : \lim_n a_n t^n = 0\}$
- $r_2 = \sup\{t \geqslant 0 : \langle a_n t^n \rangle_n \text{ is begrensd}\}$

Dan geldt: $r = r_1 = r_2$.

Er geldt zeker $r \leqslant r_1 \leqslant r_2$: want
als $\sum_n a_n t^n$ convergeert dan $\lim_n a_n t^n = 0$
en als $\lim_n a_n t^n = 0$ dan is $\langle a_n t^n \rangle_n$ begrensd

Nieuwe kennis

Neem aan $r_2 > 0$, neem $\rho < r_2$ en ρ_1 met $\rho < \rho_1 < r_2$.

Zij $M = \sup\{|a_n \rho_1^n| : n \in \mathbb{N}\}$ (die bestaat want $\rho_1 < r_2$).

Als $|z| \leqslant \rho$ dan geldt

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n \rho^n| = |a_n \rho_1^n| \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \leqslant M \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n$$

Wegens het Majorantencriterium geldt nu dat $\sum_n a_n z^n$ absoluut convergeert als $|z| \leqslant \rho$, dus $\rho \leqslant r$.

Conclusie: $r_2 \leqslant r$.

Normale convergentie

De machtreeks $\sum a_n z^n$, met convergentiestraal r, is normaal convergent op $U_r(0)$.
Immers: de reeks is absoluut en uniform convergent op $U_\rho(0)$ voor elke $\rho < r$.

En nu zien we weer:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

is analytisch op $U_r(0)$ en

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Delft University of Technology

Voorbeeld 1

De meetkundige reeks. De convergentiestraal is gelijk aan 1.

We weten:

$$\sum_{n=0}^{\infty} = \frac{1}{1-z} \qquad (|z| < 1)$$

Verder: $\sum_n z^n$ divergeert voor *alle* z met $|z| = 1$.

Voorbeeld 2

De reeks

$$\sum_n \frac{1}{n} z^n$$

heeft convergentiestraal 1
(want $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ en $\langle \frac{1}{n} t^n \rangle_n$ is onbegrensd als $t > 1$).

Op de open schijf $U_1(0)$ is de somfunctie, $f(z)$, dus analytisch en

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Voorbeeld 2

We hebben $f'(z) = (1-z)^{-1}$, en dus

$$f(z) = -\operatorname{Log}(1-z) + 2k\pi\mathrm{i} \qquad (|z| < 1)$$

voor een $k \in \mathbb{Z}$.

Maar $f(0) = 0$ en dus $k = 0$ en

$$f(z) = -\operatorname{Log}(1-z) \qquad (|z| < 1)$$

Voorbeeld 2

Op de rand?

De reeks divergeert als $z = 1$.

De reeks $\sum_n \frac{1}{n} z^n$ convergeert voor alle z met $|z| \leqslant 1$ en $z \neq 1$.
En de som is overal gelijk aan $-\operatorname{Log}(1 - z)$.

Zie blackboard voor een link (onder 'Web Links').

Delft University of Technology

Hoofdresultaat

Stelling (III.2.2)

Zij $f : D \to \mathbb{C}$ analytisch, zij $a \in D$ en zij R de afstand van a tot het complement van D (als $D = \mathbb{C}$ dan $R = \infty$).
Op de schijf $\{z : |z - a| < R\}$ geldt

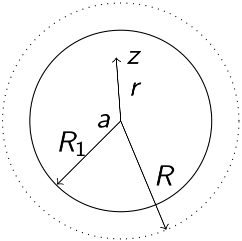
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

met

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

waarbij $\alpha(t) = a + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ voor een r met $0 < r < R$.

Bewijs



Neem z binnen de cirkel $\{w : |w - a| = R\}$ en neem R_1 zó dat $|z - a| = r < R_1 < R$. Werk op de cirkel α met straal R_1 om a.

Bewijs

Pas de formule van Cauchy toe: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$.
We bouwen het quotient $1/(\zeta - z)$ om:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a}\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta-a}} = \frac{1}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n$$

De modulus, r/R_1, van het quotient in de som is kleiner dan 1 op α, dus deze reeks convergeert *uniform* op α.
We mogen sommatie en integratie omwisselen.

Bewijs

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n \mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}(z-a)^n\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}\zeta \times (z-a)^n
\end{aligned}
$$

Klaar, dankzij de formules van Cauchy.

Opmerkingen

De coëfficiënten zijn onafhankelijk van de straal van α.

De machtreeks convergeert op de schijf $U_R(a)$.

De convergentiestraal is dus ten minste zo groot als R, de afstand van a tot het complement van D.

De convergentiestraal is gelijk aan de straal van de grootste schijf om a waarop de functie f nog analytisch (te maken) is.

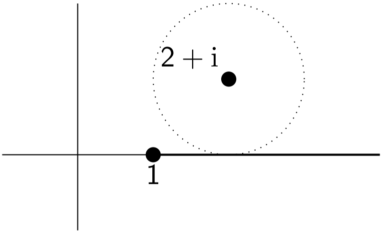
Delft University of Technology

Voorbeeld

Neem $f(z) = -\operatorname{Log}(1-z)$ (hoofdtak) en $a = 2 + \mathrm{i}$.

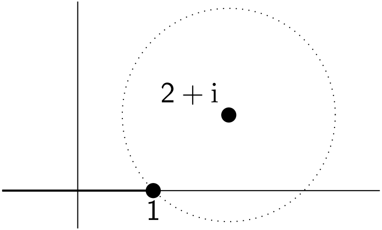
Wat is de convergentiestraal van de Taylorreeks van $f(z)$ om a?

Zeker groter dan of gelijk aan 1: dat is de afstand van a tot het complement van het (gegeven) domein van f.



Voorbeeld

We kunnen ook de tak, $\log z$, van de logaritme nemen met $0 < \arg z < 2\pi$ en $\log(-1+\mathrm{i}) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{3}{4}\pi\mathrm{i}$.
In het eerste kwadrant geldt dan $f(z) = -\log(1-z)$ en de convergentiestraal van de machtreeks om a is nu ten minste $\sqrt{2}$.



Beter kan niet: deze logaritme is in 1 niet analytisch te maken.